Тематическая лекция 4

ПРОИЗВОДНАЯ ФРЕШЕ И ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛОВ

В этой лекции мы напомним определение производной Фреше и получим выражения для производных Фреше некоторых важных функционалов и операторов, а также рассмотрим некоторые используемые в дальнейшем неравенства. Кроме того, мы сформулируем и докажем достаточные условия экстремума функционала на слабо замкнутом многообразии.

§ 1. Производная Фреше операторов

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

Дадим определение производной Фреше.

Определение 1. *Оператор F называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в некоторой малой окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление*:

$$F(u+h) = F(u) + F_f^{'}(u)h + \omega_1(u,h), \tag{1.1}$$

причем

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \tag{1.2}$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор

$$F_f^{'}(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора F.

Нами в основном будет рассматриваться такая ситуация, когда $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$ — это некоторое банахово пространство и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}^1$ относительно нормы $|\cdot|$. А оператор $F(u)$ является вещественным функционалом

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

Тогда равенства (1.1) и (1.2) в этом случае примут следующий вид:

$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi_f^{'}(u), h \right\rangle + \omega_1(u,h), \quad \lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|} = 0, \tag{1.3}$$

где

$$\psi_f^{'}(\cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

— это производная Фреше функционала $\psi(u)$.

Приведем без доказательства важное свойство производной Фреше.
Теорема 1. *Пусть* $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *и* $G : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, *причем оператор* F *дифференцируем по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *а оператор* G *дифференцируем по Фреше в точке* $F(u)$. *Тогда их композиция*

$$K \equiv G \circ F$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$K'_f(u) = G'_f(F(u))F'_f(u). \tag{1.4}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение:

$$F(u) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{B}_1; \mathbb{B}_2),$$

которое означает, что оператор $F(u)$ имеет $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ непрерывных на банаховом пространстве $\mathbb{B}_1$ производных Фреше. В частности, для вещественных функционалов $\psi(u)$ используем обозначение $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$.

Следующее утверждение нужно для получения достаточных условий экстремума функционала.
Лемма 1. *Пусть* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, *тогда справедлива следующее равенство*:

$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h), \tag{1.5}$$

где для $\omega_2(u,h)$ *выполнено следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство.
Итак, пусть

$$\psi''_{ff}(u)$$

существует и непрерывна на $\mathbb{B}$. Заметим, что для $\psi'_f(u)$ в силу дифференцируемости по Фреше справедливо следующее равенство:

$$\psi'_f(u+h) = \psi'_f(u) + \psi''_{ff}(u)h + \omega_1(u,h),$$

где

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_*}{\|h\|} = 0$$

при $u, h \in \mathbb{B}$. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(u+th)\,dt = \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u+th), h \right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u) + t\psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle \, dt + \omega_2(u,h),$$

где

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h \rangle \, dt.$$

Значит, отсюда приходим к выражению

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle \int\limits_0^1 t\,dt + \omega_2(u,h) =$$

$$= \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h),$$

где для $\omega_2(u,h)$ справедливо равенство

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h \rangle \, dt.$$

Стало быть, приходим к неравенству

$$|\omega_2(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 \|\omega_1(u,th)\|_* \, \|h\| \, dt.$$

Поэтому справедливо следующее предельное неравенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \int\limits_0^1 \frac{\|\omega_1(u,th)\|_*}{\|h\|} \, dt = 0.$$

Тем самым, формулы (1.5) и (1.6) доказаны.

Лемма доказана.

Необходимость введения понятия производной Фреше функционала прежде всего необходимо для получения необходимых и достаточных условий экстремума функционала на банаховом пространстве $\mathbb{B}$.

§ 2. Достаточные условия экстремума функционала из $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$

Теперь мы в состоянии доказать один результат о необходимом условии экстремума функционала. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функционал* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, *тогда необходимыми условиями минимума (максимума) в этой точке* $\widehat{u}$ *являются следующие*

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi''_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \;\; (\leqslant 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{B}. \tag{2.1}$$

Доказательство.

Рассмотрим разложение функционала $\psi(u)$ в окрестности точки экстремума $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) = \psi(\widehat{u}) + \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h).$$

Прежде всего докажем следующее равенство:

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0,$$

□ Действительно, пусть

$$\psi'_f(\widehat{u}) \neq 0,$$

тогда, с одной стороны, при достаточно малом по норме $\|h\| > 0$ знак разности в точке минимума (максимума)

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant 0 (\leqslant 0).$$

С другой стороны,

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + o(\|h\|).$$

Поэтому если при данном малом по норме $h \in \mathbb{B}$ имеет место неравенство

$$\left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle > 0,$$

то меняя h на $-h$, мы получим, что при малом по норме h, например, в точке минимума имеет место неравенства

$$0 \leqslant \psi(\widehat{u}-h) - \psi(\widehat{u}) \backsimeq -\left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle < 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0. \quad \boxtimes$$

Поэтому приходим к следующему равенству:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h). \tag{2.2}$$

Предположим, что $\widehat{u}$ — это точка локального минимума (максимума), но для некоторого $h_1 \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1 \right\rangle < 0 \; (> 0).$$

Тогда для $h = \varepsilon h_1$ при $\varepsilon > 0$ имеет место следующее выражение:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle = \varepsilon^2 \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1 \right\rangle < 0 \ (> 0).$$

Теперь, выбирая $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, получим, что в любой окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ найдется точка $\varepsilon h_1 \in \mathbb{B}$, что

$$\psi(\widehat{u} + \varepsilon h_1) - \psi(\widehat{u}) < 0 \ (> 0),$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ нет минимума (максимума). Следовательно, необходимым условием минимума (максимума) в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ есть условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в отличие от конечномерного анализа условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

не является достаточным условием минимума (максимума). Действительно, имеет место следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[0, 1]$ относительно стандартной supremum–нормы:

$$\psi(u) = \int_0^1 u^2(x)(x - u(x))\, dx.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u + h) = \int_0^1 (u + h)^2(x - u - h)\, dx = \int_0^1 u^2(x - u)\, dx +$$
$$+ \int_0^1 \left(2ux - 3u^2\right) h\, dx + \int_0^1 (x - 3u)h^2\, dx - \int_0^1 h^3\, dx.$$

Из этого равенства приходим к выводу, что

$$\psi'_f(u) = 0$$

на двух функциях

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad u(x) = \frac{2}{3}x.$$

Заметим теперь, что

$$\left\langle \psi''_{ff}(0)h, h \right\rangle = 2\int_0^1 h^2(x)x\, dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0, 1],$$

причем,

$$\psi(0) = 0,$$

т. е. на функции $u(x) = 0$ выполнены все необходимые условия локального минимума, но, тем не менее, на функции $u(x) = 0$ функционал не достигает локального минимума. Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x, & \text{при} \quad x \in [0, \varepsilon]; \\ 0, & \text{при} \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь вычислим норму этой функции

$$\sup_{x \in [0,1]} |u_\varepsilon(x)| = \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. в любой окрестности функции $u(x) = 0 \in \mathbb{C}[0,1]$ содержится функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$. Теперь вычислим значение функционала $\psi(\cdot)$ на функции $u_\varepsilon(x)$. Действительно, имеем

$$\psi(u_\varepsilon(x)) = \int\limits_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,(x - u_\varepsilon(x)) = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0 = \psi(0).$$

Тем самым, минимум у функционала $\psi(u)$ на функции $u(x) = 0$ не достигается. И это связано с тем, что, вообще говоря, нельзя не учитывать остаточные слагаемые, входящие в $\omega_2(u,h)$.

Тем не менее, можно сформулировать теорему о достаточных условиях экстремума.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$. *Тогда при условиях*

(i) $\psi'_f(\widehat{u}) = 0$;

(ii) $\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2$ $(\leqslant -c\|h\|^2)$ *для всех* $h \in \mathbb{B}$ *и* $c = c(\widehat{u}) > 0$

в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ *у функционала* $\psi(\widehat{u})$ *достигается минимум (максимум).*

Доказательство.

Докажем достаточность условий для минимума функционала $\psi(u)$ в точке $\widehat{u}$, поскольку достаточность условий для максимума проверяется аналогичным образом. Действительно, в силу условий теоремы имеет место представление в окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u} + h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(u,h). \tag{2.3}$$

Кроме того, поскольку имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0,$$

то при достаточно малом $\|h\|$ для заданного $c > 0$ будет иметь место неравенство
$$|\omega_2(u, h)| < \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Тогда из (2.3) получим неравенство для таких $h \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u} + h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle - \frac{c}{4}\|h\|^2 \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 - \frac{c}{4}\|h\|^2 = \frac{c}{4}\|h\|^2,$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ достигается минимум у функционала ψ.

Теорема доказана.

§ 3. Слабо коэрцитивные и слабо полунепрерывные функционалы

Дадим определения *слабо замкнутого подмножества*, *слабо полунепрерывного снизу функционала* и *слабо коэрцитивного функционала*.

Определение 2. *Множество $M \subset \mathbb{B}$ называется слабо замкнутым, если для всякой последовательности $\{u_n\} \subset M$ такой, что*
$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u \in M.$$

Определение 3. *Функционал $\psi(u)$ называется слабо полунепрерывным снизу на слабо замкнутом множестве $M \subset \mathbb{B}$, если для всякой последовательности $\{u_n\} \subset M$*
$$u_n \rightharpoonup u \in M \Rightarrow \psi(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n).$$

Определение 4. *Функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющий условию*
$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \psi(u) = \infty,$$
называется слабо коэрцитивным.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{B}$ — это рефлексивное банахово пространство.* [1] *Тогда*

(i) *Если* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *слабо замкнуто в* $\mathbb{B}$;
(ii) *Если функционал $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ слабо коэрцитивен на* $\mathbb{B}$;
(iii) *Если функционал $\psi(u)$ является слабо полунепрерывным снизу на M,*

то он ограничен снизу на M *и достигает своего минимума на* M :
$$\psi(u_0) = \inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

---

[1] Поэтому, в частности, банахово пространство $\mathbb{B}$ в силу рефлексивности является слабо замкнутым.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть
$$d > \inf_{u\in M} \psi(u).$$
Поскольку функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным на $\mathbb{B}$ найдется такое $R > 0$, что
$$\psi(u) \geqslant d \quad \text{для всех} \quad u \in B_R = \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \geqslant R\}.$$
Следовательно,
$$\inf_{u\in M} \psi(u) = \inf_{u\in M\cap B_R} \psi(u).$$

Шаг 2. Пусть
$$\alpha_0 = \inf_{u\in \mathrm{M}} \psi(u)$$
и $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ — это минимизирующая последовательность, которая, очевидно, начиная с некоторого номера принадлежит множеству $B_R \cap \cap M$. Это значит, что
$$\|u_n\| \leqslant R \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$
Но тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}$ найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\}$, что
$$u_{n_n} \rightharpoonup u_0 \in B_R,$$
но при этом в силу слабой замкнутости M мы получим, что $u_0 \in M$. Поэтому подпоследовательность
$$u_{n_n} \rightharpoonup u_0 \in M \cap B_R.$$
В силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала ψ на M приходим к выводу, что
$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_{n_n}), \quad u_0 \in M \cap B_R.$$
Таким образом, приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств:
$$\inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_{n_n}) = \lim_{n\to+\infty} \psi(u_n) = \inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u),$$
из которой следует, что
$$\inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u) = \psi(u_0) > -\infty.$$

Теорема доказана.

§ 4. Важные вспомогательные неравенства

Пусть вектора $a, b \in \mathbb{R}^N$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$ обозначим через $(\cdot,\cdot)$. Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 3. *Справедливо тождество*

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a,b-a\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2+\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}-|a|^{p-2}\right)\left(|b|^2-|a|^2\right). \quad (4.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Перепишем равенство (4.1) в виде

$$I_1=I_2.$$

С одной стороны, имеет место цепочка равенств

$$I_1=\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a,b-a\right)=|b|^p+|a|^p-\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)(a,b).$$

С другой стороны, имеем

$$I_2=\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2+\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}-|a|^{p-2}\right)\left(|b|^2-|a|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)\left(|b|^2+|a|^2-2(a,b)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}-|a|^{p-2}\right)\left(|b|^2-|a|^2\right)=$$
$$=|b|^p+|a|^p-\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)(a,b).$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Как мы видим из тождества (4.1) есть критическое для дальнейшего исследования значение $p=2$. Справедливо следующее утверждение:
Л е м м а 4. *Справедливы следующие неравенства*: [1])

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a,b-a\right)\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2\geqslant 2^{2-p}|b-a|^p \quad \text{при} \quad p\geqslant 2, \quad (4.2)$$

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a,b-a\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2 \quad \text{при} \quad p\leqslant 2, \quad (4.3)$$

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a,b-a\right)\leqslant\gamma(p)|b-a|^p \quad \text{при} \quad p\leqslant 2, \quad (4.4)$$

где постоянная $\gamma(p)>0$. *Наконец, для любого* $1<p<+\infty$ *имеет место следующие неравенства*:

[1]) Неравенства (4.4) и (4.5) мы оставили без доказательства.

$$c_p\left(|a|+|b|\right)^{p-2}|a-b|^2 \leqslant \left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant \\ \leqslant C_p\left(|a|+|b|\right)^{p-2}|a-b|^2 \quad (4.5)$$

для некоторых постоянных $0 < c_p$ *и* $0 < C_p$.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим сначала случай $p \geqslant 2$. В этом случае функция $f(t) = t^{p-2}$ при $t \in \mathbb{R}^1_+$ является строго возрастающей и поэтому имеем

$$\left(|t_1|^{p-2}t_1 - |t_2|^{p-2}t_2\right)(t_1-t_2) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+{}^1.$$

Поэтому в силу тождества (4.1) имеем

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a, b-a\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2. \qquad (4.6)$$

Наконец, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|b-a|^p = |b-a|^2|b-a|^{p-2} \leqslant |b-a|^2\left(|b-a|^2\right)^{(p-2)/2} = \\ = |b-a|^2\left(|b|^2-2(a,b)+|a|^2\right)^{(p-2)/2} \leqslant \\ \leqslant |b-a|^2 2^{(p-2)/2}\left(|b|^2+|a|^2\right)^{(p-2)/2} \leqslant \\ \leqslant |b-a|^2 2^{(p-2)/2} 2^{(p-2)/(2)-1}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right) = \\ = 2^{p-3}|b-a|^2\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right).$$

Осталось применить это итоговое неравенство к неравенству (4.6) и получить оценку

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a, b-a\right) \geqslant 2^{2-p}|b-a|^p.$$

Шаг 2. Заметим, что при $p < 2$ функция $f(t) = t^{p-2}$ при $t \in \mathbb{R}^1_+$ является строго убывающей и поэтому

$$\left(t_1^{p-2} - t_2^{p-2}\right)(t_1-t_2) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1_+.$$

Следовательно, из тождества (4.1) мы получим неравенство

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2.$$

В случае $p = 2$ имеем равенство

$$\left(|b|^{p-2}b-|a|^{p-2}a, b-a\right) = \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2}+|a|^{p-2}\right)|b-a|^2.$$

Лемма доказана.

§ 5. Производные Фреше некоторых функционалов

Прежде всего нас интересует производные Фреше следующих функционалов: [1])

$$\psi_1(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |u|^p\,dx \quad \text{и} \quad \psi_2(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |D_x u|^p\,dx \tag{5.1}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 5. *Пусть $p \in (1, +\infty)$. Тогда производные Фреше функционалов $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$, действующих*

$$\psi_1(u) : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1, \quad \psi_2(u) : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1,$$

равны

$$\psi'_{1f}(u) = |u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega), \tag{5.2}$$

$$\psi'_{2f}(u) = -\Delta_p u \overset{def:}{=} -\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) \in W^{-1,p'}(\Omega). \tag{5.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала вычислим производную Фреше функционала $\psi_1(u)$. При этом нужно раздельно рассмотреть два случая $p \geqslant 2$ и $p \in (1, 2)$.

В случае $p \geqslant 2$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа и получим следующее равенство:

$$|u + h|^p = |u|^p + p|u|^{p-2}uh + \frac{p(p-1)}{2}|\xi|^{p-2}h^2, \quad u < \xi < u + h, \tag{5.4}$$

причем в этой формуле имеем

$$u = u(x) \in L^p(\Omega), \quad h = h(x) \in L^p(\Omega) \Rightarrow \xi = \xi(x) \in L^p(\Omega).$$

Теперь разделим обе части равенства (5.4) на p и проинтегрируем по $x \in \Omega$. В результате получим равенство

$$\psi_1(u + h) = \psi_1(u) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx + \omega_1(u, h), \tag{5.5}$$

где

$$\omega_1(u, h) = \frac{p-1}{2}\int\limits_{\Omega} |\xi(x)|^{p-2}h^2(x)\,dx. \tag{5.6}$$

Заметим, что в силу неравенства Гельдера с показателями

$$q_1 = \frac{p}{p-2}, \quad q_2 = \frac{p}{2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1,$$

примененного к выражению $\omega_1(u, h)$, мы получим цепочку выражений:

---

[1]) Напоминаем, что $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

$$|\omega_1(u,h)| \leqslant \frac{p-1}{2}\left(\int\limits_{\Omega}|\xi(x)|^p\,dx\right)^{(p-2)/p}\left(\int\limits_{\Omega}|h(x)|^p\,dx\right)^{2/p} =$$
$$= c_1\|h\|_p^2 \Rightarrow \lim_{\|h\|_p\to+0}\frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|_p} = 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega}|u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx = \left\langle \psi'_{1f}(u), h\right\rangle \Rightarrow \psi'_{1f}(u) = |u|^{p-2}u.$$

Теперь мы рассмотрим случай $p \in (1,2)$. В этом случае мы рассмотрим формулу Лагранжа

$$|u+h|^p = |u|^p + p|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h)h =$$
$$= |u|^p + p|u|^{p-2}uh + \omega(u,h), \quad \vartheta \in (0,1), \tag{5.7}$$
$$\omega(u,h) = \frac{p}{\vartheta}\left(|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h) - |u|^{p-2}u\right)\vartheta h.$$

Воспользуемся неравенством (4.4) и получим следующую оценку:

$$0 \leqslant \left(|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h) - |u|^{p-2}u\right)\vartheta h \leqslant \gamma(p)|\vartheta h|^p.$$

Используя эту оценку, получим

$$|\omega(u,h)| \leqslant p|h|^p|\vartheta|^{p-1} \leqslant p|h|^p. \tag{5.8}$$

Теперь разделим обе части равенства (5.7) на p и проинтегрируем получившееся равенство по $x \in \Omega$. В результате приходим к равенству

$$\psi_1(u+h) = \psi_1(u) + \int\limits_{\Omega}|u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx + \omega_1(u,h), \tag{5.9}$$

где

$$\omega_1(u,h) = \int\limits_{\Omega}\omega(u(x),h(x))\,dx.$$

В силу (5.8) справедливо неравенство ($p > 1$)

$$|\omega_1(u,h)| \leqslant \int\limits_{\Omega}|h(x)|^p\,dx = \|h\|_p^p \Rightarrow \lim_{\|h\|_p\to+0}\frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|_p} = 0.$$

Шаг 2. Вычислим теперь производную Фреше функционала $\psi_2(u)$. При этом нужно воспользоваться соответствующими формулами Тейлора для вещественных функций многих переменных с остаточными слагаемыми в форме Лагранжа. Рассуждения проведенные на шаге 1 проходят почти в точностью и здесь. Нужно лишь воспользоваться при

$p \in (1,2)$ формулой (4.4). Далее нужно воспользоваться следующим равенством для обобщенного оператора $p-$Лапласиана [1])

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u|^{p-2} D_x u, D_x h(x) \Big) \, dx = \langle -\Delta_p u, h \rangle \quad \text{для всех} \quad h(x) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

[1]) Смотри тематическую лекцию 3.