

Лекция 1

ТЕОРИЯ МЕРЫ ЛЕБЕГА МНОЖЕСТВ ИЗ \mathbb{R}^2

§ 1. Необходимость расширения понятия интеграла

Сначала обсудим построение интеграла Римана.

Пусть функция $f(x)$ задана на собственном отрезке $[a, b]$. Определим разбиение отрезка $[a, b]$.

$$T_n(\xi_n) := \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}, \quad (1.1)$$

$$\xi(n) := \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Составим так называемую интегральную сумму:

$$\sigma_n(T_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (1.2)$$

Введём параметр разбиения

$$\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in [1, n-1]} |x_{i+1} - x_i|. \quad (1.3)$$

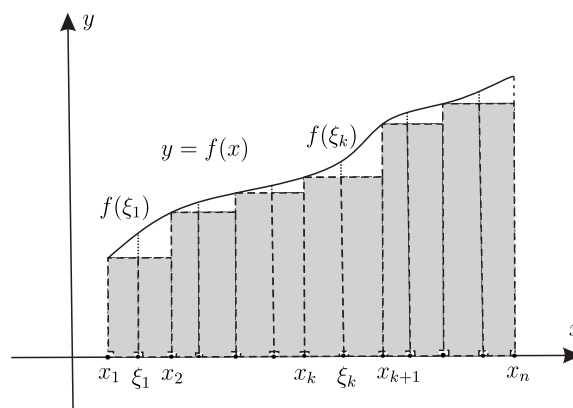


Рис. 1. Построение интегральной суммы.

Дадим определение *интеграла Римана* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Определение 1. Число I называется *интегралом Римана* функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для любого разбиения $T_n(\xi_n)$, удовлетворяющего условию

$$\Delta_n(T_n) < \delta, \quad (1.4)$$

выполнено неравенство

$$|\sigma_n(T_n) - I| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Существенно, что на разбиения $T_n(\xi_n)$ не накладывается никаких ограничений, кроме условия (1.4). Выбор точек ξ_i может быть произвольным. В частности, отсюда следует, что если для некоторой функции можно построить две различные последовательности разбиений $\{T_{1n}\}$ и $\{T_{2n}\}$, удовлетворяющие условию $\Delta_n(T_{kn}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2$), для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{1n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2n},$$

то интеграл Римана этой функции не существует. Приведём пример такой функции. Рассмотрим так называемую функцию Дирихле:

$$D(x) := \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{J} \cap [0, 1], \end{cases}$$

где символом \mathbb{Q} обозначено множество рациональных чисел, а символом \mathbb{J} — множество иррациональных чисел. Известно, что $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ и $\mathbb{Q} \cap \mathbb{J} = \emptyset$.

Тогда возьмём сначала такую последовательность разбиений $\{T_{1n}\}$ отрезка $[0, 1]$, состоящую из произвольного разбиения точками $\{x_1, \dots, x_N\}$ с выбором $\xi_1(n) \in \mathbb{Q}$, а затем последовательность разбиений $\{T_{2n}\}$ отрезка $[0, 1]$, состоящую из произвольного разбиения точками $\{x_1, \dots, x_N\}$ с выбором $\xi_2(n) \in \mathbb{J}$. Вычислим соответствующие интегральные суммы:

$$\begin{aligned} \sigma_{1n} &= \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_{1i})(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 \cdot (x_{i+1} - x_i) = 1, \\ \sigma_{2n} &= \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_{2i})(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 0 \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0. \end{aligned}$$

Ясно, что в обоих случаях пределы существуют:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{1n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{2n} = 0.$$

Однако эти пределы не совпадают. Более того, нетрудно заметить, что в общем случае для каждого числа $a \in [0, 1]$ найдется такая последовательность разбиений $T_n(a)$, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n[T_n(a)] = a.$$

Для получения необходимого и достаточного условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно ввести понятия верхней суммы Дарбу $S(T_n)$ и нижней суммы Дарбу $s(T_n)$.

Определение 2. *Верхней суммой Дарбу называется величина*

$$S(T_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i), \quad M_i := \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x). \quad (1.5)$$

Определение 3. *Нижней суммой Дарбу называется величина*

$$s(T_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad m_i := \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x). \quad (1.6)$$

Очевидно, что

$$s_{T_n} \leq \sigma(T_n) \leq S_{T_n}. \quad (1.7)$$

Замечание 2. Введённые суммы Дарбу имеют следующий смысл: вместо того, чтобы исследовать вопрос о существовании равномерного предела (1.4) и исследовать вопрос о его существовании «перебирая» все возможные точки $\{\xi_n\}$ и всевозможные значения функции $\{f(\xi_i)\}$ на отрезке $[a, b]$ мы рассматриваем только точную верхнюю и точную нижнюю грань функции $f(x)$ на произвольных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$. Так исследовать этот вопрос проще и, как мы покажем ниже, этот подход является оптимальным поскольку даёт необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману.

Справедлива следующая известная теорема:

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[0, 1]$, тогда равномерный по разбиению отрезка $[0, 1]$ предел интегральных сумм существует.*

Доказательство.

Разобьём доказательство теоремы на три шага.

Шаг 1. Пусть $T_{n+1} = T_n \cup \{x_0\}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$s_{T_n} \leq s_{T_{n+1}} \leq S_{T_{n+1}} \leq S_{T_n}. \quad (1.8)$$

□ Пусть $x_0 \in [x_i, x_{i+1}]$. Введём следующие обозначения:

$$m'_i := \inf_{x \in [x_i, x_0]} f(x), \quad m''_i := \inf_{x \in [x_0, x_{i+1}]} f(x), \quad \lambda_1 = |x_0 - x_i|, \quad \lambda_2 = |x_{i+1} - x_0|.$$

Заметим, что отличие сумм s_{T_n} и $s_{T_{n+1}}$ друг от друга — в слагаемых, связанных с отрезком $[x_i, x_{i+1}] \ni x_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} s_{T_{n+1}} - s_{T_n} &= m'_i \lambda_1 + m''_i \lambda_2 - m_i(\lambda_1 + \lambda_2) = \\ &= \lambda_1(m'_i - m_i) + \lambda_2(m''_i - m_i) \geq 0, \end{aligned}$$

поскольку, очевидно, $m'_i \geq m_i$ и $m''_i \geq m_i$.

Аналогичным образом доказывается неравенство для верхних сумм Дарбу. \square

Шаг 2. Докажем, что имеет место неравенство

$$s_{T_n} \leq S_{T_m} \quad \text{для любых разбиений } T_n, T_m. \quad (1.9)$$

\square Пусть $T_l = T_n \cup T_m$. Тогда согласно неравенству (1.8), применённому необходимое число раз, и неравенству (1.7) получим неравенство

$$s_{T_n} \leq s_{T_l} \leq S_{T_l} \leq S_{T_m}. \quad \square \quad (1.10)$$

Шаг 3. Теперь докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения T_n с параметром разбиения $\Delta_n < \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$S_{T_n} - s_{T_n} < \varepsilon. \quad (1.11)$$

\square Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} S_{T_n} - s_{T_n} &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) \leq \max_{i=1, n} \omega_i \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i), \\ \omega_i &= M_i - m_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(\xi''_i) - f(\xi'_i), \end{aligned}$$

где $\xi'_i, \xi''_i \in [x_i, x_{i+1}]$, поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, в силу замкнутости отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ достигает на нём точных граней.

С другой стороны, поскольку непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нём, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\xi'_i, \xi''_i \in [x_i, x_{i+1}]$ таких, что

$$|\xi''_i - \xi'_i| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\xi''_i) - f(\xi'_i)| < \varepsilon.$$

Осталось заметить, что имеет место неравенство

$$|\xi''_i - \xi'_i| \leq \Delta_n.$$

Поэтому утверждение доказано. \square

Из неравенств (1.9) и (1.11) вытекает, что для любой последовательности точек $\{x_1, \dots, x_n\}$ разбиения отрезка $[a, b]$ соответствующие последовательности верхних S_n и нижних s_n сумм Дарбу монотонно сходятся и их пределы совпадают и не зависят от выбора этой последовательности точек разбиения.

Следовательно, по теореме «о двух милиционерах»

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Заметим, что при доказательстве теоремы мы воспользовались непрерывностью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ только тогда, когда доказывали, что величина ω_i , называемая *колебанием* функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, обладает свойством

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i |x_{i+1} - x_i| \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \rightarrow +0. \quad (1.12)$$

Этого свойства можно добиться двояким образом: *либо функция $f(x)$ на некоторых отрезках разбиения непрерывна, либо множество точек разрыва первого рода можно покрыть такими отрезками, чтобы величина (1.12) стремилась к нулю при стремлении к нулю общей длины этих отрезков.*

Поэтому класс функций, интегрируемых по Риману, можно расширить до ограниченных функций, имеющих точки разрыва первого рода на множестве нулевой меры Лебега на отрезке $[a, b]$ — это известный результат, называемый *теоремой Лебега о достаточном условии интегрируемости по Риману.*

Кроме того, имеется другое достаточное условие интегрируемости по Лебегу: *всякая монотонная ограниченная функция интегрируема по Риману.*

□ Действительно, для этого заметим, что если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то колебание ω_i на любом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ оценивается сверху следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_i \leq |f(b) - f(a)| &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i |x_{i+1} - x_i| \leq \\ &\leq \delta(\varepsilon) \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i = \delta(\varepsilon) \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \\ &= \delta(\varepsilon) \left| \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = \delta(\varepsilon) |f(b) - f(a)| = \varepsilon, \end{aligned}$$

если подчинить разбиения T_n условию $\Delta_n \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$. □

С другой стороны, например в теории стохастических процессов, есть существенная необходимость в расширении понятия интеграла таким образом, чтобы ограниченные функции при дополнительном условии *измеримости функции в некотором смысле* на отрезке $[a, b]$ были интегрируемы. Таким расширением является понятие *интеграла*

Лебега. В частности, функция Дирихле будет интегрируемой по Лебегу и её интеграл Лебега равен нулю на отрезке $[0, 1]$.

§ 2. Некоторые факты из теории множеств

Напомним следующие операции над множествами:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in A \text{ или } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in A \text{ и } x \in B\}, \\ A \setminus B &= \{x \in A \text{ и } x \notin B\}, \\ A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Пусть $A \subset P$ и $B \subset P$, тогда имеют место следующие равенства:

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)], \quad (2.1)$$

$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \quad (2.2)$$

$$A \Delta B = (P \setminus A) \Delta (P \setminus B). \quad (2.3)$$

ПРИМЕР 2. Кроме того, справедливы следующие вложения:

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2). \quad (2.4)$$

Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2). \quad (2.5)$$

§ 3. Элементарные множества на плоскости

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x^1 \times \mathbb{R}_y^1$. Будем называть прямоугольниками все множества следующего вида:

$$\begin{aligned} \Pi &= \{A_x \otimes B_y\}, \\ A_x &= \{x \in [a, b]\}, \quad B_y = \{y \in [c, d]\}. \end{aligned}$$

(Символ $[a, b]$ обозначает конечный промежуток любого типа.)

Здесь Π может быть пустым множеством, если, например, $a > b$, точкой, когда $a = b$ и $c = d$, и отрезком (интервалом, полуинтервалом), когда $a = b$ и $c < d$.

Такой выбор прямоугольников обусловлен тем, что пересечение «правильных» прямоугольников — со сторонами, параллельными осям координат, — является прямоугольником, а для прямоугольников произвольной ориентации («неправильных») это, вообще говоря, неверно.

Определим меру собственного прямоугольника Π стандартным образом, как площадь:

$$m(\Pi) = (b - a)(d - c).$$

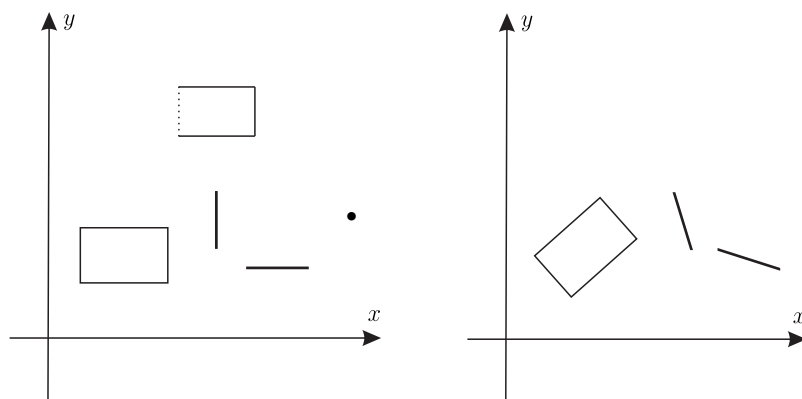


Рис. 2. «Правильные» и «неправильные» прямоугольники.

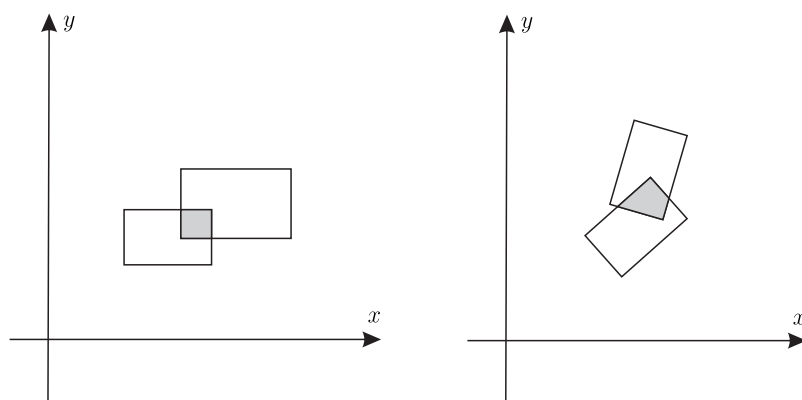


Рис. 3. Пересечения «правильных» и «неправильных» прямоугольников.

Если же Π — это пустое множество, точка или отрезок (интервал, полуинтервал), то определению считаем, что

$$m(\Pi) = 0.$$

Можно доказать, что введённая мера m является аддитивной функцией прямоугольников, т. е. если

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^n \Pi_i \text{ — прямоугольник,}$$

то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^n m(\Pi_i). \quad (3.1)$$

Теперь мы введём понятие *элементарного множества* из \mathbb{R}^2 .

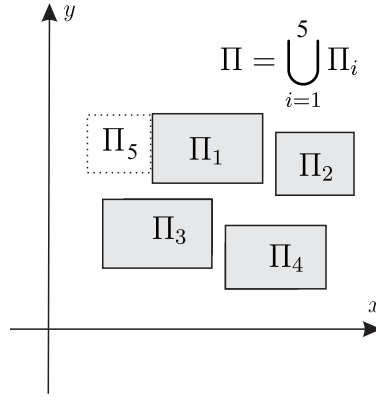


Рис. 4. Пример элементарного множества.

Определение 4. *Элементарным множеством из \mathbb{R}^2 называется множество, полученное объединением конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников.*

При этом мера элементарного множества вводится как

$$m'(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n m(\Pi_i), \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j. \quad (3.2)$$

Это определение корректно, т. е. сумма в правой части не зависит от выбора разбиения данного элементарного множества на прямоугольники.

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^n \Pi_i = \bigcup_{j=1}^l Q_j, \quad (3.3)$$

где

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, \quad Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j.$$

В силу равенств (3.3) имеем

$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^l (Q_j \cap \Pi_i), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^n (\Pi_i \cap Q_j), \quad (3.4)$$

причём

$$\begin{aligned} (Q_{j_1} \cap \Pi_i) \cap (Q_{j_2} \cap \Pi_i) &= \emptyset \quad \text{при } j_1 \neq j_2, \\ (\Pi_{i_1} \cap Q_j) \cap (\Pi_{i_2} \cap Q_j) &= \emptyset \quad \text{при } i_1 \neq i_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Очевидно, что множество

$$Q_j \cap \Pi_i = \Pi_i \cap Q_j$$

является прямоугольником. Таким образом, согласно определению (3.2) в силу (3.3), (3.4), (3.5) и (3.1) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} m'(A) &= \sum_{i=1}^n m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^n m\left(\bigcup_{j=1}^l (Q_j \cap \Pi_i)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l m(Q_j \cap \Pi_i) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n m(\Pi_i \cap Q_j) = \sum_{j=1}^l m(Q_j). \quad \square \end{aligned} \quad (3.6)$$

Непосредственно из определения следуют важные свойства меры на элементарных множествах. Именно, если A, B — элементарные множества, то

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B), \quad (3.7)$$

(конечная аддитивность)

$$A \subset B \Rightarrow m'(A) \leq m'(B) \quad (3.8)$$

(монотонность).

Имеет место свойство *счётной полуаддитивности* элементарных множеств.

Теорема 2. Пусть A и A_n при $n \in \mathbb{N}$ являются элементарными множествами, причём

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$m'(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n). \quad (3.9)$$

Доказательство. Если ряд в правой части неравенства 3.9 расходится, то утверждение теоремы тривиально. В противном случае доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что по элементарному множеству A можно построить такое замкнутое элементарное множество \bar{A} , т.е. составленное из попарно непересекающихся замкнутых прямоугольников, что

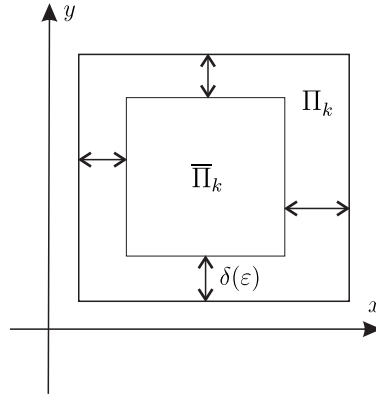
$$\bar{A} \subset A$$

и

$$m'(\bar{A}) \geq m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.10)$$

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^l \Pi_j, \quad \text{где } \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j.$$

Рис. 5. Построение множества $\bar{\Pi}_k$.

Пусть $\bar{\Pi}_j$ — это замкнутые прямоугольники (т.е. имеющие вид $[a, b] \otimes [c, d]$), для которых имеют место вложения

$$\bar{\Pi}_j \subset \Pi_j, \quad \bar{A} = \bigcup_{j=1}^l \bar{\Pi}_j,$$

и мера которых равны

$$m(\bar{\Pi}_j) \geq m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2l} \Rightarrow m'(\bar{A}) = \sum_{j=1}^l m(\bar{\Pi}_j) \geq \sum_{j=1}^l m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда мы приходим к неравенству (3.10). \square

Шаг 2. Теперь заметим, что для всякого элементарного множества A_n найдётся такое открытое элементарное множество \tilde{A}_n , т.е. составленное из открытых прямоугольников (прямоугольники вида $(a, b) \otimes (c, d)$), что

$$A_n \subset \tilde{A}_n \quad \text{и} \quad m'(\tilde{A}_n) \leq m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \quad (3.11)$$

\square Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем открытый прямоугольник $\tilde{\Pi}$, «близкий» к прямоугольнику Π следующим образом:

$$\Pi_l = [a, b] \otimes [c, d] \Rightarrow \tilde{\Pi}_l = (a - \delta, b + \delta) \otimes (c - \delta, d + \delta),$$

причём $\delta > 0$ выберем из условия

$$\begin{aligned} m(\tilde{\Pi}_l) &= m(\Pi_l) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (b - a + 2\delta)(d - c + 2\delta) = (b - a)(d - c) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$4\delta^2 + (d - c + b - a)2\delta = \frac{\varepsilon}{m2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = -(d - c + b - a) + \left[(d - c + b - a)^2 + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}m} \right]^{1/2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\tilde{A}_n = \bigcup_{l=1}^m \tilde{\Pi}_l$$

удовлетворяет условию (3.11). \square

Шаг 3. Ясно, что

$$\bar{A} \subset A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \tilde{A}_n. \quad (3.12)$$

Но \bar{A} — это замкнутое и ограниченное множество из \mathbb{R}^2 , т.е. так называемый *компакт*.

Справедливо следующее утверждение из вещественного анализа, подробное доказательство которого будет проведено позже при изучении метрических пространств в лекции 4:

Лемма 1. Из любого произвольного покрытия компакта \bar{A} открытыми прямоугольниками \tilde{A}_n

$$\bar{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \tilde{A}_n$$

можно выделить конечную подсистему

$$\left\{ \tilde{A}_{n_i} \right\}_{i=1}^s \quad \text{такую, что} \quad \bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^s \tilde{A}_{n_i}.$$

Используя свойство монотонности меры элементарных множеств, можно доказать, что имеет место неравенство

$$m'(\bar{A}) \leq \sum_{i=1}^s m'(\tilde{A}_{n_i}). \quad (3.13)$$

Теперь из неравенств (3.10), (3.11) и (3.13) вытекает цепочка ¹⁾

$$m'(A) \leq m'(\bar{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^s m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \varepsilon. \quad (3.14)$$

¹⁾ Без промежуточного построения множеств $\{\tilde{A}_n\}$ и \bar{A} мы обойтись не можем.

Поскольку такое рассуждение может быть проведено для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$, мы приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. Мера m' , заданная на элементарных множествах, является σ -аддитивной:

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n), \quad (3.15)$$

если A, A_n ($n=1,2,\dots$) — элементарные множества и

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \cap A_{n_2} = \emptyset \quad \text{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

□ Очевидно, нужно доказать лишь неравенство, обратное (3.9). Используем монотонность меры элементарных множеств

$$\sum_{n=1}^N m'(A_n) = m' \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) \leq m'(A)$$

и предельный переход в неравенстве. \square

§ 4. Внешняя мера множеств

Определение 5. Внешней мерой μ^* множества A называется число

$$\mu^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_k} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_k), \quad (4.1)$$

где $\{\Pi_k\}$ — произвольная конечная или счётная система прямоугольников (возможно, пересекающихся), покрывающая A .

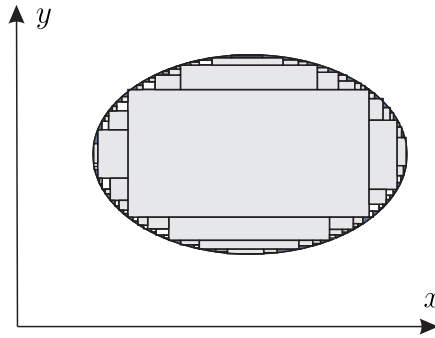


Рис. 6. Покрытие множества прямоугольниками.

З а м е ч а н и е 4. Пока мы рассматриваем лишь случай

$$A \subset \Pi \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1] \times [0, 1],$$

имеем $m(\Pi) = 1$ и из равенства (4.1) приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \leq m(\Pi) = 1,$$

т. е. внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

С л е д с т в и е. Из определения внешней меры сразу же вытекает, что

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

для всякого элементарного множества A .

□ Действительно, поскольку

$$A = \bigcup_{k=1}^n \Pi_k, \quad \Pi_{k_1} \cap \Pi_{k_2} = \emptyset, \quad k_1 \neq k_2 \Rightarrow m'(A) = \sum_{k=1}^n m(\Pi_k).$$

то, с учётом монотонности меры m' элементарных множеств, инфимум достигается на этой системе прямоугольников. \square

Справедливо следующее утверждение о σ -полуаддитивности внешней меры:

Теорема 3. Пусть $A \subset \Pi$, $A_n \subset \Pi$ — произвольные множества и

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n). \quad (4.2)$$

Доказательство.

Заметим, что в силу определения внешней меры μ^* для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая система прямоугольников

$$\{\Pi_{k,n}\}_{k=1}^{+\infty},$$

что

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (4.3)$$

Но тогда

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и, стало быть,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Следствие. Если положить $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$, то сразу получаем монотонность внешней меры: если $A \subset B$ — произвольные множества, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

§ 5. Измеримые по Лебегу множества

Определение 6. Множество A называется измеримым по Лебегу, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество B , что имеет место следующее неравенство:

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon. \quad (5.1)$$

При этом его мерой Лебега $\mu(A)$ называется его внешняя мера: $\mu(A) = \mu^*(A)$.

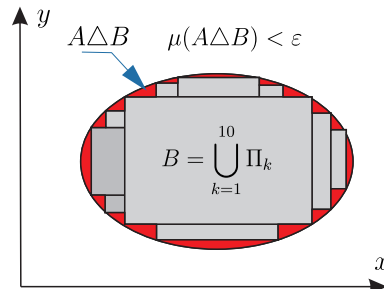


Рис. 7. « ε -приближение» множества A элементарным множеством B .

Замечание 5. Отметим, что из определения 6 сразу же вытекает измеримость по Лебегу множеств A , имеющих нулевую внешнюю меру.

□ Действительно, пусть $\mu^*(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $B = \emptyset$ и

$$\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon. \quad \square$$

Множество \mathfrak{M} измеримых по Лебегу множеств обладает определённым набором свойств, некоторые из которых мы собрали в следующей лемме.

Лемма 2. Сумма, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми по Лебегу множествами.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon$, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее в силу вложения (2.4) имеем

$$(A \cup B) \Delta (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon),$$

откуда в силу монотонности внешней меры

$$\mu^*((A \cup B) \Delta (A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leq \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Шаг 2. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество A_ε , что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

В силу (2.3) имеет место формула

$$(X \setminus A) \Delta (X \setminus A_\varepsilon) = A \Delta A_\varepsilon \Rightarrow \mu^*((X \setminus A) \Delta (X \setminus A_\varepsilon)) = \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Шаг 3. Справедлива следующая формула:

$$A \cap B = (A \cup B) \setminus (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Следовательно, из пунктов 1 и 2 вытекает, что если $A, B \in \mathfrak{M}$, то

$$X \setminus A, X \setminus B, A \cup B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}.$$

Шаг 4. Последнее утверждение следует из пунктов 1–3 и следующей формулы:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать σ -аддитивность меры Лебега μ на множестве \mathfrak{M} . Сначала докажем её *конечную* аддитивность.

Теорема 4. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^N A_n,$$

где $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$, причём $A, A_n \in \mathfrak{M}$, тогда

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n).$$

Доказательство.

Лемма 3. Для любых множеств A и B имеет место следующее неравенство:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B). \quad (5.2)$$

□ Действительно, имеют место вложения

$$A \subset B \cup (A \Delta B), \quad B \subset A \cup (A \Delta B),$$

из которых в силу доказанной полуаддитивности внешней меры μ^* имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\leq \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B), & \mu^*(B) &\leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B). \\ |\mu^*(A) - \mu^*(B)| &\leq \mu^*(A \Delta B). \quad \square\end{aligned}$$

Очевидно, что рассматриваемую теорему достаточно доказать для случая двух измеримых по Лебегу множеств A_1 и A_2 .

Поскольку $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2 , что

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon. \quad (5.3)$$

Введём следующие обозначения:

$$A := A_1 \cup A_2, \quad B := B_1 \cup B_2. \quad (5.4)$$

Ясно, что как объединение двух измеримых множеств множество A измеримо по Лебегу (лемма 2) и, конечно, множество B является элементарным ¹⁾. Ранее было доказано вложение

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2), \quad (5.5)$$

поскольку множества A_1 и A_2 не пересекаются. Заметим, что на элементарных множествах внешняя мера μ^* и мера m' совпадают. Тогда из (5.3) и (5.5) вытекает следующее соотношение:

$$m'(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < 2\varepsilon. \quad (5.6)$$

Наконец, в силу (5.2) имеют место следующие неравенства:

$$|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| = |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon, \quad (5.7)$$

$$|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| = |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| \leq \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon. \quad (5.8)$$

В частности,

$$m'(B_1) > \mu^*(A_1) - \varepsilon, \quad m'(B_2) > \mu^*(A_2) - \varepsilon. \quad (5.9)$$

С другой стороны, имеет место равенство

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2), \quad (5.10)$$

□ Докажем, что для конечно-аддитивной меры λ имеет место следующее равенство:

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2).$$

¹⁾ Если $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, то возникает вопрос: а будет ли B объединением *непересекающихся* прямоугольников, как того требует определение элементарного множества? Легко сообразить, что да, поскольку объединение пересекающихся прямоугольников может быть разрезано на непересекающиеся прямоугольники.

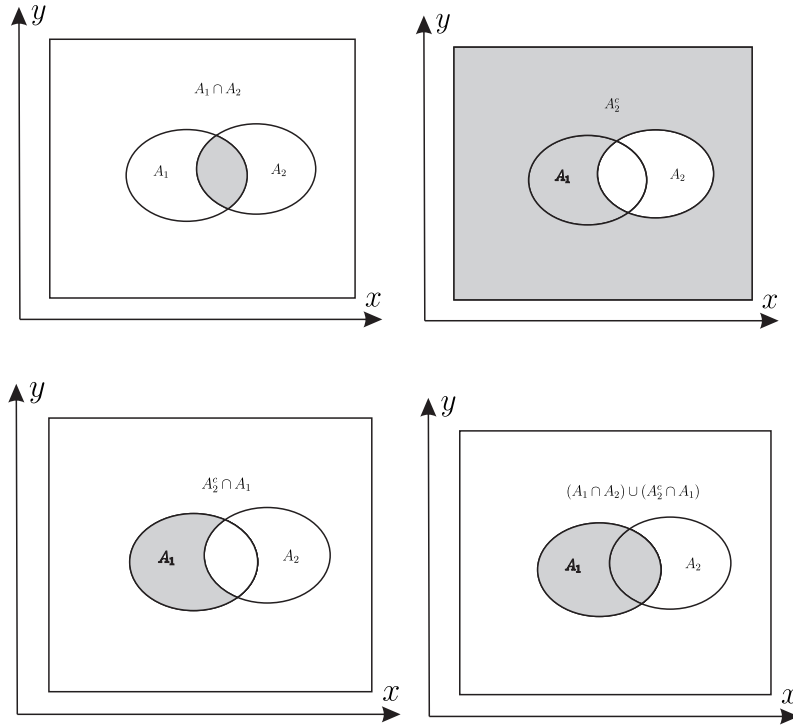


Рис. 8. Построение множества $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2^c \cap A_1)$.

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

где объединяемые множества не пересекаются и для удобства мы ввели обозначение

$$A^c := \Pi \setminus A.$$

Отсюда в силу конечной аддитивности меры λ приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \lambda(A_1) &= \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c), & \lambda(A_2) &= \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2), \\ \lambda(A_1 \cup A_2) &= \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c). \quad \square \end{aligned}$$

Из (5.6)–(5.10) вытекает оценка снизу

$$m'(B) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \quad (5.11)$$

Теперь мы воспользуемся следующим вложением множеств:

$$A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

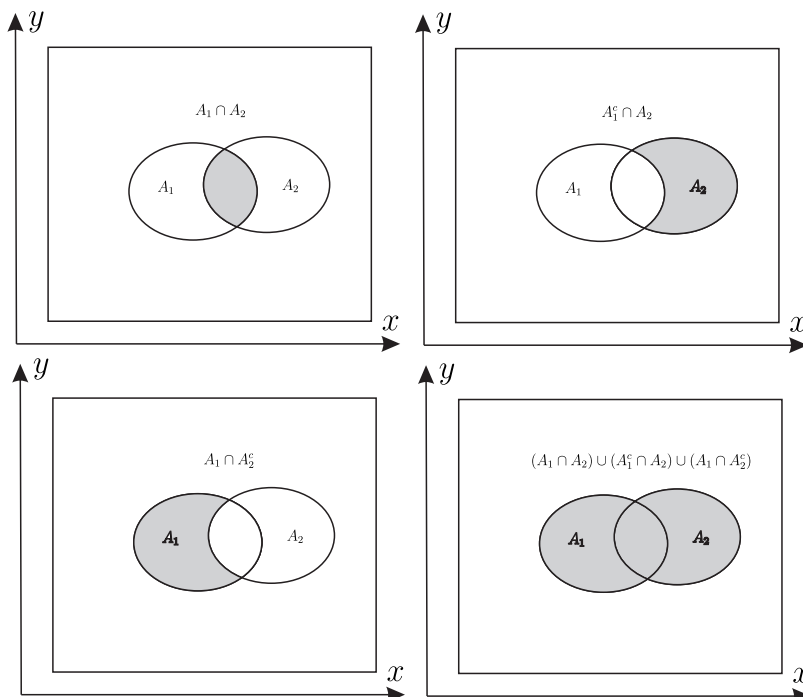


Рис. 9. Построение множества $A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)$.

Из (5.2) и (5.11) вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &\geq \mu^*(B) - \mu^*(A \Delta B) = m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq \\ &\geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon - \mu^*(A \Delta B) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \quad (5.13)$$

Обратное неравенство очевидно (полуаддитивность внешней меры), и поэтому приходим к равенству

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Теорема доказана.

§ 6. Счётная аддитивность измеримых множеств

Сначала докажем, что счётное объединение измеримых множеств измеримо.

Теорема 5. *Счётное объединение и счётное пересечение измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми множествами.*

Доказательство.

Докажем, например, измеримость счётного объединения измеримых множеств. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — это семейство измеримых множеств и пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать множества A_n попарно непересекающимися.

□ Действительно, достаточно рассмотреть следующие множества:

$$A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Очевидно, что $A'_{n_1} \cap A'_{n_2} = \emptyset$ при $n_1 \neq n_2$ и, кроме того,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A'_n. \quad \square$$

В силу предыдущей теоремы имеет место цепочка выражений:

$$\sum_{n=1}^N \mu(A'_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A'_n\right) \leq \mu(\Pi). \quad (6.1)$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A'_n)$$

сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A'_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.2)$$

С другой стороны, измеримо множество

$$C := \bigcup_{n=1}^N A'_n.$$

Стало быть, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое элементарное множество B , что

$$\mu^*(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.3)$$

Заметим, что имеет место вложение

$$A \Delta B \subset (C \Delta B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A'_n. \quad (6.4)$$

Стало быть, из (6.1)–(6.4) приходим к неравенству

$$\mu^*(A \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Наконец, мы можем доказать важный результат о σ -аддитивности меры Лебега.

Теорема 6. Пусть $\{A_n\}$ — это счётная система измеримых по Лебегу и попарно непересекающихся множеств, тогда

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \quad \text{где } A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \quad (6.5)$$

Доказательство.

Действительно,

$$\bigcup_{n=1}^N A_n \subset A$$

и, значит,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \mu(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

Обратное неравенство непосредственно следует из уже доказанной σ -полуаддитивности внешней меры.

Теорема доказана.