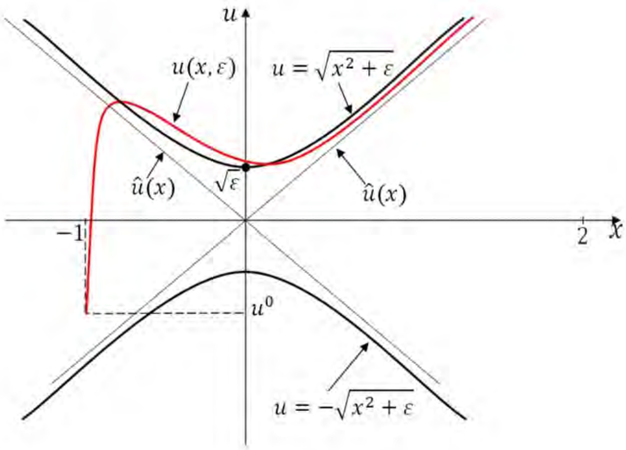
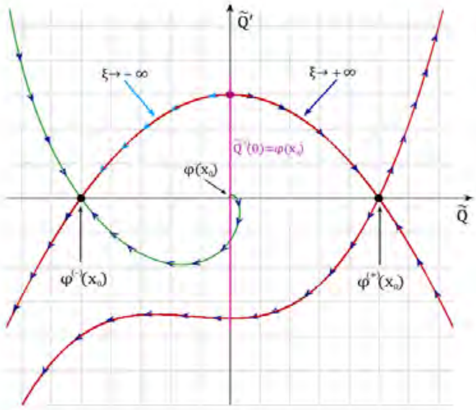
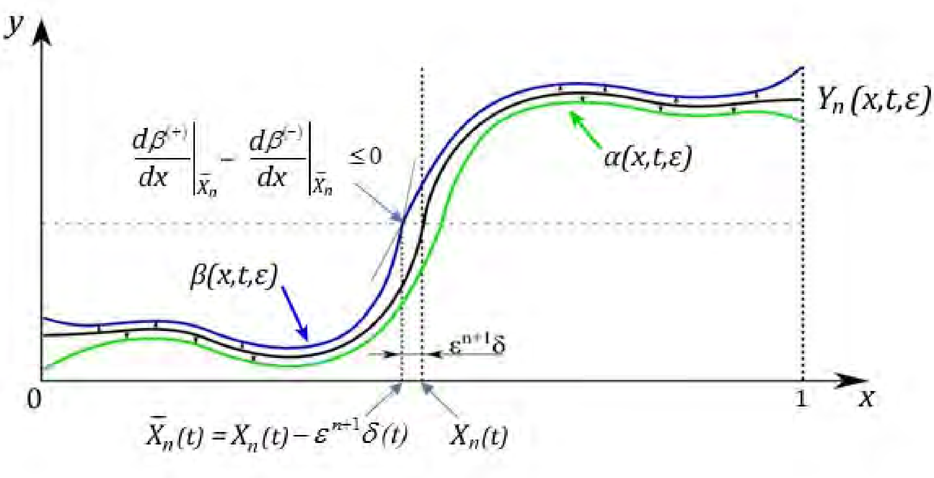
Введение в теорию сингулярных возмущений

В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов,
В.Т. Волков, Н.Т. Левашова, Е.В. Полежаева

Спецкурс для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова







Содержание

Глава 1. Основные понятия **3**

§1. Регулярные и сингулярные возмущения 3

§2. Асимптотическое приближение решения по параметру. Асимптотический ряд 4

§3. Формальная асимптотика 8

Глава 2. Задача Коши для тихоновской системы **10**

§1. Теорема Тихонова 10

§2. Метод А.Б. Васильевой 12

§3. Метод дифференциальных неравенств 19

§4. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в сингулярно возмущенной задаче Коши 24

Глава 3. Задача Коши в случаях пересекающихся и кратных корней вырожденного уравнения **30**

§1. Характерные примеры 31

§2. Задача Коши в случае пересекающихся корней вырожденного уравнения 36

§3. Задача Коши в случае двукратного корня вырожденного уравнения 43

Глава 4. Сингулярно возмущенные краевые задачи **58**

§1. Метод дифференциальных неравенств в двухточечных краевых задачах 58

§2. Сингулярно возмущенная краевая задача с граничными условиями Неймана. 63

§3. Сингулярно возмущенная краевая задача с граничными условиями Дирихле 71

Указания к решению задач **82**

Список литературы **96**

Глава 1. Основные понятия

§1. Регулярные и сингулярные возмущения

Рассмотрим две задачи.

Задача $A_0 : L_0 u = f_0$ – невозмущенная задача (упрощенная модель), L_0 – заданный оператор, f_0– заданная функция, $u = u(x)$, $x \in D$ – искомая функция.

Задача $A_\varepsilon : L_0 u + \varepsilon L_1 u = f_0 + \varepsilon f_1$ – задача с возмущениями оператора (εL_1) и правой части (εf_1) (расширенная модель), ε – малый параметр, в дальнейшем считаем $\varepsilon > 0$.

Пусть $u = u_0(x)$ – решение задачи A_0, $u = u_\varepsilon(x)$ – решение задачи A_ε, $x \in D$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ – вектор-функция, $||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$.

Определение. Задача A_ε называется *регулярно возмущенной*, если

$$\sup_{x \in D} ||u_\varepsilon(x) - u_0(x)|| \to 0 \qquad \text{при} \qquad \varepsilon \to 0\,.$$

В противном случае задача A_ε называется *сингулярно возмущенной*.

<u>Простые примеры.</u>

Пример 1.

$$A_\varepsilon : \quad \frac{du}{dx} = -u + \varepsilon x, \quad x \in [0, 1]; \quad u(0) = 1;$$

$$A_0 : \quad \frac{du}{dx} = -u, \quad x \in [0, 1]; \quad u(0) = 1.$$

Решения задач этих задач:

$$A_\varepsilon : \qquad u_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon)e^{-x} + \varepsilon(x - 1);$$

$$A_0 : \qquad u_0(x) = e^{-x}.$$

Легко видеть, что

$$\sup_{x \in [0,1]} ||u_\varepsilon(x) - u_0(x)|| = \varepsilon \max_{x \in [0,1]} |e^{-x} + x - 1| = \varepsilon e^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, задача A_ε – регулярно возмущенная.

Отметим, что если рассматривать уравнение на промежутке $[0, \frac{1}{\varepsilon}]$, то $\sup\limits_{x \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]} ||u_\varepsilon(x) - u_0(x)|| = O(1)$, и задача становится сингулярно возмущенной.

Пример 2.

$$
\begin{aligned}
A_\varepsilon: &\quad \varepsilon\frac{du}{dx} = -u + x, \qquad x \in [0,1]; \qquad u(0) = 1;\\
A_0: &\quad 0 = -u + x\,. \qquad\qquad\qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

Решения задач этих задач:

$$
\begin{aligned}
A_\varepsilon: &\qquad u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + x - \varepsilon;\\
A_0: &\qquad u_0(x) = x.
\end{aligned}
$$

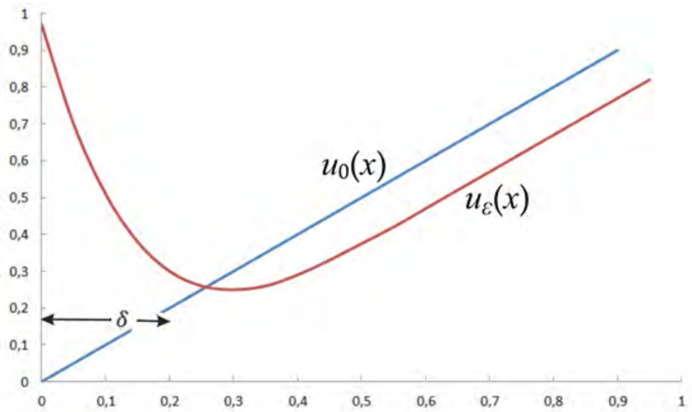


Рис. 1.1

Очевидно, $\sup\limits_{x\in[0,1]} ||u_\varepsilon(x) - u_0(x)|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |(1+\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - \varepsilon| = 1 \not\to 0$ при $\varepsilon \to 0$, следовательно, задача A_ε – сингулярно возмущенная. На рисунке 1.1 видно, что $u_\varepsilon(x)$ близко к $u_0(x)$ вне δ-окрестности точки $x = 0$, а δ-окрестность точки $x = 0$ называется *пограничным слоем.*

Основная проблема – построение приближения к $u_\varepsilon(x)$, пригодного во всей области, т.е. при $0 \le x \le 1$.

Обобщением примера 2 является тихоновская система

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{dz}{dx} = F(x,y,z,\varepsilon), \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y,z,\varepsilon), \qquad x \in [0,X]\,;\\
&z(0,\varepsilon) = z^0, \qquad\qquad\quad y(0,\varepsilon) = y^0\,.
\end{aligned}
$$

Она будет одним из главных объектов исследования в следующих главах.

§2. Асимптотическое приближение решения по параметру. Асимптотический ряд.

Пусть $u_\varepsilon(x)$, $x \in D$ – решение задачи A_ε; D_1 – подобласть области D (в частности, $D_1 = D$), функция $U(x,\varepsilon)$ определена в D_1.

Определение. Функция $U(x,\varepsilon)$ называется *асимптотическим приближением* для $u_\varepsilon(x)$ в D_1, если

$$\sup_{x\in D_1}||u_\varepsilon(x)-U(x,\varepsilon)||\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0\,.$$

Если при этом $\sup\limits_{x\in D_1}||u_\varepsilon(x)-U(x,\varepsilon)||=O(\varepsilon^k)$, то говорят, что функция $U(x,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением для $u_\varepsilon(x)$ в D_1 с точностью порядка ε^k.

Запись $\alpha(\varepsilon)=O(\varepsilon^k)$ означает, что $\exists$ числа $c>0$ и $\varepsilon_0>0$, такие, что при $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ выполняется неравенство $||\alpha(\varepsilon)||\le c\varepsilon^k$.

В примере 1 функция $U=u_0(x)$ – асимптотическое приближение для $u_\varepsilon(x)$ с точностью порядка ε на всем отрезке $D=[0,1]$, а в примере 2 функция $U=u_0(x)$ дает асимптотическое приближение для $u_\varepsilon(x)$ с точностью порядка ε не на всем отрезке $D=[0,1]$, а только на отрезке $D_1=[\delta,1]$, т.е. вне пограничного слоя.

Под *асимптотическим методом* понимается тот или иной способ построения асимптотического приближения $U(x,\varepsilon)$ для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε. Как правило, построение $U(x,\varepsilon)$ проводится с помощью решения более простых задач, чем исходная задача A_ε. Численные и асимптотические методы – это разные методы. Во многих задачах они эффективно дополняют друг друга.

Очень часто для получения асимптотического приближения решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε строится ряд по степеням ε

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x,\varepsilon) \tag{1}$$

(где $u_k(x,\varepsilon)$ – ограниченные функции), такой, что n-ая частичная сумма ряда

$$U_n(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_k(x,\varepsilon), \qquad n=1,2,\dots$$

является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ в области D с точностью порядка ε^{n+1}, т.е. при $\varepsilon\to 0$

$$\sup_{x\in D}||u_\varepsilon(x)-U_n(x,\varepsilon)||=O(\varepsilon^{n+1})\,. \tag{2}$$

Отметим еще раз, что символ $O(\varepsilon^{n+1})$ означает, что существуют положительные числа $c=c(n)$ и $\varepsilon_0=\varepsilon_0(n)$ такие, что при любом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ верно неравенство

$$|O(\varepsilon^{n+1})|\le c\varepsilon^{n+1}\,.$$

Определение. Ряд (1), удовлетворяющий условию (2), называется *асимптотическим рядом* для функции $u_\varepsilon(x)$ (или асимптотическим разложением функции $u_\varepsilon(x)$) при $\varepsilon \to 0$ в области D.

Асимптотический метод – это, как правило, способ (алгоритм) построения асимптотического ряда для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε.

Отметим важный момент: асимптотический ряд (1) может не сходиться к функции $u_\varepsilon(x)$ и даже может быть расходящимся. В самом деле, сходимость ряда (1) к функции $u_\varepsilon(x)$ в области D означает, что

$$\forall x \in D: \qquad ||u_\varepsilon(x) - U_n(x,\varepsilon)|| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,. \tag{3}$$

Асимптотический ряд (1) по определению удовлетворяет условию (2), т.е. для любого n существуют константы $c > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ выполняется неравенство:

$$\sup_{x \in D} ||u_\varepsilon(x) - U_n(x,\varepsilon)|| \le c\varepsilon^{n+1}\,. \tag{4}$$

Хотя сомножитель ε^{n+1} в правой части (4) стремится у нулю при $n \to \infty$ (если $0 < \varepsilon < 1$), тем не менее, из неравенства (4) не следует условие (3), поскольку $c = c(n)$ зависит от n, и эта зависимость может быть такой, что $c(n)\varepsilon^{n+1}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Приведем пример асимптотического ряда вида (1), который расходится. Рассмотрим дифференциальное уравнение $(\varepsilon > 0)$

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} - \frac{1}{x}\,. \tag{5}$$

Будем искать его решение в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x)\,.$$

Подставляя этот ряд в уравнение (5), получаем:

$$\varepsilon(u_0' + \varepsilon u_1' + \dots + \varepsilon^{k-1}u_{k-1}' + \dots) = \\ = -\frac{1}{x^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^k u_k + \dots) - \frac{1}{x}\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, приходим к уравнениям

$$0 = -\frac{u_0}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad u_0' = -\frac{u_1}{x^2}, \quad u_1' = -\frac{u_2}{x^2}, \quad \dots, \quad u_{k-1}' = -\frac{u_k}{x^2}, \quad \dots,$$

откуда последовательно находим коэффициенты искомого ряда:

$$u_0 = -x, \qquad u_1 = x^2, \qquad u_2 = -(2!)x^3, \quad \dots,$$
$$u_k = (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1}, \qquad \dots .$$

Таким образом, мы построили ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (-1)^{k+1}(k!)x^{k+1}\,, \tag{6}$$

который расходится при $\varepsilon > 0$ во всех точках, кроме $x = 0$.

Тем не менее, этот расходящийся ряд, как оказывается, является асимптотическим рядом для некоторого решения уравнения (5) на промежутке $0 \le x \le a$, где a – любое фиксированное положительное число. Убедимся в этом.

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$u = c\,\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big) - \Big(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t}\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon x}\big)\,dt\Big)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big)\,.$$

Возьмем частное решение при $c = 0$:

$$u_\varepsilon(x) = -\Big(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t}\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t}\big)\,dt\Big)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big)\,.$$

Интегрируя несколько раз по частям, получаем:

$$u_\varepsilon(x) = -\Big(\int\limits_0^x t\cdot d\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t}\big)\Big)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big) =$$

$$= -\Big[t\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t}\big)\Big]_{+0}^{x}\cdot\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big) + \Big(\int\limits_0^x \exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t}\big)\,dt\Big)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big) =$$

$$= -x + \Big(\int\limits_0^x \varepsilon t^2\cdot d\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t}\big)\Big)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big) =$$

$$= -x + \varepsilon x^2 - \Big(\int\limits_0^x 2\varepsilon t\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t}\big)\,dt\Big)\exp\big(\frac{1}{\varepsilon x}\big) =$$

$$= -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^2\int\limits_0^x 6t^2\exp\big(-\frac{1}{\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon x}\big)\,dt.$$

Так как $\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon t}+\dfrac{1}{\varepsilon x}\right)\le 1$ при $0<t\le x$, то последнее слагаемое в правой части равенства не превосходит

$$\varepsilon^2\int\limits_0^x 6t^2\,dt = 2\varepsilon^2x^3 \le 2\varepsilon^2a^3 = O(\varepsilon^2).$$

Таким образом,

$$u_\varepsilon(x) = -x+\varepsilon x^2 + O(\varepsilon^2), \qquad 0\le x\le a.$$

Последовательно выполняя интегрирование по частям, приходим к равенству

$$u_\varepsilon(x) = -x+\varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2x^3+\dots+\varepsilon^n(-1)^{n+1}(n!)x^{n+1}+O(\varepsilon^{n+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k(-1)^{k+1}(k!)x^{k+1}+O(\varepsilon^{n+1}).$$

Это равенство означает, что расходящийся ряд (6) удовлетворяет условию (2), и значит, является асимптотическим рядом при $\varepsilon\to 0$ для решения $u_\varepsilon(x)$ уравнения (5) на промежутке $0\le x\le a$.

§3. Формальная асимптотика

Рассмотрим уравнение

$$A_\varepsilon : L_\varepsilon u := L_0u+\varepsilon L_1u-(f_0+\varepsilon f_1) = 0, \qquad x\in D\,.$$

Пусть функция $U(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$L_\varepsilon U = \delta(x,\varepsilon),$$

где

$$\sup_{x\in D}||\delta(x,\varepsilon)||\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0.$$

Функция $\delta(x,\varepsilon)$ называется *невязкой*, а про функцию $U(x,\varepsilon)$ говорят, что она является *асимптотическим решением задачи* A_ε *по невязке.*

Функцию $U(x,\varepsilon)$ называют также *формальной асимптотикой*. Во многих сингулярно возмущенных задачах сначала строят ряд (1), который удовлетворяет условию: его частичная сумма $U_n(x,\varepsilon)$ является асимптотическим решением задачи по невязке, причем невязка $\delta_n(x,\varepsilon) =$

$O(\varepsilon^{n+1})$, а затем доказывают, что существует точное решение $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε, для которого ряд (1) является асимптотическим рядом.

Следует отметить, важный момент: из того, что

$$L_\varepsilon U = \delta(x,\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

не следует, что $U(x,\varepsilon)$ является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε. Приведем простой пример.

Рассмотрим задачу

$$A_\varepsilon: \quad L_\varepsilon u := \varepsilon \frac{du}{dx} - u - \varepsilon^n = 0, \qquad 0 \le x \le a; \qquad u(0,\varepsilon) = 0,$$

точное решение которой $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \cdot e^{\frac{x}{\varepsilon}} - \varepsilon^n$.

Функция $U(x,\varepsilon) = 0$ является асимптотическим решением по невязке (формальной асимптотикой), так как

$$L_\varepsilon U = \varepsilon \frac{dU}{dx} - U - \varepsilon^n = -\varepsilon^n \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\,,$$

причем невязка $\delta = O(\varepsilon^n)$.

Вместе с тем,

$$u_\varepsilon(x) - U(x,\varepsilon) = \varepsilon^n \cdot e^{\frac{x}{\varepsilon}} - \varepsilon^n \quad \to \quad \infty$$

при $\varepsilon \to 0$ при всех $x > 0$, т.е. ни на каком промежутке $0 < x \le a$ функция $U(x,\varepsilon) = 0$ не является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε.

Глава 2. Задача Коши для тихоновской системы

§1. Теорема Тихонова

Рассмотрим тихоновскую систему [1]:

$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = F(x,y,z,\varepsilon), \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y,z,\varepsilon), \qquad 0 \le x \le X\,; \tag{1}$$

$$z(0,\varepsilon) = z^0, \qquad\qquad y(0,\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. В работе А.Н. Тихонова z и y – вектор-функции произвольной размерности. Мы рассмотрим более простой случай, когда z и y – скалярные функции.

Пусть выполнены следующие условия:

Условие 1. F, f – непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области.

Условие 2. Уравнение

$$F(x,y,z,0) = 0 \tag{3}$$

имеет изолированный корень $z = \varphi(x,y)$.

Условие 3. Начальная задача

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,\varphi(x,y),0), \qquad 0 \le x \le X; \qquad y(0) = y^0 \tag{4}$$

имеет решение $y = \bar{y}(x)$.

Система, получающаяся из (1), при $\varepsilon = 0$, называется *вырожденной*; в силу условий (2) и (3) она имеет решение $y = \bar{y}(x)$, $z = \varphi(x,\bar{y}(x)) =: \bar{z}(x)$

Условие 4. Пусть

$$\bar{F}_z(x) := F_z(x,\bar{y}(x),\bar{z}(x),0) < 0, \qquad x \in [0,X]\,.$$

Рассмотрим *присоединенное* (по терминологии А.Н. Тихонова) уравнение

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(0,y^0,\tilde{z},0), \qquad \tau \ge 0. \tag{5}$$

В силу условия 2 уравнение (5) имеет *точку покоя* (т.е. решение, не зависящее от τ) $\tilde{z} = \varphi(0,y^0)$, а в силу условия 4 эта точка покоя является асимптотически устойчивой при $\tau \to \infty$, т.е. если задать для $\tilde{z}(\tau)$ начальное значение при $\tau = 0$, достаточно близкое к точке покоя $\varphi(0, y^0)$, то решение уравнения (5) с этим начальным условием останется близким к $\varphi(0, y^0)$ при $\tau > 0$ и, более того, будет стремиться к $\varphi(0, y^0)$ при $\tau \to \infty$:

$$\lim_{\tau \to \infty} \tilde{z}(\tau) = \varphi(0, y^0). \tag{6}$$

Зададим для $\tilde{z}(\tau)$ начальное условие

$$\tilde{z}(0) = z^0. \tag{7}$$

Заданное число z^0 может быть не близким к точке покоя $\varphi(0, y^0)$. Поэтому, чтобы решение задачи (5), (7) удовлетворяло условию (6), нужно ввести соответствующее требование.

Условие 5. Начальная задача

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(0, y^0, \tilde{z}, 0), \qquad \tau \geq 0; \qquad \tilde{z}(0) = z^0 \tag{8}$$

имеет решение $\tilde{z}(\tau)$, удовлетворяющее условию (6):

$$\lim_{\tau \to \infty} \tilde{z}(\tau) = \varphi(0, y^0)\,.$$

В таком случае говорят, что *начальное значение z^0 принадлежит области влияния точки покоя* $\tilde{z} = \varphi(0, y^0)$ уравнения (5) (см. рис.2.1).

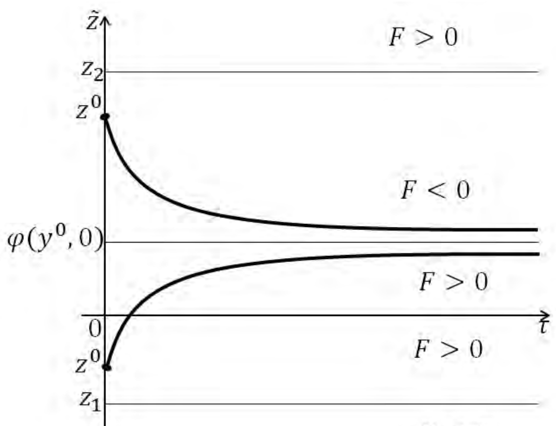


Рис. 2.1

Пусть $F(0, y^0, \tilde{z}, 0) = 0$ при $\tilde{z} = z_1$, $\tilde{z} = \varphi(y^0, 0)$, $\tilde{z} = z_2$, а в промежутках между корнями $F(0, y^0, \tilde{z}, 0)$ имеет знаки, указанные на рисунке 2.1. Тогда областью влияния точки покоя $\varphi(y^0, 0)$ является интервал $z_1 < \tilde{z} < z_2$.

Теорема Тихонова (о предельном переходе).

Если выполнены условия 1–5, то для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$, которое удовлетворяет предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z(x,\varepsilon) = \bar{z}(x), \qquad 0 < x \le X\,;$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y(x,\varepsilon) = \bar{y}(x), \qquad 0 \le x \le X\,.$$

Доказательство теоремы Тихонова приведено в [2]. Геометрическая иллюстрация представлена на рис. 2.2.

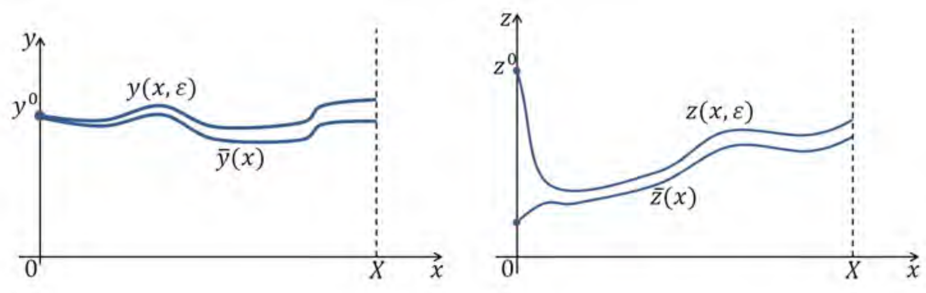


Рис. 2.2

§2. Метод А.Б. Васильевой

Сохраним условия 2 - 5 теоремы Тихонова, а условие 1 усилим так:

$1'$. Функции F и f являются достаточно гладкими в некоторой области.

Асимптотическое разложение задачи (1), (2) будем строить в виде

$$z = \bar{z}(x,\varepsilon) + \Pi z(\tau,\varepsilon), \qquad y = \bar{y}(x,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon)\,, \tag{9}$$

где

$$\bar{z}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{z}_i(x), \qquad \bar{y}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{y}_i(x) \tag{10}$$

– *регулярная часть асимптотики,*

$$\Pi z(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i z(\tau), \qquad \Pi y(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i y(\tau) \tag{11}$$

– *погранслойная часть асимптотики,* $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$ – *погранслойная переменная.*

Для нахождения коэффициентов рядов (9) (10) подставим выражения для z и y в систему (1) и представим правые части уравнений в виде

$$F\big(x, \bar{y} + \Pi y, \bar{z} + \Pi z, \varepsilon\big) = \bar{F} + \Pi F, \qquad f\big(x, \bar{y} + \Pi y, \bar{z} + \Pi z, \varepsilon\big) = \bar{f} + \Pi f\,,$$

где

$$\begin{aligned} &\bar{F} = F\big(x, \bar{y}(x,\varepsilon), \bar{z}(x,\varepsilon)\big)\,, \\ &\Pi F = F\big(\varepsilon\tau,\ \bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon),\ \bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi z(\tau,\varepsilon),\ \varepsilon\big) - \\ &\qquad\qquad - F\big(\varepsilon\tau,\ \bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\ \bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\ \varepsilon\big)\,, \end{aligned}$$

а функции $\bar{f}$ и Πf имеют выражения, аналогичные $\bar{F}$ и ΠF.

Система (1) запишется в виде:

$$\varepsilon\frac{d\bar{z}}{dx} + \frac{d\Pi z}{d\tau} = \bar{F} + \Pi F, \qquad \frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\Pi y}{d\tau} = \bar{f} + \Pi f\,.$$

Приравняем отдельно в этих уравнения члены, зависящие от x и от τ. Получим две системы:

$$\varepsilon\frac{d\bar{z}}{dx} = \bar{F}, \qquad \frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{f}, \qquad 0 \le x \le X \tag{12}$$

и

$$\frac{d\Pi z}{d\tau} = \Pi F, \qquad \frac{d\Pi y}{d\tau} = \varepsilon\Pi f, \qquad \tau \ge 0\,. \tag{13}$$

Подставив сюда выражения (10) и (11) для рядов $\bar{z}, \bar{y}$ и $\Pi y, \Pi z$ и, разложив правые части уравнений в ряды по степеням ε, будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях каждого уравнения. В нулевом приближении из (12) получим систему:

$$0 = F\big(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0\big), \qquad \frac{d\bar{y}_0(x)}{dx} = f\big(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0\big), \tag{14}$$

а из (13) – систему

$$\begin{aligned} &\frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = 0\,, \\ &\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F\big(0,\ \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y,\ \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z,\ 0\big) - F\big(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0\big)\,, \end{aligned} \tag{15}$$

Выражения (9) для z и y подставим также в начальные условия (2):

$$\bar{z}(0,\varepsilon) + \Pi z(0,\varepsilon) = z^0, \qquad \bar{y}(0,\varepsilon) + \Pi y(0,\varepsilon) = y^0. \tag{16}$$

Снова заменим слагаемые в левых частях этих равенств рядами (10), (11) и будем приравнивать последовательно коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε в обеих частях равенств. В нулевом приближении получим:

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0(0) = z^0, \qquad \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0 . \tag{17}$$

Таким образом, для четырех искомых функций нулевого приближения $\bar{z}_0(x)$, $\bar{y}_0(x)$, $\Pi_0 z(\tau)$, $\Pi_0 y(\tau)$ мы имеем четыре уравнения (14), (15), причем три уравнения из этих четырех – дифференциальные, а одно – конечное, и два равенства (17), связывающие начальные значения искомых функций.

Чтобы устранить несоответствие между числом дифференциальных уравнений и числом начальных условий, добавим условие

$$\Pi_0 y(\infty) = 0 . \tag{18}$$

Теперь из систем уравнений (14), (15) и условий (17), (18) можно последовательно определить все члены асимптотики нулевого порядка. Из второго уравнения (15) с условием (18) находим

$$\Pi_0 y(\tau) = 0, \qquad \tau \geq 0 .$$

В частности, $\Pi_0 y(0) = 0$, поэтому из второго равенства (17) получаем начальное условие для функции $\bar{y}_0(x)$:

$$\bar{y}_0(0) = y^0 . \tag{19}$$

В силу условий 2 и 3 система (14), (19) имеет решение, совпадающее с решением $\bar{z}(x)$, $\bar{y}(x)$ вырожденной системы:

$$\bar{y}_0(x) = \bar{y}(x), \qquad \bar{z}_0(x) = \varphi\big(x, \bar{y}(x)\big) .$$

Так как функции $\Pi_0 y(\tau)$, $\bar{y}_0(x)$, $\bar{z}_0(x)$ уже определены, а в силу первого уравнения (14) $F\big(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0), 0\big) = 0$, то из первого уравнения (15) и первого равенства (17) получаем начальную задачу для $\Pi_0 z(\tau)$:

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F\big(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, 0\big), \quad \tau \geq 0 ; \qquad \Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) .$$

Замена переменной $\Pi_0 z = \tilde{z} - \bar{z}_0(0)$ сводит эту задачу к задаче (8), откуда в силу условия 5 теоремы следует, что решение задачи существует, а в силу неравенства $\bar{F}_z(0) < 0$ (см. усл. 4) имеет экпоненциальную оценку

$$\big|\Pi_0 z(\tau)\big| \leq c\, e^{-\varkappa\tau}, \qquad \tau \geq 0 . \tag{20}$$

Буквами c и $\varkappa$ здесь и в дальнейшем обозначаются подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Докажем оценку (20). Запишем уравнение (15) для $\Pi_0 z(\tau)$ в виде

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F_z\big(0,\, \bar{y}_0(0),\, \bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau),\, 0\big) \cdot \Pi_0 z\,, \qquad \tau \geq 0\,,$$

где $0 < \theta < 1$.

Так как $\tilde{z}(\tau) = \Pi_0 z(\tau) + \bar{z}_0(0) \to \varphi(y^0, 0) = \bar{z}_0(0)$ при $\tau \to \infty$, то $\Pi_0 z(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, а поскольку $\bar{F}_z(0) := F_z\big(0,\, \bar{y}_0(0),\, \bar{z}_0(0),\, 0\big) < 0$ в силу условия 4, то $\bar{F}_z(0) = -2\varkappa < 0$, и существует $\delta > 0$, такое, что

$$F_z\big(0, \bar{y}_0(0), \bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau), 0\big) \;=:\; F_z(\tau) \;<\; -\varkappa\,,$$

если $|\Pi_0 z(\tau)| \leq \delta$.

Поскольку $\Pi_0 z(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, то для указанного δ найдется $\tau_0 > 0$, такое, что $|\Pi_0 z(\tau)| \leq \delta$ при $\tau \geq \tau_0$, и, значит, $F_z(\tau) < -\varkappa$ при $\tau \geq \tau_0$.

Интегрируя уравнение для $\Pi_0 z(\tau)$ при $\tau \geq \tau_0$, получаем

$$\Pi_0 z(\tau) = \Pi_0 z(\tau_0) \cdot \exp\Big(\int\limits_{\tau_0}^{\tau} F_z(s)\, ds\Big), \qquad \tau \geq \tau_0\,,$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned} |\Pi_0 z(\tau)| \leq \delta e^{-\varkappa(\tau-\tau_0)} = \big[\delta e^{\varkappa\tau_0}\big] \cdot e^{-\varkappa\tau} \leq \\ \leq \big[|z^0 - \bar{z}_0(0)| e^{\varkappa\tau_0}\big] \cdot e^{-\varkappa\tau}, \qquad \tau \geq \tau_0\,. \end{aligned} \tag{20$'$}$$

При $0 \leq \tau \leq \tau_0$ имеем:

$$\big|\Pi_0 z(\tau)\big| \leq \big|z^0 - \bar{z}_0(0)\big| \leq \big[|z^0 - \bar{z}_0(0)| e^{\varkappa\tau_0}\big] \cdot e^{-\varkappa\tau}, \qquad 0 \leq \tau \leq \tau_0\,. \tag{20$''$}$$

Обозначив число $|z^0 - \bar{z}_0(0)| \cdot e^{\varkappa\tau_0}$ буквой c, из (20$'$) и (20$''$) получаем оценку (20):

$$\big|\Pi_0 z(\tau)\big| \leq c\, e^{-\varkappa\tau}, \qquad \tau \geq 0.$$

Таким образом, члены нулевого порядка рядов (10) и (11) определены.

Пусть определены все члены рядов (10) и (11) с номерами $0, 1, ..., k{-}1$. Тогда для членов асимптотики k–го порядка, т.е. для коэффициентов при ε^k рядов (10) и (11), из систем (12) и (13) получаются уравнения

$$\frac{d\bar{z}_{k-1}}{dx} = \bar{F}_y(x)\bar{y}_k(x) + \bar{F}_z(x)\bar{z}_k(x) + F_k(z)\,, \tag{21}$$

$$\frac{d\bar{y}_k}{dx} = \bar{f}_y(x)\bar{y}_k(x) + \bar{f}_z(x)\bar{z}_k(x) + f_k(x)\,, \tag{22}$$

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau} = F_y(\tau)\Pi_k y + F_z(\tau)\Pi_k z + g_k(\tau)\,, \tag{23}$$

$$\frac{d\Pi_k y}{d\tau} = \Pi_{k-1} f(\tau)\,, \tag{24}$$

где $\bar{F}_y(x) := F_y\big(x, \bar{y}_0(x), \bar{z}_0(x), 0\big)$ и аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{F}_z(x)$, $\bar{f}_y(x)$, $\bar{f}_z(x)$.

Функции $F_k(x)$ и $f_k(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{y}_i(x)$ и $\bar{z}_i(x)$ с номерами $i \le k-1$, $F_y(\tau) := F_y\big(0,\, y^0,\, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\, 0\big)$, $F_z(\tau) := F_z\big(0,\, y^0,\, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\, 0\big)$, а функции $g_k(\tau)$ и $\Pi_{k-1} f(\tau)$ рекуррентно выражаются через $\Pi_i y(\tau)$, $\Pi_i z(\tau)$ с номерами $i \le k-1$.

Из равенств (16) в k–ом приближении получаем:

$$\bar{z}_k(0) + \Pi_k z(0) = 0, \qquad \bar{y}_k(0) + \Pi_k y(0) = 0. \tag{25}$$

Как и в случае нулевого приближения добавим дополнительное условие

$$\Pi_k y(\infty) = 0. \tag{26}$$

Теперь можно последовательно определить функции k-го приближения в таком же порядке, как это делалось в нулевом приближении. Нетрудно доказать, что если пограничные функции $\Pi_i y(\tau)$ и $\Pi_i z(\tau)$ с номерами $i \le k-1$ имеют экспоненциальные оценки типа (20), то функции $g_k(\tau)$ и $\Pi_{k-1} f(\tau)$ имеют такие же оценки.

Из уравнения (24) с условием (26) находим

$$\Pi_k y(\tau) = \int\limits_{\infty}^{\tau} \Pi_{k-1} f(s)\, ds, \tag{27}$$

и так как $\Pi_{k-1} f(\tau)$ имеет оценку типа (20), то такую же оценку имеет, очевидно, $\Pi_k y(\tau)$.

Обратимся теперь к системе (21),(22). В силу условия 4 $\bar{F}_z(x) \ne 0$, поэтому из уравнения (21) можно выразить $\bar{z}_k$ (через $\bar{y}_k$ и x) и подставить в уравнение (22). Получим линейное дифференциальное уравнение относительно искомой функции $\bar{y}_k(x)$

$$\frac{d\bar{y}_k}{dx} = A(x)\bar{y}_k + h_k(x), \qquad x \in [0, X]\,, \tag{28}$$

где $A(x) = \bar{f}_y(x) - \bar{f}_z(x)\bar{F}_z^{-1}(x)\bar{F}_y(x)$, $h_k(x)$ – известная функция.

Начальное условие для $\bar{y}_k(x)$ следует из второго равенства (25), поскольку $\Pi_k y(0)$ уже определено:

$$\bar{y}_k(0) = -\Pi_k y(0)\,. \tag{29}$$

В силу линейности уравнения(28) начальная задача (28), (29) имеет единственное решение, и тем самым функции $\bar{y}_k(x)$ и $\bar{z}_k(x)$ определены. Решение задачи (28), (29) можно записать в виде

$$\bar{y}_k(x) = -H(x)\Pi_k y(0) + H(x)\int\limits_0^x H^{-1}(s)h_k(s)\,ds\,,$$

где $H(x) = \exp\Big(\int\limits_0^x A(s)\,ds\Big)$.

Подставляя найденное выражение (27) для $\Pi_k y(\tau)$ в правую часть (23), приходим к линейному дифференциальному уравнению относительно искомой функции $\Pi_k z(\tau)$:

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau} = F_z(\tau)\Pi_k z + \widetilde{g}_k(\tau), \qquad \tau \geq 0\,, \tag{30}$$

где $\widetilde{g}_k(\tau)$ – известная функция, имеющая экспоненциальную оценку типа (20). Начальное условие для $\Pi_k z(\tau)$ следует из первого равенства (25):

$$\Pi_k z(0) = -\bar{z}_k(0)\,. \tag{31}$$

Решение задачи (30), (31) можно записать в виде

$$\Pi_k z(\tau) = -\Phi(\tau)\bar{z}_k(0) + \Phi(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi^{-1}(s)\widetilde{g}_k(s)\,ds\,, \tag{32}$$

где $\Phi(\tau) = \exp\Big(\int\limits_0^\tau F_z(s)\,ds\Big)$.

Так как

$$F_z(\tau) = F_z\big(0, y^0, \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), 0\big) = F_z\big(0, y^0, \bar{z}_0(0), 0\big) + F^*_{zz}\cdot\Pi_0 z(\tau)\,,$$

а $F_z\big(0, y^0, \bar{z}_0(0), 0\big) = \bar{F}_z(0) < -\varkappa$ в силу условия 4, то

$$\Phi(\tau) \leq \exp\Big(\int\limits_0^\tau \big(-\varkappa + c_1|\Pi_0 z(s)|\big)\,ds\Big) \leq$$

$$\leq e^{-\varkappa\tau}\cdot\exp\left(c_2\int\limits_0^\tau e^{-\varkappa s}ds\right)\leq e^{-\varkappa\tau}\cdot e^{\frac{c_2}{\varkappa}}=c\,e^{-\varkappa\tau},\qquad \tau\geq 0\,, \tag{33$'$}$$

и аналогично получается оценка

$$\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\leq ce^{-\varkappa(\tau-s)},\qquad 0\leq s\leq\tau\,. \tag{33$''$}$$

Используя представление (32) и оценки (33), нетрудно доказать, что $\Pi_k z(\tau)$ имеет экспоненциальную оценку типа (20).

Итак, пользуясь описанным алгоритмом А.Б. Васильевой, можно последовательно определить члены рядов (10) и (11) до любого номера n включительно. При этом все пограничные функции имеют экспоненциальные оценки.

Введем обозначения для частичных сумм n-го порядка построенных рядов (9):

$$Z_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^n\varepsilon^i\Big(\bar z_i(x)+\Pi_i z(\frac{x}{\varepsilon})\Big)$$

$$Y_n(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^n\varepsilon^i\Big(\bar y_i(x)+\Pi_i y(\frac{x}{\varepsilon})\Big)$$

Теорема Васильевой. *Если выполнены условия 1 ′, 2–5, то для решения* $z(x,\varepsilon)$, $y(x,\varepsilon)$ *задачи (1), (2) построенные ряды (9) являются асимптотическими при* $\varepsilon\to 0$, *т.е. для любого* n *справедливы асимптотические равенства*:

$$z(x,\varepsilon)=Z_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\quad y(x,\varepsilon)=Y_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\quad x\in[0,X]\,.$$

Другими словами, для каждого n найдутся положительные числа ε_n, c_n, такие, что для $0<\varepsilon<\varepsilon_n$ и $0\leq x\leq X$ выполняются неравенства:

$$\max_{[0,X]}|z(x,\varepsilon)-Z_n(x,\varepsilon)|\leq c_n\varepsilon^{n+1},\qquad \max_{[0,X]}|y(x,\varepsilon)-Y_n(x,\varepsilon)|\leq c_n\varepsilon^{n+1}\,.$$

Подробное доказательство теоремы Васильевой приведено в [2].

Задачи.

Используя метод А.Б. Васильевой, постройте асимптотическое приближение с точностью порядка $O(\varepsilon^2)$ для решения задачи:

Задача 2.2.1
$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = z^2 - y^2, \qquad \frac{dy}{dx} = z, \qquad 0 \le x \le a,$$
$$z(0,\varepsilon) = 0, \qquad y(0,\varepsilon) = 1;$$

Задача 2.2.2
$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = z^2 - y^2, \qquad \frac{dy}{dx} = z, \qquad 0 \le x \le a,$$
$$z(0,\varepsilon) = 0, \qquad y(0,\varepsilon) = -1;$$

Задача 2.2.3
$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = z^2 - y^2, \qquad \frac{dy}{dx} = y + z, \qquad 0 \le x \le a,$$
$$z(0,\varepsilon) = 0, \qquad y(0,\varepsilon) = 1.$$

§3. Метод дифференциальных неравенств

2.3.1 Теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши (u – скалярная функция)

$$\frac{du}{dx} = f(x,u), \quad 0 \le x \le a; \qquad u(0) = u^0 \tag{1}$$

и поставим вопрос о существовании и единственности ее решения.

Классическая теорема, входящая в учебники по дифференциальным уравнениям (см. например, [3]), гарантирует существование и единственность решения в достаточно малой окрестности начальной точки.

Рассмотрим *пример*:

$$\frac{du}{dx} = ku^2, \quad 0 \le x \le a; \quad k = const > 0; \qquad u(0) = 1.$$

Решение этой задачи
$$u(x) = \frac{1}{1-kx}$$
существует только на промежутке $0 \le x < 1/k$, и $\lim\limits_{x\to 1/k} u(x) = \infty$. Следовательно, при $a > 1/k$ решение существует не на всем заданном отрезке $0 \le x \le a$ (рис. 2.3).

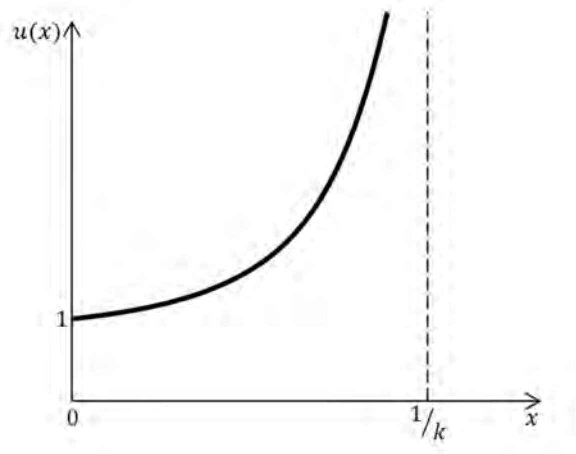


Рис. 2.3

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x,u)$ *определена и непрерывна в области* $D = \{(x,y) : 0 \le x \le a, \ |u - u^0| \le b\}$ (следовательно, существует $\max\limits_D |f(x,u)| = M$).

Пусть $f(x,u)$ *удовлетворяет в* D *условию Липшица по переменной* u, *т.е.*

$$\bigl|f(x,u_1) - f(x,u_2)\bigr| \le N \cdot \bigl|u_1 - u_2\bigr|,$$

где $N > 0$ *– некоторое число.*

Тогда на отрезке $l = \{0 \le x \le \min\bigl(a, \dfrac{b}{M}\bigr)\}$ *задача (1) имеет единственное решение.*

При большом M отрезок l мал, в частности, в случае сингулярно возмущенного уравнения $\varepsilon \dfrac{du}{dx} = f(x,u)$ длина отрезка l является величиной порядка $O(\varepsilon)$.

Приведем еще одну теорему, доказательство которой имеется в учебнике [4].

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x,u)$ *определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* u *в полосе* $P = \{(x,u) : 0 \le x \le a, u \in R\}$. *Тогда задача (1) имеет единственное решение.*

Эта теорема уже не является локальной, однако класс функций $f(x,u)$, удовлетворяющих условию теоремы, весьма узок. Например, функция $f(x,u)$, такая что $f(x,u) = O(u^\alpha)$ при $u \to \infty$, $\alpha > 1$, не удовлетворяет условию теоремы 2.

2.3.2. Метод дифференциальных неравенств Чаплыгина.

Во многих случаях эффективным методом исследования задачи (1) является *метод дифференциальных неравенств Чаплыгина* [5] (другое название – *метод нижних и верхних решений*).

Запишем уравнение (1) в виде

$$Lu := \frac{du}{dx} - f(x,u) = 0\,.$$

Определение 1. Функция $\underline{U}(x) \in C^1(0,a] \cap C[0,a]$ называется *нижним решением* задачи (1), если она удовлетворяет условиям

$$L\underline{U} = \frac{d\underline{U}}{dx}(x) - f(x,\underline{U}(x)) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < x \le a, \qquad \underline{U}(0) < u^0. \tag{2}$$

Определение 2. Функция $\overline{U}(x) \in C^1(0,a] \cap C[0,a]$ называется *верхним решением* задачи (1), если она удовлетворяет условиям

$$L\overline{U} = \frac{d\overline{U}}{dx}(x) - f(x,\overline{U}(x)) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x \le a, \qquad \overline{U}(0) > u^0. \tag{3}$$

Примером функции из класса $C^1(0,a] \cap C[0,a]$ может служить

$$u(x) = \sqrt{x}, \qquad 0 \le x \le a.$$

Эта функция является решением задачи

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2u}, \quad 0 < x \le a, \qquad u(0) = 0.$$

Отметим попутно, что решение этой задачи не единственно, и имеется другое решение $u_2(x) = -\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le a$.

Докажем, что

$$\underline{U}(x) < \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x \le a\,. \tag{4}$$

При $x = 0$: $\underline{U}(0) < \overline{U}(0)$, так как $\underline{U}(0) < u^0$, а $\overline{U}(0) > u^0$ (см. (2), (3)). Допустим, что существует $x_0 \in (0,a]$ такое, что (см. рис. 2.4)

$$\underline{U}(x) < \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad 0 \le x < x_0\,, \qquad \underline{U}(x_0) = \overline{U}(x_0)\,.$$

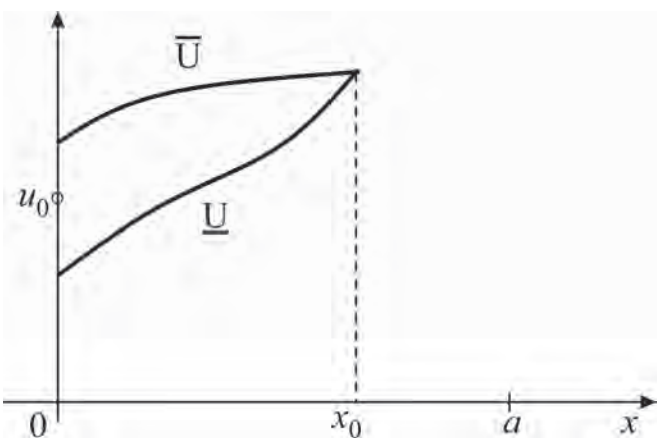


Рис. 2.4

Тогда
$$\frac{d\underline{U}}{dx}(x_0) \geq \frac{d\overline{U}}{dx}(x_0)\,,$$
а так как
$$\frac{d\overline{U}}{dx}(x_0) > f(x_0, \overline{U}(x_0)) = f(x_0, \underline{U}(x_0)),$$
то $\quad \dfrac{d\underline{U}}{dx}(x_0) > f(x_0, \underline{U}(x_0))$, т.е.
$$L\overline{U}(x_0) = \frac{d\overline{U}(x_0)}{dx} - f(x_0, \overline{U}(x_0)) > 0,$$
что противоречит неравенству (2). Поэтому $\underline{U}(x) < \overline{U}(x)$ при $0 \leq x \leq a$.

Теорема 3 (Чаплыгина). *Пусть существуют нижнее* $\underline{U}(x)$ *и верхнее* $\overline{U}(x)$ *решения задачи (1), и пусть функция* $f(x,u)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* u *в области* $D = \{(x,u) : 0 \leq x \leq a, \quad \underline{U}(x) < u < \overline{U}(x)\}$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение $u(x)$, *причем*
$$\underline{U}(x) < u(x) < \overline{U}(x), \qquad 0 \leq x \leq a\,.$$

Доказательство. Продолжим функцию $f(x,u)$ на всю полосу $P = \{(x,u) : 0 \leq x \leq a,\ u \in R\}$ следующим образом: введем функцию
$$g(x,u) = \begin{cases} f(x, \underline{U}(x)) + (u - \underline{U}(x)), & 0 \leq x \leq a, \quad u \leq \underline{U}(x) \\ f(x,u), \qquad (x,u) \in D \\ f(x, \overline{U}(x)) + (u - \overline{U}(x)), & 0 \leq x \leq a, \quad u \geq \overline{U}(x)\,. \end{cases}$$
Функция $g(x,u)$ непрерывна в полосе P и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $N_1 = \max(N, 1)$, где N – постоянная Липшица в области D. Следовательно, согласно теореме 2, задача Коши
$$\frac{du}{dx} = g(x,u), \quad 0 \leq x \leq a; \qquad u(0) = u^0$$
имеет единственное решение $u(x)$.

Аналогично тому, как было доказано неравенство (4), можно доказать, что $u(x)$ удовлетворяет неравенствам
$$\underline{U}(x) < u(x) < \overline{U}(x)), \qquad 0 \leq x \leq a\,.$$

Но для значений u из интервала $\big(\underline{U}(x), \overline{U}(x)\big)$ функция $g(x,u) = f(x,u)$, поэтому функция $u(x)$ является решением задачи (1). Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Пусть в задаче (1) $u = (u_1, \ldots, u_n)$ – вектор-функция,

$$u_0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0), \qquad f(x,u) = \big(f_1(x, u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_n(x, u_1, \ldots, u_n)\big)\,.$$

Тогда нижнее $\underline{U}(x)$ и верхнее $\overline{U}(x)$ решения задачи (1) определяются как вектор-функции $\underline{U}(x) = (\underline{U}_1(x), \ldots, \underline{U}_n(x))$ и $\overline{U}(x) = (\overline{U}_1(x), \ldots, \overline{U}_n(x))$, удовлетворяющие при $i = 1, \ldots, n$ неравенствам

$$\underline{U}_i(x) < \overline{U}_i(x) \quad \text{(упорядоченность нижнего и верхнего решений)}\ ;$$

$$\frac{d\underline{U}_i(x)}{dx} < f_i\big(x, u_1, \ldots, u_{i-1}, \underline{U}_i(x), u_{i+1}, \ldots, u_n\big) \quad \text{при} \quad 0 < x \le a,$$

$$\underline{U}_j(x) \le u_j \le \overline{U}_j(x)\,, \qquad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\,;$$

$$\underline{U}_i(0) < u_i^0\,;$$

$$\frac{d\overline{U}_i(x)}{dx} > f_i\big(x, u_1, \ldots, u_{i-1}, \overline{U}_i(x), u_{i+1}, \ldots, u_n\big) \quad \text{при} \quad 0 < x \le a,$$

$$\underline{U}_j(x) \le u_j \le \overline{U}_j(x)\,, \qquad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\,;$$

$$\overline{U}_i(0) > u_i^0\,.$$

Замечание 2. В определениях нижнего и верхнего решений допустимы нестрогие знаки неравенств.

Замечание 3. Основная проблема при желании использовать метод Чаплыгина – как построить верхнее и нижнее решения? Во многих сингулярно возмущенных задачах это удается сделать таким образом: сначала строится формальная асимптотика (асимптотическое решение по невязке), а затем она "подправляется"в одну и в другую стороны так, чтобы получились нижнее и верхнее решения задачи. При этом разность между верхним и нижним решениями оказывается малой величиной (стремящейся к нулю при $\varepsilon \to 0$, где ε - малый параметр задачи). В результате получается не только доказательство существования решения задачи, но и обоснование оценки разности между точным решением задачи и построенной асимптотикой. Такой подход мы называем *асимптотическим методом дифференциальных неравенств* (см. [6,7]).

§4. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в сингулярно возмущенной задаче Коши

Рассмотрим задачу Коши (u – скалярная функция, $\varepsilon > 0$ – малый параметр):

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u), \qquad 0 \le x \le a\,; \tag{1}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0. \tag{2}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Функция $f(x,u)$ и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны в области $D = \{(x,u) : 0 \le x \le a,\ u_1 \le u \le u_2\}$, где u_1, u_2 – некоторые числа, $u^0 \in [u_1, u_2]$. Указанная степень гладкости функции $f(x,u)$ обеспечит построение и обоснование асимптотики первого порядка.

Условие 2. Вырожденное уравнение $f(x,u) = 0$ имеет корень $u = \varphi(x)$; $u_1 \le \varphi(x) \le u_2$ при $0 \le x \le a$.

Условие 3. Выполнено условие устойчивости

$$\overline{f_u}(x) := f_u(x,\varphi(x)) < 0, \qquad 0 \le x \le a\,. \tag{3}$$

Условие 4. Присоединенная система

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = f(0,\tilde{u}), \qquad \tau \ge 0\,;\\ &\tilde{u}(0) = u^0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

имеет решение $\tilde{u}(\tau)$, такое, что

$$\tilde{u}(\tau) \to \varphi(0) \quad \text{при} \quad \tau \to \infty\,.$$

Это условие означает, что начальное значение u^0 принадлежит области влияния (притяжения) точки покоя $\tilde{u} = \varphi(0)$ уравнения (4).

Из теоремы Васильевой следует, что задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x,\varepsilon)$, и справедливо асимптотическое равенство (асимптотика первого порядка)

$$u(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \varepsilon\overline{u}_1(x) + \Pi_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \varepsilon\Pi_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + O\big(\varepsilon^2\big), \qquad 0 \le x \le a\,. \tag{5}$$

Проведем доказательство существования решения задачи (1), (2) и обоснование равенства (5) с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств. С этой целью построим сначала формальную асимптотику первого порядка для задачи (1), (2). Асимптотика строится в виде

$$
\begin{aligned}
&u(x,\varepsilon)=\bar u(x,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon)=\\
&\qquad=\bar u_0(x)+\varepsilon\bar u_1(x)+\dots+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\Pi_1(\tau)+\dots, \qquad \tau=\frac{x}{\varepsilon}\,. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Подставляем выражение (6) в уравнение (1):

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{d}{dx}\big(\overline{u}_0+\varepsilon\overline{u_1}+\dots\big)+\frac{d}{d\tau}\big(\Pi_0+\varepsilon\Pi_1+\dots\big)=f\big(x,\overline{u}+\Pi\big)=\\
&=f\big(x,\overline{u}(x,\varepsilon)\big)+\Big[f\big(\varepsilon\tau,\overline{u}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon)\big)-f\big(\varepsilon\tau,\overline{u}(\varepsilon\tau,\varepsilon)\big)\Big]=:\overline{f}+\Pi f\,.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты регулярной части асимптотики определяются из уравнения

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(\overline{u}_0'+\varepsilon\overline{u}_1'+\dots)=\overline{f}:=f(x,\overline{u}_0+\varepsilon\overline{u}_1+\dots)=\\
&\qquad\qquad=f(x,\overline{u}_0)+\overline{f}_u(x)(\varepsilon\overline{u}_1+\dots)+\dots\,.
\end{aligned}
$$

Стандартным способом отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
f(x,\overline{u}_0)=0 \qquad &\Rightarrow \qquad \overline{u}_0=\varphi(x)\,,\\
\overline{u}_0'=\overline{f}_u(x)\overline{u}_1 \qquad &\Rightarrow \qquad \overline{u}_1=\overline{f}_u^{\,-1}(x)\varphi'(x)\,,
\end{aligned}
$$

и так далее.

Коэффициенты погранслойной части асимптотики определяются из уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\big(\Pi_0+\varepsilon\Pi_1+\dots\big)=\Pi f:=\\
&\qquad=f\big(\varepsilon\tau,\overline{u}_0(\varepsilon\tau)+\varepsilon\overline{u}_1(\varepsilon\tau)+\dots+\Pi_0+\varepsilon\Pi_1+\dots\big)-\\
&\qquad\qquad-f\big(\varepsilon\tau,\overline{u}_0(\varepsilon\tau)+\varepsilon\overline{u}_1(\varepsilon\tau)+\dots\big)
\end{aligned}
$$

и начального условия

$$
\overline{u}_0(0)+\varepsilon\overline{u}_1(0)+\dots+\Pi_0(0)+\varepsilon\Pi_1(0)+\dots=u^0\,.
$$

Отсюда получаем

$$
\frac{d\Pi_0}{d\tau}=f(0,\varphi(0)+\Pi_0),\quad \tau\le 0;\qquad \Pi_0(0)=u^0-\varphi(0)\,. \qquad (7)
$$

Замена переменных $\varphi(0)+\Pi_0=\tilde{u}(\tau)$ сводит эту задачу к задаче (4) из условия 4. В силу условия 4 решение задачи (7) существует, и

$$\Pi_0(\tau)\to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to\infty\,. \tag{8}$$

В силу (8) и условия 3 для достаточно большого τ_0 будет выполнено неравенство

$$f_u(\tau):=f_u\big(0,\varphi(0)+\Pi_0(\tau)\big)<-\varkappa<0 \quad \text{при} \quad \tau\ge\tau_0\,, \tag{9}$$

поэтому для $\Pi_0(\tau)$ справедлива экспоненциальная оценка (она была получена в §2):

$$|\Pi_0(\tau)|\le c\,e^{-\varkappa\tau}, \qquad \tau\ge 0\,. \tag{10}$$

Задача для $\Pi_1(\tau)$ имеет вид

$$\frac{d\Pi_1}{d\tau}=f_u(\tau)\Pi_1+f_1(\tau), \quad \tau\ge 0; \qquad \Pi_1(0)=-\overline{u}_1(0)\,,$$

где

$$f_1(\tau)=\big[f_x(\tau)-\overline{f}_x(0)\big]\tau+\big[f_u(\tau)-\overline{f}_u(0)\big]\big(\varphi'(0)\tau+\overline{u}_1(0)\big)\,,$$

$$f_x(\tau)=f_x\big(0,\varphi(0)+\Pi_0(\tau)\big), \qquad\qquad \overline{f}_x(0)=f_x\big(0,\varphi(0)\big)\,,$$

а функции $f_u(\tau)$ и $\overline{f}_u(x)$ определены в (9) и (3). В силу (10) функция $f_1(\tau)$ имеет такую же оценку, как и $\Pi_0(\tau)$:

$$|f_1(\tau)|\le c\,e^{-\varkappa\tau}, \qquad \tau\ge 0.$$

Решение задачи для $\Pi_1(\tau)$ запишем в виде

$$\Pi_1(\tau)=-\Phi(\tau)\overline{u}_1(0)+\int\limits_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)f_1(s)\,ds\,, \tag{11}$$

где $\Phi(\tau)=\exp\Big(\int\limits_0^\tau f_u(s)\,ds\Big)$.

В силу (9) функции $\Phi(\tau)$ и $\Pi_1(\tau)$ имеют экспоненциальные оценки типа (10).

Возьмем теперь из правой части (6) члены нулевого и первого порядка по ε, т.е. составим сумму

$$U_1(x,\varepsilon)=\overline{u}_0(x)+\varepsilon\overline{u}_1(x)+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\Pi_1(\tau), \qquad \tau=\frac{x}{\varepsilon}\,.$$

В силу уравнений для членов этой суммы функция $U_1(x,\varepsilon)$ удовлетворяет равенству

$$L_\varepsilon U_1 := \varepsilon\frac{dU_1}{dx} - f(x,U_1) = O(\varepsilon^2), \qquad x\in[0,a] \tag{12}$$

и начальному условию

$$U_1(0,\varepsilon) = u^0\,. \tag{13}$$

Используя функцию $U_1(x,\varepsilon)$, построим нижнее и верхнее решения задачи (1), (2). Нижнее решение возьмем в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) - \varepsilon^2\Big(M + P\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\Big)\,, \tag{14}$$

где $M>0$ – число, $P(\tau)$ – функция погранслойного типа, имеющая оценку $0\le P(\tau)\le cMe^{-\varkappa\tau}$; M и $P(\tau)$ будут выбраны так, что функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ для достаточно малых ε окажется нижним решением задачи (1), (2).

Выражение для $L_\varepsilon\underline{U}(x,\varepsilon)$ запишем так:

$$L_\varepsilon\underline{U} = \varepsilon\frac{d\underline{U}(x,\varepsilon)}{dx} - f(x,\underline{U}(x,\varepsilon)) = \Big[\varepsilon\frac{dU_1}{dx} - f(x,U_1)\Big] - \\ - \varepsilon^2\frac{dP}{d\tau} - \big[f(x,\underline{U}) - f(x,U_1)\big]\,. \tag{15}$$

В силу (12) выражение в квадратных скобках является величиной порядка $O(\varepsilon^2)$ и не зависит от M. Выражение в фигурных скобках преобразуем следующим образом:

$$f(x,\underline{U}) - f(x,U_1) = f_u(x,U_1)\cdot(\underline{U}-U_1) + O\big((\underline{U}-U_1)^2\big) = \\ - f_u(x,U_1)\,\varepsilon^2\,\big(M+P(\tau)\big) + O_M(\varepsilon^4)\,,$$

где запись $O_M(\varepsilon^\alpha)$ означает, что эта величина зависит от M и при каждом фиксированном M имеет порядок $O(\varepsilon^\alpha)$.

Производную $f_u(x,U_1)$ представим в виде

$$f_u(x,U_1) = f_u(x,\varphi(x)) + \\ + \Big[f_u\big(x,\varphi(x)+\varepsilon\overline{u}_1+\Pi_0(\tau)+\varepsilon\Pi_1(\tau)\big) - f_u\big(x,\varphi(x)\big)\Big]\,.$$

Отсюда следует, что

$$f_u(x,U_1) = \overline{f}_u(x) + f^*_{uu}\cdot\Big(O(\varepsilon) + O\big(\Pi_0(\tau)\big)\Big) \le -\varkappa_0 + c_1\,e^{-\varkappa_1\tau} =: k(\tau)\,,$$

где производная f^*_{uu} берется в некоторой промежуточной точке.

Из (15) теперь получаем:

$$L_\varepsilon \underline{U} \le O(\varepsilon^2) - \varepsilon^2 \frac{dP}{d\tau} + \Big(-\varkappa_0 + c_1\, e^{-\varkappa_1 \tau} \Big)\, \varepsilon^2 \big(M + P(\tau) \big) + O_M(\varepsilon^4) =$$
$$= \Big[O(\varepsilon^2) - \varepsilon^2 \varkappa_0 M + O_M(\varepsilon^4) \Big] -$$
$$- \varepsilon^2 \Big[\frac{dP}{d\tau} - k(\tau) P - c_1 M e^{-\varkappa_1 \tau} \Big] . \qquad (16)$$

Определим функцию $P(\tau)$ как решение задачи

$$\frac{dP}{d\tau} = k(\tau) P + c_1 M e^{-\varkappa_1 \tau}, \quad \tau \ge 0; \qquad P(0) = 0 .$$

Тогда

$$P(\tau) = \int_0^\tau \exp\Big(\int_s^\tau k(t)\, dt \Big)\, c_1 M e^{-\varkappa_1 s}\, ds \ge 0 .$$

Так как

$$\exp\Big(\int_s^\tau k(t)\, dt \Big) = \exp\Big(-\varkappa_0 (\tau - s) + \int_s^\tau c_1\, e^{-\varkappa_1 t}\, dt \Big) =$$
$$= \exp\Big(-\varkappa_0 (\tau - s) + \frac{c_1}{\varkappa_1} \cdot \big(e^{-\varkappa_1 s} - e^{-\varkappa_1 \tau} \big) \Big) \le c_2\, e^{-\varkappa_0 (\tau - s)} ,$$

где учтено, что $e^{-\varkappa_1 s} - e^{-\varkappa_1 \tau} \le 1$, то

$$P(\tau) \le c_1 c_2\, M \int_0^\tau e^{-\varkappa_0 (\tau - s)} \cdot e^{-\varkappa_1 s}\, ds \le c_1 c_2 M \tau\, e^{-\varkappa_2 \tau} ,$$

где $\varkappa_2 = \min(\varkappa_0, \varkappa_1)$.

Следовательно,

$$0 \le P(\tau) \le c M\, e^{-\varkappa \tau}, \qquad \tau \ge 0 .$$

Таким образом, из (16) имеем

$$L_\varepsilon \underline{U} = O(\varepsilon^2) - \varepsilon^2 \varkappa_0 M + O_M(\varepsilon^4) ,$$

и, следовательно, для достаточно большого M и достаточно малых ε справедливо неравенство

$$L_\varepsilon \underline{U} < 0, \qquad x \in [0, a] ,$$

т.е. функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ удовлетворяет первому из неравенств (2) определения 1 в §3.

Так как $\underline{U}(0,\varepsilon) = U_1(0,\varepsilon) - \varepsilon^2(M + P(0))$ (см. (14)), и так как $P(0) = 0$, а $U_1(0,\varepsilon) = u^0$ (см. (13)), то

$$\underline{U}(0,\varepsilon) = u^0 - \varepsilon^2 M < u^0\,,$$

т.е. $\underline{U}(x,\varepsilon)$ удовлетворяет второму из неравенств (2) определения 1 в §3.

Итак, функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$ определенная формулой (14), для достаточно большого M и достаточно малых ε является нижним решением задачи (1), (2).

Аналогично доказывается, что функция

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + \varepsilon^2\left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\,, \tag{17}$$

где M и $P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ – те же число и функция, что и в (14), является верхним решением задачи (1), (2).

Согласно теореме 3, существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \qquad x \in [0,a],$$

а так как $\underline{U}(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$ (это видно из (14) и (17)), то $u(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, т.е. справедливо равенство (5).

Таким образом, построив нижнее и верхнее решения в виде (14) и (17), мы не только доказали существование решения задачи (1), (2), но и обосновали асимптотику первого порядка.

Аналогичным образом, построив $U_n(x,\varepsilon)$ – частичную сумму n-го порядка ряда (6) (разумеется, при достаточной гладкости функции $f(x,u)$), можно доказать что функции

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

и

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\left(M + P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)$$

являются нижним и верхним решениями задачи (1), (2), а отсюда следует асимптотическое равенство

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [0,a]\,.$$

Глава 3. Задача Коши в случаях пересекающихся и кратных корней вырожденного уравнения

Рассмотрим задачу Коши:

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \quad x\in[0,a]; \qquad u(0,\varepsilon) = u^0\,. \tag{1}$$

В классическом тихоновском случае вырожденное уравнение

$$f(x,u,0) = 0$$

имеет *изолированный корень* $u = \varphi(x)$, этот корень является *устойчивым*, что следует из условия

$$\overline{f}_u(x) := f_u\big(x,\varphi(x),0\big) < 0, \qquad x\in[0,a]\,, \tag{2}$$

и начальное значение u^0 принадлежит области притяжения этого корня. В этом случае имеет место *теорема Тихонова о предельном переходе* от решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1) к корню $\varphi(x)$ вырожденного уравнения на полусегменте $0 < x \le a$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \varphi(x), \qquad 0 < x \le a\,, \tag{3}$$

а при условии достаточной гладкости функции $f(x,u,\varepsilon)$ можно построить по методу А.Б. Васильевой асимптотическое приближение для решения с произвольной точностью на всем отрезке $[0,a]$.

Напишем формулу для нулевого приближения:

$$u(x,\varepsilon) = \varphi(x) + \Pi_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + O(\varepsilon), \qquad x\in[0,a]\,. \tag{4}$$

Здесь $\Pi_0\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ – главный член погранслойной части асимптотического разложения решения.

В этой главе мы рассмотрим задачу (1) в двух случаях, когда условие (2) нарушается, а именно, в случае, когда вырожденное уравнение имеет два корня, которые пересекаются при некотором $x_0\in(0,a)$ (в этой точке производная $\overline{f}_u(x)$ равна нулю), и в случае, когда корень $u=\varphi(x)$ вырожденного уравнения является двукратным на всем отрезке $[0,a]$ (в этом случае $\overline{f}_u(x) = 0$ при $x\in[0,a]$). Мы увидим, что вопрос о предельном переходе и об асимптотике решения становится в этих случаях более сложным.

§1. Характерные примеры

Рассмотрим два примера для случая пересекающихся корней.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1) в случае, когда

$$f(x,u,\varepsilon) = -u^2 + x^2 + \varepsilon\,,$$

а x изменяется на отрезке $x \in [-1,2]$, т.е.

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = -u^2 + x^2 + \varepsilon, \quad x \in [-1,2]; \qquad u(-1,\varepsilon) = u^0. \tag{5}$$

В этом случае вырожденное уравнение

$$f(x,u,0) = -u^2 + x^2 = 0$$

имеет два корня

$$u = \varphi_1(x) := -x \qquad \text{и} \qquad u = \varphi_2(x) := x,$$

которые пересекаются при $x = 0$ (см. рисунок 3.1).

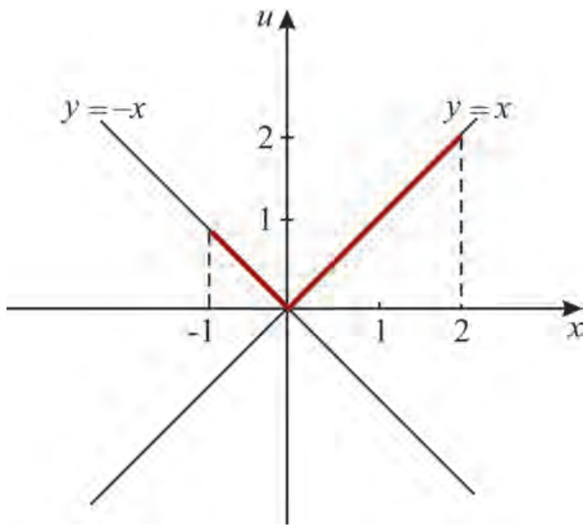


Рис. 3.1

Так как $f_u(x,u,0) = -2u$, то корень $u = -x$ является устойчивым при $x < 0$ $(f_u(x,-x,0) = 2x < 0$ при $x < 0)$, а при $x > 0$ он становится неустойчивым. Второй корень $u = x$ является устойчивым при $x > 0$ $(f_u(x,x,0) = -2x < 0$ при $x > 0$) и неустойчивым при $x < 0$. Образуем *составной корень* из двух устойчивых ветвей этих корней:

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1,0]\,, \\ \ \ x, & x \in [0,2]\,. \end{cases}$$

На рисунке 3.1 график $u = \hat{u}(x)$ выделен жирной линией. Отметим, что $\hat{f}_u(x) := f_u(x, \hat{u}(x), 0) < 0$ при $x \neq 0$, $\hat{f}_u(0) = 0$.

Поставим вопрос: будет ли решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (5) стремиться к составному корню $\hat{u}(x)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. будет ли $u(x, \varepsilon)$ удовлетворять предельному равенству типа (3) ?

Потребуем, чтобы начальное значение $u(-1, \varepsilon) = u^0$ принадлежало области притяжения корня $\hat{u}(x)$. С этой целью рассмотрим соответствующую присоединенную систему, которая получается из задачи (5), если сделать замену переменной $\tau = \dfrac{x+1}{\varepsilon}$ и положить в правой части уравнения $\varepsilon = 0$:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \widetilde{f}(\tilde{u}) := -\tilde{u}^2 + 1, \quad \tau \geq 0; \qquad \tilde{u}(0) = u^0\,. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет точку покоя $\tilde{u}_1 = \hat{u}(-1) = 1$, а также точку покоя $\tilde{u}_2 = -1$. Начальное значение u^0 должно принадлежать области притяжения точки покоя $\tilde{u}_1$.

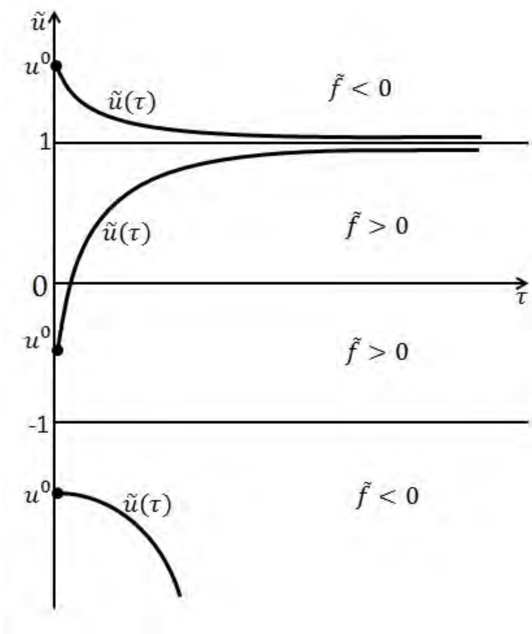


Рис. 3.2

На рисунке 3.2 указаны области знакопостоянства функции $\widetilde{f}(\tilde{u})$ и в соответствии с этим изображены графики нескольких решений задачи (6) для разных значений u^0. Очевидно, что областью притяжения точки покоя $\tilde{u}_1 = 1$ является полупрямая $u^0 > -1$, т.е. для любого $u^0 \in (-1, \infty)$ решение $\tilde{u}(\tau)$ задачи (6) удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau \to \infty} \tilde{u}(\tau) = 1 = \hat{u}(-1).$$

Таким образом, требование к начальному значению u^0 имеет вид $u^0 > -1$.

Поведение решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (5) при малом ε и $u^0 > -1$ отражено на рисунке 3.3. Здесь изображены также составной корень $u = \hat{u}(x)$ вырожденного уравнения и две ветви гиперболы $u = \pm\sqrt{x^2 + \varepsilon}$, в точках которой правая часть $f(x, u, \varepsilon) = -u^2 + x^2 + \varepsilon$ уравнения (5) обращается в нуль. При этом $f > 0$ если $-\sqrt{x^2 + \varepsilon} < u < \sqrt{x^2 + \varepsilon}$, и $f < 0$ если $|u| > \sqrt{x^2 + \varepsilon}$.

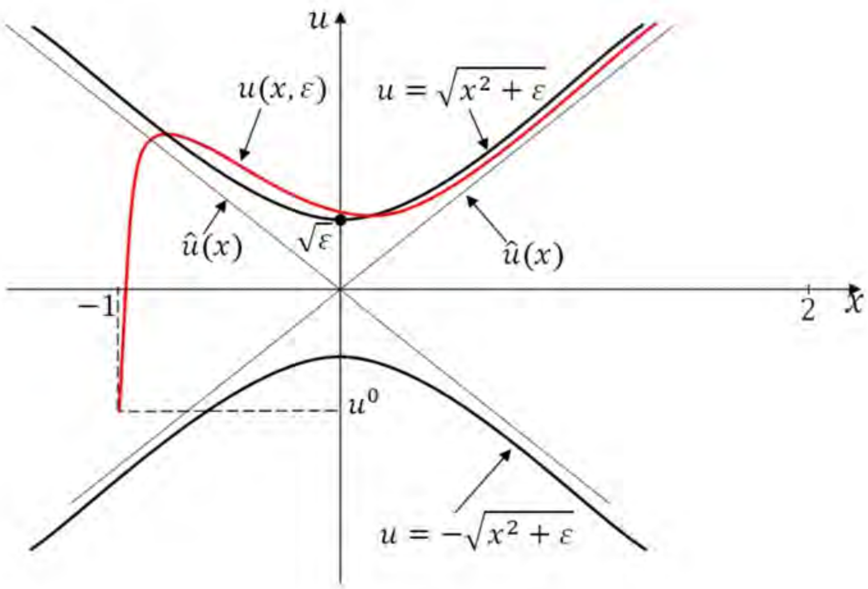


Рис. 3.3

На рисунке 3.3 видно, что вне пограничного слоя (т.е. вне малой окрестности начальной точки $x = -1$) решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (5) близко к составному корню $\hat{u}(x)$ вырожденного уравнения.

Нетрудно доказать, что ответ на поставленный выше вопрос – положительный:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x, \varepsilon) = \hat{u}(x), \qquad x \in (-1, 2] .$$

Вместе с тем имеется существенное отличие от случая изолированного корня вырожденного уравнения, когда вне пограничного слоя имело место равенство $u(x, \varepsilon) = \varphi(x) + O(\varepsilon)$ (оно следует из равенства (4)). В данном примере вблизи точки пересечения корней (т.е. в окрестности точки $x = 0$) разность $u(x, \varepsilon) - \hat{u}(x)$ имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$, что наглядно показано на рисунке 3.3. Такая же ситуация, как мы увидим в §2, возникает и в более общем случае пересечения корней вырожденного уравнения.

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу Коши, которая получается из задачи (5), если в правой части уравнения заменить ε на $-\varepsilon$:

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = -u^2 + x^2 - \varepsilon, \quad x \in [-1, 2]; \qquad u(-1, \varepsilon) = u^0. \tag{7}$$

Как и в примере 1, образуем составной корень вырожденного уравнения:

$$\hat{u}(x) = |x|, \qquad x \in [-1, 2]$$

и потребуем выполнения неравенства $u^0 > -1$.

Существенной особенностью данного примера является тот факт, что корень $u = -x$ вырожденного уравнения удовлетворяет уравнению (7) для любого ε. Поэтому график решения $u = u(x, \varepsilon)$ уравнения (7), начинающийся в точке, не лежащей на прямой $u = -x$, не может пересечь эту прямую (в силу единственности решения).

На рисунке 3.4 изображены график составного корня $u = \hat{u}(x)$, гипербола $u^2 = x^2 - \varepsilon$, в точках которой $f = -u^2 + x^2 - \varepsilon = 0$, и графики $u = u_1(x, \varepsilon)$ и $u = u_2(x, \varepsilon)$ двух решений задачи (7) с начальными точками P_1 (выше точки $P_0(-1, 1)$) и P_2 (ниже точки P_0). Заметим, что $f < 0$ между ветвями гиперболы и $f > 0$ левее левой ветви и правее правой ветви гиперболы.

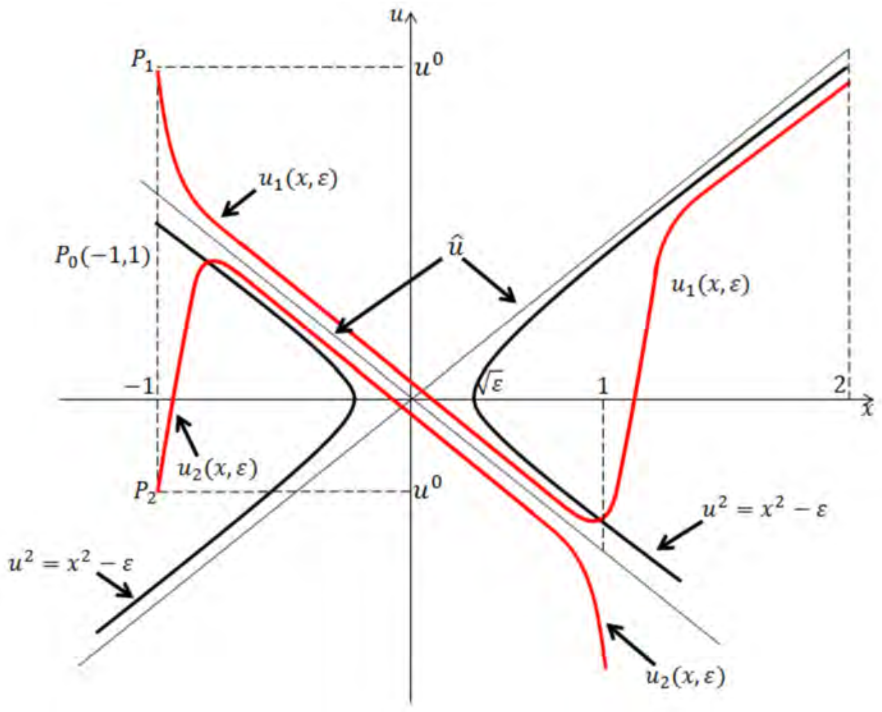


Рис. 3.4

Решение $u_1(x, \varepsilon)$, начинающееся в точке P_1, быстро притягивается к корню $u = -x$ вырожденного уравнения и остается при малом ε вблизи (и выше) этого корня, причем, как оказывается, не только при $x < 0$

(где корень $u = -x$ устойчив), но и на промежутке $0 \le x < 1$, хотя на этом промежутке корень $u = -x$ неустойчивый. Докажем это.

Функция $u = u_1(x, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (7), т.е. справедливо равенство

$$\varepsilon \frac{d}{dx}(u_1 + x) = -(u_1 - x)(u_1 + x).$$

Полагая $z(x, \varepsilon) = u_1(x, \varepsilon) + x$, приходим к равенству

$$\varepsilon \frac{dz}{dx} = -(z - 2x)z,$$

а так как $u_1(x, \varepsilon) > -x$, то $z(x, \varepsilon) > 0$, и, следовательно,

$$\varepsilon \frac{dz}{dx} < 2xz.$$

Интегрируя это неравенство от -1 до x и учитывая, что $z(-1, \varepsilon) = u^0 - -1 > 0$, получаем:

$$z(x, \varepsilon) \le z(-1, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-1}^{x} 2x dx\right) = (u^0 - 1) \exp\left(\frac{x^2 - 1}{\varepsilon}\right).$$

Итак,

$$0 < z(x, \varepsilon) \le (u^0 - 1) \exp\left(\frac{x^2 - 1}{\varepsilon}\right). \qquad (8)$$

Так как для любого $x \in (-1, 1)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \exp\left(\frac{x^2 - 1}{\varepsilon}\right) = 0,$$

то из (8) следует, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} z(x, \varepsilon) = 0$ при $-1 < x < 1$, и, значит,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_1(x, \varepsilon) = -x, \qquad -1 < x < 1.$$

Таким образом, решение $u_1(x, \varepsilon)$ расположено при малом ε вблизи корня $u = -x$ вырожденного уравнения не только на интервале $-1 < x < 0$, где этот корень устойчивый, но и на интервале $0 < x < 1$, где этот корень является неустойчивым. Это явление называется *задержкой решения вблизи неустойчивого корня.*

При $x > 1$ решение $u_1(x, \varepsilon)$ совершает резкий скачок и быстро приближается к другому корню вырожденного уравнения – устойчивому корню $u = x$, а затем остается вблизи этого корня при $x > 1$ (см. рис. 3.4).

Итак, для решения $u_1(x,\varepsilon)$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} -x, & -1 < x < 1\,, \\ x, & 1 < x \le 2\,. \end{cases}$$

Отметим, что описанное явление – задержка решения вблизи неустойчивого корня – возможно только в том случае, когда один из корней вырожденного уравнения является точным решением исходного уравнения.

Решение $u_2(x,\varepsilon)$, начинающееся в точке P_2, также быстро притягивается к корню $u=-x$ вырожденного уравнения и остается при малом ε вблизи (и ниже) этого корня не только до тех пор, пока корень $u=-x$ остается устойчивым, т.е. при $x<0$, но и при $0\le x<1$. Обоснование такого поведения $u_2(x,\varepsilon)$ имеется в [8]. При $x>1$ и малом ε решение $u_2(x,\varepsilon)$ стремительно убывает с ростом x. Можно доказать, что при достаточно малом ε решение $u_2(x,\varepsilon)$ непродолжаемо за точку $x=1+\delta$, где $\delta>0$ – сколь угодно малое, но фиксированное при $\varepsilon\to 0$ число, т.е. решение $u_2(x,\varepsilon)$ еще до этой точки уходит в $-\infty$.

Таким образом, для решения $u_2(x,\varepsilon)$, в отличие от $u_1(x,\varepsilon)$, предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_2(x,\varepsilon) = \hat{u}(x)$$

имеет место только для $-1<x<0$.

Рассмотренные примеры показывают, что в случае пересечения корней вырожденного уравнения поведение решения задачи Коши в окрестности точки пересечения корней существенно зависит от членов порядка $O(\varepsilon)$, входящих в правую часть уравнения.

§2. Задача Коши в случае пересекающихся корней вырожденного уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \qquad 0\le x\le a; \tag{1}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0. \tag{2}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Функция $f(x,u,\varepsilon)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\{(x,u,\varepsilon) : 0\le x\le a, u\in I, 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$, где I – некоторый интервал, $\varepsilon_0>0$ – некоторое число, $u^0\in I$.

Условие 2. Вырожденное уравнение

$$f(x,u,0)=0$$

имеет ровно два корня относительно u

$$u=\varphi_1(x) \quad \text{и} \quad u=\varphi_2(x), \qquad 0\le x\le a\,,$$

причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $x\in[0;a]$, а их области значений принадлежат интервалу I.

Условие 3. Кривые $u=\varphi_1(x)$ и $u=\varphi_2(x)$ пересекаются в точке $\big(x_0,\,\varphi_1(x_0)\big)$, $x_0\in(0;a)$. Пусть (для определенности) $\varphi_1(x)>\varphi_2(x)$ при $0\le x<x_0$, $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ при $x_0<x\le a$ (рис. 3.5).

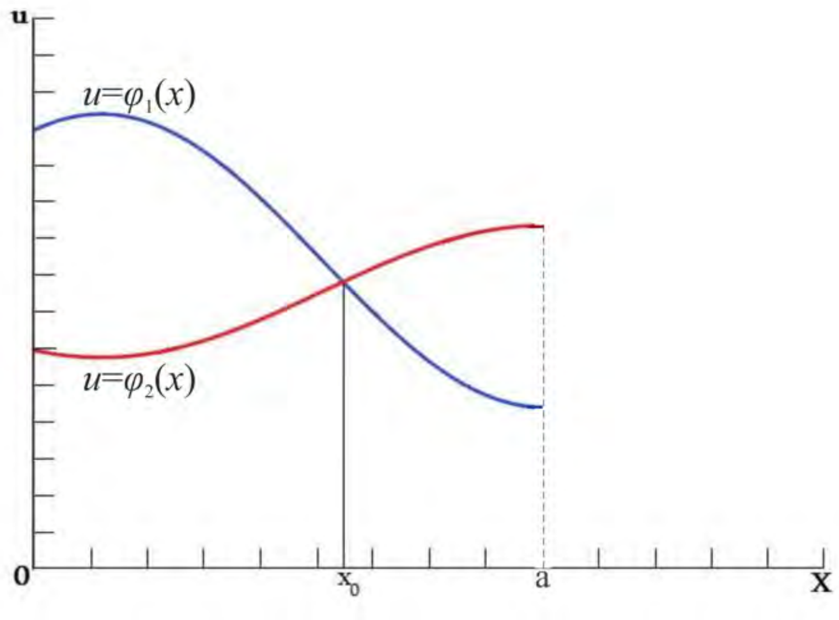


Рис. 3.5

Условие 4. Пусть

$$f_u(x,\varphi_1(x),0)<0, \qquad f_u(x,\varphi_2(x),0)>0 \qquad \text{при} \qquad 0\le x<x_0\,,$$

$$f_u(x,\varphi_1(x),0)>0, \qquad f_u(x,\varphi_2(x),0)<0 \qquad \text{при} \qquad x_0<x\le a\,.$$

Заметим, что из условия 3 следует $f_u(x_0,\varphi_i(x_0),0)=0$, $i=1,2$.

Примером функции $f(x,u,0)$, удовлетворяющей условиям 2 и 4, является

$$f(x,u,0)=-\big(u-\varphi_1(x)\big)\cdot\big(u-\varphi_2(x)\big)\,, \tag{3}$$

если функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условию 3.

Действительно:

$$f_u(x,u,0) = -2u + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_u\big(x,\varphi_1(x),0\big) = \big[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\big] \begin{cases} < 0, & 0 \le x < x_0\,, \\ > 0, & x_0 < x \le a\,; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f_u\big(x,\varphi_2(x),0\big) = \big[\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\big] \begin{cases} > 0, & 0 \le x < x_0\,, \\ < 0, & x_0 < x \le a\,; \end{cases}$$

$$f_u\big(x_0,\varphi_i(x_0),0\big) = 0\,.$$

Из условия 4 следует, что корень $\varphi_1(x)$ устойчив при $0 \le x < x_0$, а корень $\varphi_2(x)$ устойчив при $x_0 < x \le a$. Образуем *составной корень* из устойчивых ветвей корней $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$:

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \le x \le x_0\,, \\ \varphi_2(x), & x_0 \le x \le a\,. \end{cases}$$

Из условий 2 и 4 следует, что

$$\hat{f}(x) := f(x,\hat{u}(x),0) = 0, \qquad \hat{f}_u(x) := f_u(x,\hat{u}(x) \le 0\,.$$

Функция $\hat{u}(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [0;a]$, но не дифференцируема, вообще говоря, в точке x_0. В этой точке существуют левая и правая производные $\hat{u}(x)$:

$$\hat{u}'_{left}(x_0) = \varphi'_1(x_0), \qquad \hat{u}'_{right}(x_0) = \varphi'_2(x_0)\,.$$

Поставим вопрос: при каких условиях решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) будет существовать и удовлетворять предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \hat{u}(x), \qquad 0 \le x \le a\ \ ? \tag{4}$$

Пример 2 из §1 показывает, что так будет не всегда. Прежде всего нужно потребовать, чтобы начальное значение u^0 принадлежало области притяжения корня $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения. Соответствующее требование связано с присоединенным уравнением

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = f(0,\tilde{u},0), \quad \tau \ge 0; \qquad \tilde{u}(0) = u^0\,, \tag{5}$$

где $\tilde{u} = \varphi_1(0)$ и $\tilde{u} = \varphi_2(0)$ – точки покоя этого уравнения, причем в силу условия 4 $\tilde{u} = \varphi_1(0)$ – асимптотически устойчивая точка покоя, а $\tilde{u} = \varphi_2(0)$ – неустойчивая точка покоя.

Условие 5. Начальное значение u^0 принадлежит области притяжения точки покоя $\tilde{u} = \varphi_1(0)$ уравнения (5), т.е. решение $\tilde{u}(\tau)$ задачи (5) существует и удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau\to\infty} \tilde{u}(\tau) = \varphi_1(0)\,.$$

Нетрудно усмотреть, что условие 5 выполнено, если $u^0 > \varphi_2(0)$ (см. рис. 3.6).

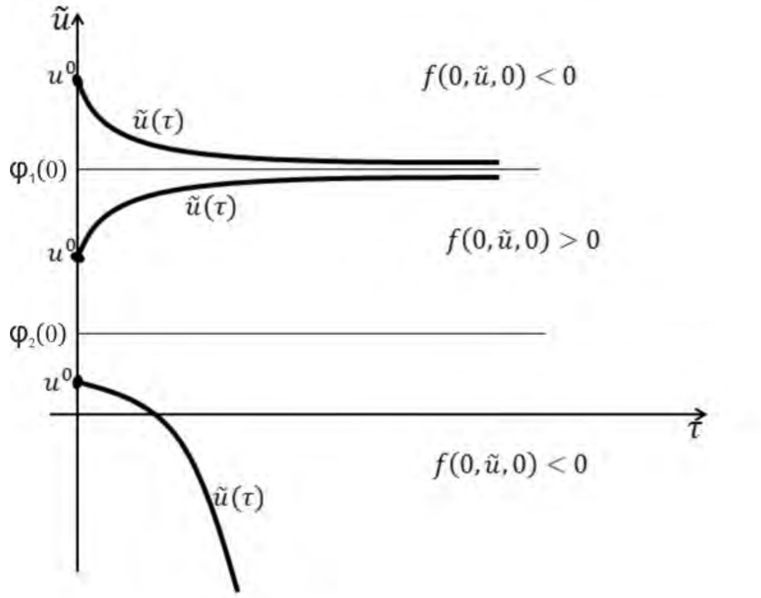


Рис. 3.6

Но условий 1–5 недостаточно для выполнения равенства (4) на промежутке $x \in (0; a]$. Условия 1–5 в силу теоремы Тихонова гарантируют выполнение этого равенства только при $0 < x \le x_1 = x_0 - \delta$, где $\delta > 0$ можно взять сколь угодно малым, но фиксированным при $\varepsilon \to 0$.

На отрезке $x \in [0; x_1]$ решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2) существует и для него, согласно теореме Васильевой, имеет место асимптотическое равенство

$$u(x,\varepsilon) = \varphi_1(x) + \Pi_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + O(\varepsilon), \qquad 0 \le x \le x_1 \tag{6}$$

где $\Pi_0(\tau)$ – пограничная функция, являющаяся решением задачи

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = f\big(0, \varphi_1(0) + \Pi_0, 0\big), \quad \tau \ge 0; \qquad \Pi_0(0) = u^0 - \varphi_1(0)\,.$$

Эта задача сводится к (5) заменой переменной $\Pi_0(\tau) = \tilde{u}(\tau) - \varphi_1(0)$, а в силу условий 4 и 5 для $\Pi_0(\tau)$ справедлива экспоненциальная оценка

$$\big|\Pi_0(\tau)\big| \le c\, e^{-\varkappa\tau}, \qquad \tau \ge 0\,,$$

где $c > 0$ и $\varkappa > 0$ – некоторые числа. Из (6) следует предельное равенство (4) на промежутке $x \in (0; x_1]$.

Введем обозначение

$$u(x_1, \varepsilon) = u_1\,. \tag{7}$$

В силу (6)

$$u_1 = \varphi_1(x_1) + O(\varepsilon)\,. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь уравнение (1) на отрезке $x \in [x_1, x_2]$, где $x_2 = x_0 + \delta$, с начальным условием (7). Докажем существование решения задачи (1), (7) на отрезке $[x_1; x_2]$ с помощью метода дифференциальных неравенств. Для этого нам понадобятся еще два условия, связанные с точкой x_0 пересечения корней $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Условие 6. $\hat{f}_{uu}(x_0) < 0$, где $\hat{f}_{uu}(x) = f_{uu}(x, \hat{u}(x), 0)$.

Отметим, что для функции (3) это условие, очевидно, выполняется.

Условие 7. $\hat{u}'(x_0 \pm 0) - \hat{f}_\varepsilon(x_0) < 0$, где $\hat{f}_\varepsilon(x) := f_\varepsilon(x, \hat{u}(x), 0)$.

Это условие должно выполняться в точке x_0 для левой и правой производных функции $\hat{u}(x)$. Оно показывает, что члены порядка $O(\varepsilon)$ играют существенную роль в обосновании предельного равенства (4).

Нижнее решение возьмем в виде

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = \hat{u}(x) - M\varepsilon\,, \tag{9}$$

где M – положительное число, не зависящее от ε, которое выберем ниже.

Получим оценку для $L_\varepsilon \underline{U}$:

$$L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon \frac{d\underline{U}}{dx} - f\big(x, \underline{U}(x, \varepsilon), \varepsilon\big) = \varepsilon \hat{u}'(x) - f(x,\, \hat{u}(x) - M\varepsilon,\, \varepsilon) =$$
$$= \varepsilon \hat{u}'(x) - \big[f\big(x, \hat{u}(x), 0\big) + \hat{f}_u(x) \cdot (-M\varepsilon) + \varepsilon \hat{f}_\varepsilon(x) + o(\varepsilon)\big].$$

Так как $f(x, \hat{u}(x), 0) = 0$ и $\hat{f}_u(x) \le 0$, то

$$L_\varepsilon \underline{U} \le \varepsilon \left[\hat{u}'(x) - \hat{f}_\varepsilon(x)\right] + o(\varepsilon)\,.$$

В силу условия 7 неравенство $\hat{u}'(x) - \hat{f}_\varepsilon(x) \le -c_0 < 0$ выполнено на отрезке $[x_1; x_2] = [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$, если δ достаточно малое число, а c_0 – некоторое положительное число. Следовательно,

$$L_\varepsilon \underline{U} \le -c_0\, \varepsilon + o(\varepsilon), \qquad x_1 \le x \le x_2\,,$$

а, значит, $L_\varepsilon \underline{U} < 0$ для достаточно малых ε на отрезке $[x_1, x_2]$.

В точке x_1 имеем $\underline{U}(x_1,\varepsilon) = \hat{u}(x_1) - M\varepsilon = \varphi_1(x_1) - M\varepsilon$. Сопоставляя это выражение с равенствами (7) и (8), приходим к выводу, что для достаточно большого M выполнено неравенство

$$\underline{U}(x_1,\varepsilon) < u(x_1,\varepsilon) = u_1\,.$$

Таким образом, функция $\underline{U}(x,\varepsilon)$, определенная равенством (9), для достаточно большого M и достаточно малых ε является нижним решением задачи (1), (7) на отрезке $[x_1, x_2]$.

Верхнее решение этой задачи возьмем в виде

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = \hat{u}(x) + M\sqrt{\varepsilon}, \tag{10}$$

где число M будет выбрано ниже. Оценим $L_\varepsilon\overline{U}$:

$$L_\varepsilon\overline{U} = \varepsilon\frac{d\overline{U}}{dx} - f(x,\overline{U},\varepsilon) = \varepsilon\hat{u}'(x) - f\big(x,\hat{u}(x)+M\sqrt{\varepsilon},\varepsilon\big) = \varepsilon\hat{u}'(x) -$$

$$- \Big[f(x,\hat{u}(x),0) + \hat{f}_u(x)M\sqrt{\varepsilon} + \hat{f}_\varepsilon(x)\varepsilon + \frac{1}{2}\hat{f}_{uu}(x)M^2\varepsilon + o(\varepsilon)\Big] \geq$$

$$\geq \varepsilon\Big[\hat{u}'(x) - \hat{f}_\varepsilon(x) - \frac{1}{2}\hat{f}_{uu}(x)M^2\Big] + o(\varepsilon)$$

В силу условия 7

$$\hat{u}'(x) - \hat{f}_\varepsilon(x) \geq -c_1\,,$$

а в силу условия 6

$$-\frac{1}{2}\hat{f}_{uu}(x) \geq c_2 > 0$$

на отрезке $[x_1, x_2]$ при достаточно малом δ, где c_1 и c_2 – положительные числа. Следовательно, для достаточно большого M выражение в квадратных скобках больше нуля, и, значит, $L_\varepsilon\overline{U} > 0$ для достаточно малых ε на отрезке $[x_1, x_2]$.

В точке x_1 $\overline{U}(x_1,\varepsilon) = \varphi_1(x_1) + M\sqrt{\varepsilon} > u(x_1,\varepsilon) = \varphi_1(x_1) + O(\varepsilon)$ для достаточно малых ε. Таким образом, функция $\overline{U}(x,\varepsilon)$, определенная равенством (10), для достаточно большого M и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1), (7) на отрезке $x \in [x_1, x_2]$.

Построенные нижнее и верхнее решения обеспечивают существование решения $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (7) на отрезке $x \in [x_1, x_2]$, удовлетворяющего неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \leq u(x,\varepsilon) \leq \overline{U}(x,\varepsilon), \qquad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Из этих неравенств и вида функций $\underline{U}$ и $\overline{U}$ следует асимптотическое равенство

$$u(x,\varepsilon) = \hat{u}(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad x_1 \leq x \leq x_2$$

Введем обозначение

$$u(x_2, \varepsilon) = u_2 \tag{11}$$

и рассмотрим уравнение (1) на отрезке $x \in [x_2, a]$ с начальным условием (11).

Для задачи (1), (11) на отрезке $[x_2, a]$ выполнены все условия теоремы Васильевой, согласно которой решение этой задачи существует и имеет асимптотическое представление

$$u(x, \varepsilon) = \hat{u}(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad x_2 \le x \le a. \tag{12}$$

Можно это обосновать и не ссылаясь на теорему Васильевой, а построив нижнее и верхнее решение в виде:

$$\underline{U}(x, \varepsilon) = \hat{u}(x) - M\sqrt{\varepsilon}, \quad \overline{U}(x, \varepsilon) = \hat{u}(x) + M\sqrt{\varepsilon}, \qquad x \in [x_2, a]. \tag{13}$$

Нетрудно доказать, что для достаточно большого числа $M > 0$ и достаточно малых ε функции (13) будут нижним и верхним решениями задачи (1), (11) на отрезке $[x_2, a]$, откуда следует равенство (12).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполнены условия 1–7, то для достаточно малых* ε *задача (1), (2) имеет решение* $u(x, \varepsilon)$, *и справедливы асимптотические равенства*

$$u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \hat{u}(x) + \Pi_0\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big) + O(\varepsilon), & 0 \le x \le x_1 = x_0 - \delta\,, \\ \hat{u}(x) + O\big(\sqrt{\varepsilon}\big), & x_1 \le x \le a\,. \end{cases} \tag{14}$$

Следствие. Из (14) следует предельное равенство (4).

Замечание. В примере 2 из §1 условие 7 не выполнено, т.к.

$$\frac{d\hat{u}}{dx}(-0) - \hat{f}_\varepsilon(0) = -1 + 1 = 0, \qquad \frac{d\hat{u}}{dx}(+0) - \hat{f}_\varepsilon(0) = 1 + 1 = 2 > 0\,,$$

и, как было показано, предельное равенство (4) не имеет места на всем промежутке $(-1, 2]$.

Задачи.

Проверьте выполнение условий теоремы 1 и постройте асимптотику вида (14) для решения $u(x, \varepsilon)$ задачи Коши.

Задача 3.2.1.

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{du}{dx} = -(u + x - 2)(u - 2x) + \varepsilon(u + 1), \quad 0 \le x \le 1\,; \\ &u(0, \varepsilon) = 1\,. \end{aligned}$$

Задача 3.2.2.

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = -(u-1)(u-2\sin x) + \varepsilon(2u+x), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\,;$$
$$u(0,\varepsilon) = 2\,.$$

Изобразите графики функций $u = \hat{u}(x)$ и $u = u(x,\varepsilon)$.

§3. Задача Коши в случае двукратного корня вырожденного уравнения

Снова рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u,\varepsilon), \qquad 0 \le x \le a\,; \tag{1}$$

$$u(0,\varepsilon) = u^0\,, \tag{2}$$

но теперь при иных условиях.

Условие 1. $f(x,u,\varepsilon) = -h(x)\big(u-\varphi(x)\big)^2 + \varepsilon f_1(x,u,\varepsilon)$.

При этом условии вырожденное уравнение $f(x,u,0) = 0$ имеет двукратный корень $u = \varphi(x)$.

Условие 2. Пусть функции $h(x)$, $\varphi(x)$, $f_1(x,u,\varepsilon)$ – достаточно гладкие и, кроме того, $h(x) > 0$ при $x \in [0,a]$.

Будем строить асимптотику решения задачи (1), (2) в виде суммы регулярного и пограничного рядов

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}(x,\varepsilon) + \Pi(\tau,\varepsilon), \qquad \tau = \frac{x}{\varepsilon}\,. \tag{3}$$

Но в отличие от классического тихоновского случая, когда корень $u = \varphi(x)$ вырожденного уравнения был простым (однократным), в случае двукратного корня ряды $\overline{u}(x,\varepsilon)$ и $\Pi(\tau,\varepsilon)$ оказываются рядами не по целым степеням ε, а рядами по степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\overline{u}(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{u}_1(x) + \varepsilon\overline{u}_2(x) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\overline{u}_i(x)\,, \tag{4}$$

$$\Pi(\tau,\varepsilon) = \Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\,\Pi_1(\tau) + \varepsilon\Pi_2(\tau) + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\Pi_i(\tau)\,. \tag{5}$$

Более того, пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ будут зависеть не только от τ, но и от ε, но с целью уменьшения громоздкости формул будем писать $\Pi_i(\tau)$ вместо $\Pi_i(\tau,\varepsilon)$.

Далее, подставляем выражение (3) в уравнение (1), представляем правую часть в виде

$$f(x,\overline{u}+\Pi,\varepsilon)=\overline{f}+\Pi f,$$

где

$$\overline{f}:=f\big(x,\overline{u}(x,\varepsilon),\varepsilon\big),\quad \Pi f:=f\big(\varepsilon\tau,\overline{u}(\varepsilon\tau,\varepsilon)+\Pi(\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)-f\big(\varepsilon\tau,\overline{u}(\varepsilon\tau,\varepsilon),\varepsilon\big)\,,$$

и отделяем уравнения для регулярной $\overline{u}(x,\varepsilon)$ и погранслойной $\Pi(\tau,\epsilon)$ частей асимптотики:

$$\varepsilon\frac{d\overline{u}}{dx}=\overline{f}\qquad\text{и}\qquad\frac{d\Pi}{d\tau}=\Pi f\,. \tag{6}$$

<u>Построение регулярной части асимптотики.</u>

Запишем более подробно первое уравнение в (6), учитывая вид функции $f(x,u,\varepsilon)$:

$$\varepsilon\frac{d}{dx}(\overline{u}_0+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1+\dots)=-h(x)\big(\overline{u}_0+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1+\varepsilon\overline{u}_2+\dots-\varphi(x)\big)^2+$$
$$+\,\varepsilon f_1\big(x,\overline{u}_0+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1+\dots,\varepsilon\big).$$

Из этого уравнения стандартным образом, т.е. раскладывая правую часть в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ в левой и правой частях уравнения, получаем уравнения для коэффициентов $\overline{u}_i(x)$ ряда (4):

$$\varepsilon^0:\qquad 0=-h(x)\big(\overline{u}_0-\varphi(x)\big)^2\qquad\Rightarrow\qquad \overline{u}_0=\varphi(x),$$

$$\varepsilon^1:\qquad \frac{d\overline{u}_0}{dx}=-h(x)\overline{u}_1^2+f_1\big(x,\overline{u}_0(x),0\big)\quad\text{или}\quad h(x)\,\overline{u}_1^2=\overline{f}_1(x)-\varphi'(x),$$

где $\overline{f}_1(x):=f_1\big(x,\overline{u}_0(x),0\big)$.

Чтобы уравнение для $\overline{u}_1$ было разрешимо, необходимо потребовать выполнения неравенства $\overline{f}_1(x)-\varphi'(x)\geq 0$ (поскольку $h(x)>0$). Потребуем выполнения строгого неравенства.

Условие 3. $\overline{f}_1(x)-\varphi'(x)>0$ при $0\leq x\leq a$.

<u>Замечание</u>. Поскольку $\overline{f}_1(x)=f_\varepsilon(x,\overline{u}_0(x),0)$ и $\varphi'(x)=\overline{u}_0'(x)$, то условие 3 можно записать в виде

$$\overline{u}_0'(x)-f_\varepsilon(x,\overline{u}_0,0)<0\quad\text{при}\quad 0\leq x\leq a\,,$$

и тогда оно принимает такой же вид, как условие 7 в §2 но с тем отличием, что там это условие должно выполняться только в одной точке

x_0 (в этой точке корни φ_1 и φ_2 пересекаются, т. е. корень становится двукратным), а здесь корень $\varphi(x)$ является двукратным на всем отрезке $x \in [0, a]$, и условие 3 должно выполняться на всем отрезке.

При условии 3 уравнение относительно $\overline{u}_1$ имеет два решения. Как будет видно из дальнейшего, следует взять положительное решение:

$$\overline{u}_1 = \Big[h^{-1}(x) \cdot \big(\overline{f}_1(x) - \varphi'(x)\big)\Big]^{1/2} > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le a.$$

Уравнение для $\overline{u}_2(x)$ имеет вид

$$\frac{d\overline{u}_1}{dx} = -2h(x)\overline{u}_1(x)\overline{u}_2(x) + \overline{f}_{1u}(x)\overline{u}_1(x).$$

Так как коэффициент $-2h(x)\overline{u}_1(x)$ перед $\overline{u}_2(x)$ не равен нулю, то отсюда однозначно определяется $\overline{u}_2(x)$.

Для следующих коэффициентов $\overline{u}_i(x)$, $i \ge 3$ ряда (4) получаются уравнения такого же типа, как для $\overline{u}_2(x)$:

$$2h(x)\overline{u}_1(x)\overline{u}_i(x) = F_i(x),$$

где функции $F_i(x)$ рекуррентно выражаются через уже известные функции $\overline{u}_j(x)$ с номерами $j < i$.

Итак, регулярный ряд (4) построен.

Построение погранслойной части асимптотики.

Запишем более подробно второе уравнение в (6), введя наряду с растянутой погранслойной переменной $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$ еще одну растянутую переменную $\zeta = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon}\tau$ и подставив в уравнение вместо Π ряд (5), а вместо $\overline{u}(\varepsilon\tau, \tau)$ ряд $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\,\overline{u}_i(\sqrt{\varepsilon}\zeta)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \dots) = \Pi f = \\
&\quad = f(\sqrt{\varepsilon}\zeta, \overline{u}(\sqrt{\varepsilon}\zeta, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - f(\sqrt{\varepsilon}\zeta, \overline{u}(\sqrt{\varepsilon}\zeta, \varepsilon), \varepsilon) = \\
&= -h(\sqrt{\varepsilon}\zeta)\Big[\overline{u}_0(\sqrt{\varepsilon}\zeta) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\zeta) + \dots + \Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \dots - \varphi(\sqrt{\varepsilon}\zeta)\Big]^2 + \\
&\quad + h(\sqrt{\varepsilon}\zeta)(\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\zeta) + \dots)^2 + \varepsilon\Pi f_1 = \\
&\quad = -(h(0) + h'(0)\sqrt{\varepsilon}\zeta + \dots)\Big[(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \dots)^2 + \\
&\quad + 2(\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\zeta) + \varepsilon\overline{u}_2(\sqrt{\varepsilon}\zeta) + \dots)(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \dots)\Big] + \varepsilon\Pi f_1 .
\end{aligned} \tag{7}$$

Из этого равенства будем извлекать уравнения для пограничных функций $\Pi_i(\tau)$, но не стандартным способом (он оказывается непригодным в случае двукратного корня вырожденного уравнения), а с помощью описанного ниже алгоритма.

Если применить стандартный способ, т.е. приравнивать в разложениях левой и правой частей равенства коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$, то для $\Pi_0(\tau)$ получится уравнение

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -h(0)\Pi_0^2\,, \qquad \tau \geq 0\,. \tag{8}$$

Начальное условие для $\Pi_0(\tau)$ извлекается из равенства, которое получается в результате подстановки ряда (3) в начальное условие (2):

$$\overline{u}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(0) + \cdots + \Pi_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1(0) + \cdots = u^0\,. \tag{9}$$

Отсюда получаем

$$\Pi_0(0) = u^0 - \overline{u}_0(0) =: \Pi^0\,. \tag{10}$$

Чтобы решение задачи (8), (10) стремилось к нулю при $\tau \to \infty$ (стандартное требование к пограничным функциям), необходимо потребовать, чтобы $\Pi_0(0)$ было неотрицательным. Введем более жесткое условие.

Условие 4. $\Pi_0(0) = u^0 - \overline{u}_0(0) > 0$ (т.е. $u^0 > \varphi(0)$).

Отметим, что случай $\Pi^0 = 0$ требует отдельного рассмотрения.

При условии 4 решение задачи (8), (10) имеет вид (не ограничивая общности, будем считать, с целью уменьшения громоздкости формул, что $h(0) = 1$):

$$\Pi_0(\tau) = \frac{\Pi^0}{\Pi^0\tau + 1} \tag{11}$$

откуда следует, что $\Pi_0(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$ как $\dfrac{1}{1+\tau}$, т.е. степенным образом.

Однако, как показывает исследование, поведение решения задачи (1), (2) в пограничном слое имеет более сложный характер. Оказывается, что пограничный слой можно разделить на три зоны. В первой зоне пограничные функции убывают с ростом τ степенным образом также, как функция (11). Затем следует вторая (переходная) зона, в которой происходит постепенное изменение масштаба погранслойной переменной от $\tau = \dfrac{x}{\varepsilon}$ до $\zeta = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, а также изменение характера убывания пограничных функций. И, наконец, в третьей зоне пограничные функции убывают экспоненциально как $e^{-\varkappa\zeta}$, где $\varkappa > 0$, $\zeta = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$. Размеры зон уточним ниже.

Отметим также, что в случае простых корней вырожденного уравнения пограничные функции имели экспоненциальную оценку на всей полупрямой $\tau \geq 0$:

$$\Pi_i(\tau) = O\big(e^{-\varkappa\tau}\big), \qquad \tau \geq 0\,.$$

Можно сказать, что в случае простого корня вырожденного уравнения пограничный слой был однозонным, а в случае двухкратного корня пограничный слой – трехзонный.

Чтобы построить пограничные функции, правильно описывающие поведение решения в пограничном слое, нужно изменить стандартный алгоритм формирования уравнений для пограничных функций следующим образом.

В правую часть уравнения (8) добавим слагаемое $-2\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(0)\Pi_0$, оно содержится в правой части равенства (7). Уравнение для $\Pi_0(\tau)$ примет вид

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -\big(\Pi_0^2 + \sqrt{\varepsilon}k\Pi_0\big), \qquad \tau \geq 0\,, \tag{12}$$

где $k = 2\overline{u}_1(0) > 0$.

Решение уравнения (12) с начальным условием (10) также находится в явном виде:

$$\Pi_0(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}k\Pi^0\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon}k + \Pi^0(1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau))}\,. \tag{13}$$

Отметим, что $\Pi_0(\tau) > 0$, и это будет играть важную роль при обосновании асимптотики.

Несложный анализ выражения (13) показывает:
если $0 \leq \tau \leq \dfrac{1}{\varepsilon^\alpha}$, где α – любое число из интервала $(0;\frac{1}{2})$, то функция $\Pi_0(\tau)$ убывает с ростом τ как $\dfrac{1}{1+\tau}$, т.е. степенным образом (это первая зона пограничного слоя);
если $\tau \geq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то $\Pi_0 = O\big(\sqrt{\varepsilon}e^{-k\zeta}\big)$, где $\zeta = \sqrt{\varepsilon}\tau = \dfrac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, т.е. функция Π_0 убывает экспоненциально с ростом погранслойной переменной ζ (это третья зона пограничного слоя);
между первой и третьей зонами находится вторая (переходная) зона, в которой $\dfrac{1}{\varepsilon^\alpha} \leq \tau \leq \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\alpha \in (0;\frac{1}{2})$, где происходит постепенный переход от погранслойной переменной τ к погранслойной переменной ζ и изменяется характер убывания функции Π_0 — от степенного убывания до экспоненциального.

Таким образом, замена стандартного уравнения (8) нестандартным (12) позволяет получить пограничную функцию (13), описывающую поведение решения во всех трех зонах пограничного слоя.

Как будет видно из дальнейшего, все следующие функции $\Pi_i(\tau)$, $i \geq 1$, будут обладать такими же свойствами, как и $\Pi_0(\tau)$. Но для этого нужно извлекать для них уравнения из равенства (7) нестандартным способом.

Прежде всего, в правую часть уравнения для $\Pi_i(\tau)$ наряду с членом $-2\Pi_0(\tau)\Pi_i$ включим слагаемое $-\sqrt{\varepsilon}k\Pi_i$, аналогичное слагаемому $-\sqrt{\varepsilon}k\Pi_0$, включенному в (12). Уравнение для $\Pi_i(\tau)$ $i = 1, 2, \ldots$ будет иметь вид:

$$\frac{d\Pi_i}{d\tau} = -(2\Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}k)\Pi_i + \pi_i(\tau, \varepsilon), \qquad \tau \geq 0\,, \tag{14}$$

где функции $\pi_i(\tau, \varepsilon)$ выражается определенным образом через известные к моменту рассмотрения уравнения (14) функции $\Pi_j(\tau)$ с номерами $j < i$.

Нестандартность формирования функций $\pi_i(\tau, \varepsilon)$ состоит в следующем.

Обозначим коэффициент при $(\sqrt{\varepsilon})^i$ в разложении правой части равенства (7) через $q_i(\zeta, \Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1})$ (слагаемое $-2\Pi_0\Pi_i$ в q_i не включаем). Если какое-то слагаемое (обозначим его $\tilde{q}_i$) входящее в q_i, имеет оценку по модулю, содержащую не менее двух сомножителей из числа функций $\Pi_0, \ldots, \Pi_{i-1}$, то это слагаемое включаем в $\pi_i(\tau, \varepsilon)$; если же оценка $\tilde{q}_i$ по модулю содержит только один сомножитель указанного типа, то это слагаемое, умноженное на $\sqrt{\varepsilon}$ включаем в $\pi_{i-1}(\tau, \varepsilon)$. Кроме того, переменную ζ, входящую в выражение для q_i, заменим на $\sqrt{\varepsilon}\tau$.

В качестве примера напишем выражение для $\pi_1(\tau, \varepsilon)$, сформированное по указанному принципу:

$$\begin{aligned}
\pi_1(\tau, \varepsilon) = \Big[-2\Big(\frac{d\overline{u}_1}{dx}(0)\sqrt{\varepsilon}\zeta + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_2(0)\Big)\Pi_0(\tau) - h'(0)\zeta\Pi_0^2(\tau) + \\
+ \sqrt{\varepsilon}\Big(f_1\big(0, \overline{u}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0\big) - f_1\big(0, \overline{u}_0(0), 0\big)\Big)\Big]_{\zeta = \sqrt{\varepsilon}\tau} = \\
= -2\Big(\frac{d\overline{u}_1}{dx}(0)\varepsilon\tau + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_2(0)\Big)\Pi_0(\tau) - h'(0)\sqrt{\varepsilon}\tau\Pi_0^2(\tau) + \\
+ \sqrt{\varepsilon}\Big(f_1\big(0, \overline{u}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0\big) - f_1\big(0, \overline{u}_0(0), 0\big)\Big).
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что в случае стандартного алгоритма было бы $\pi_1(\tau, \varepsilon) = 0$.

Начальное условие для $\Pi_i(\tau)$ следует из (9):

$$\Pi_i(0) = -\overline{u}_i(0) \tag{16}$$

Решение уравнения (14) с начальным условием (16) имеет вид:

$$\Pi_i(\tau) = -\Phi(\tau)\Phi^{-1}(0)\overline{u}_i(0) + \Phi(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi^{-1}(s)\pi_i(s,\varepsilon)ds\,, \tag{17}$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{d\Pi_0}{d\tau}(\tau) = -\left[\Pi_0^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}k\Pi_0(\tau)\right]. \tag{18}$$

Чтобы доказать, что все функции $\Pi_i(\tau),\ i \geq 1$, имеют такое же трехзонное поведение, как и Π_0, введем *эталонную* (оценочную) функцию:

$$\Pi_\varkappa(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}, \quad \tau \geq 0, \quad \varkappa \in (0,k], \quad k = 2\overline{u}_1(0) > 0.$$

Заметим, что функция $\Pi_\varkappa$ имеет такой же вид как функция Π_0 (см. (13)), и, следовательно, убывание функции $\Pi_\varkappa$ с ростом τ имеет такой же трехзонный характер как и убывание Π_0. Очевидно, что при всех $\varkappa \in (0,k)$ справедливо неравенство

$$\Pi_0(\tau) \leq c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \geq 0, \tag{19}$$

где c – некоторая постоянная. В дальнейшем различные постоянные типа c будем обозначать той же буквой c, иногда через c_1, c_2.

Оказывается, что следующие пограничные функции Π_i, $i \geq 1$, имеют аналогичную оценку.

Лемма. *Все функции $\Pi_i(\tau)$, $i = 0,1,\ldots,n$, где n – любое фиксированное натуральное число, имеют оценку вида*

$$\left|\Pi_i(\tau)\right| \leq c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \geq 0, \tag{20}$$

где положительные числа c и $\varkappa$, вообще говоря, различные для различных i, $0 < \varkappa < k$, причем $\varkappa$ можно взять сколь угодно близким к k, при этом c зависит от $\varkappa$.

Доказательство. Для $\Pi_0(\tau)$ оценка (20) верна в силу (19). Докажем оценку (20) для $\Pi_1(\tau)$.

Функция $\Pi_1(\tau)$ выражается формулой (17) при $i = 1$, а для $\Phi(\tau)$ и $\pi_1(\tau,\varepsilon)$ имеем выражения (18) и (15). Из (18) следуют очевидные оценки:

$$c_1\left(\Pi_0^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right) \leq \left|\Phi(\tau)\right| \leq$$
$$\leq c_2\left(\Pi_0^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right) \leq c\,\Pi_0(\tau) \leq c\,\Pi_\varkappa(\tau)\,, \tag{21}$$

В силу правого неравенства для первого слагаемого в правой части (17) имеет место оценка вида (20):

$$\big|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(0)\overline{u}_1(0)\big| \le c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \ge 0\,. \tag{22}$$

Получим теперь оценку для функции $\pi_1(\tau,\varepsilon)$, используя выражение (15), неравенство

$$\Big|f_1\big(0,\overline{u}_0(0)+\Pi_0(\tau),0\big) - f_1\big(0,\overline{u}_0(0),0\big)\Big| = \big|f_{1u}^*\Pi_0(\tau)\big| \le c\,\Pi_0(\tau)$$

и оценку (19):

$$\begin{aligned}\big|\pi_1(\tau,\varepsilon)\big| &\le c\left[(\varepsilon\tau+\sqrt{\varepsilon})\Pi_0(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\tau\Pi_0^2(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right] \le \\ &\le c\left[(\varepsilon\tau+\sqrt{\varepsilon})\Pi_\varkappa(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\tau\Pi_\varkappa^2(\tau)\right], \quad \tau \ge 0\,,\end{aligned} \tag{23}$$

где $\varkappa$ можно взять сколь угодно близким к k.

Воспользуемся тем, что

$$\sqrt{\varepsilon}\tau\cdot e^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau} = \sqrt{\varepsilon}\tau\cdot e^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa_1\tau}\cdot e^{-\sqrt{\varepsilon}(\varkappa-\varkappa_1)\tau} \le ce^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa_2\tau}\,,$$

где $0<\varkappa_2=\varkappa-\varkappa_1<\varkappa$, и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sqrt{\varepsilon}\tau\Pi_\varkappa(\tau) &= \frac{\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}\tau)\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)} \le \\ &\le c\,\frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa_2\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa_2\tau)} = c\Pi_{\varkappa_2}(\tau)\,.\end{aligned}$$

Итак,

$$\sqrt{\varepsilon}\tau\Pi_\varkappa(\tau) \le c\,\Pi_{\varkappa_2}(\tau), \qquad \tau \ge 0,$$

причем $\varkappa_2$ можно взять сколь угодно близким к $\varkappa$, при этом число c тем больше, чем меньше $\varkappa-\varkappa_2$. Из (23) теперь получаем:

$$|\pi_1(\tau,\varepsilon)| \le c\left(\Pi_{\varkappa_2}^2(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_{\varkappa_2}(\tau)\right), \qquad \tau \ge 0.$$

Для упрощения записи обозначим число $\varkappa_2$ буквой $\varkappa$. Таким образом,

$$|\pi_1(\tau,\varepsilon)| \le c\left(\Pi_\varkappa^2(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(\tau)\right), \qquad \tau \ge 0,$$

а для $\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)$ из оценок (21) следует неравенство:

$$|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)| \le c\,\frac{\Pi_0^2(\tau)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)}{\Pi_0^2(s)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(s)}, \qquad 0 \le s \le \tau < \infty.$$

Поэтому для второго слагаемого в правой части (17) при $i = 1$ получаем:

$$|\widetilde{\Pi}_1(\tau)| = \left|\Phi(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi^{-1}(s)\pi_1(s,\varepsilon)ds\right| \le$$
$$\le c\left(\Pi_0^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right)\int\limits_0^\tau \frac{\Pi_\varkappa^2(s) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0^2(s) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(s)}ds\,.$$

Далее, воспользуемся тем, что

$$\frac{\Pi_\varkappa^2(s) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0^2(s) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(s)} = \frac{\Pi_\varkappa(s) + \sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(s) + \sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)} \le c\,\frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}, \qquad s \ge 0\,.$$

Оценку

$$\frac{\Pi_\varkappa(s) + \sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(s) + \sqrt{\varepsilon}} \le c, \qquad s \ge 0 \tag{24}$$

получим ниже.

Следовательно,

$$|\widetilde{\Pi}_1(\tau)| \le c\left(\Pi_0^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right) \cdot \int\limits_0^\tau \frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}ds = c\left(I_1 + I_2\right)$$

где

$$I_1 = \Pi_0^2(\tau)\int\limits_0^\tau \frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}ds, \qquad I_2 = \sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\int\limits_0^\tau \frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}ds.$$

Получим оценки для I_1 и I_2. Запишем I_1 в виде

$$I_1 = \Pi_0(\tau)\Pi_\varkappa(\tau)\int\limits_0^\tau \left[\frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}\right]\left[\frac{\Pi_0(\tau)}{\Pi_\varkappa(\tau)}\right]ds.$$

Так как (см. 13)

$$\Pi_0(s) \ge c_1\,\frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}ks)}{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}ks)}, \qquad s \ge 0, \tag{25}$$

то

$$\frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)} \le \frac{1}{c_1}\exp[\sqrt{\varepsilon}(k-\varkappa)s] \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}ks)}{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa s)} \le$$
$$\le c\,\exp(-\sqrt{\varepsilon}(k-\varkappa)s), \qquad s \ge 0, \qquad k - \varkappa > 0, \tag{26}$$

поскольку
$$\frac{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}ks)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa s)} \le c_2, \qquad s \ge 0, \tag{27}$$
(эта оценка также будет доказана ниже).

Аналогично получается неравенство
$$\frac{\Pi_0(\tau)}{\Pi_\varkappa(\tau)} \le c_2 \exp[-\sqrt{\varepsilon}(k-\varkappa)\tau], \qquad \tau \ge 0. \tag{28}$$

Следовательно
$$\int\limits_0^\tau \left[\frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}\right] \cdot \left[\frac{\Pi_0(\tau)}{\Pi_\varkappa(\tau)}\right] ds \le c \int\limits_0^\tau \exp[-\sqrt{\varepsilon}(k-\varkappa)(\tau-s)]ds \le \tau.$$

Поэтому
$$I_1 \le c\,\Pi_0(\tau)\cdot\big(\tau\Pi_\varkappa(\tau)\big),$$
а так как
$$\tau\Pi_\varkappa(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\tau\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)} \le c, \qquad \tau \ge 0 \tag{29}$$
(ниже эта оценка будет доказана), то
$$I_1 \le c\,\Pi_0(\tau) \le c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \ge 0\,.$$

Перейдем к оценке I_2, записав I_2 в виде
$$I_2 = \sqrt{\varepsilon}\,\Pi_\varkappa(\tau)\int\limits_0^\tau \left[\frac{\Pi_\varkappa(s)}{\Pi_0(s)}\right]\left[\frac{\Pi_0(\tau)}{\Pi_\varkappa(\tau)}\right]ds\,.$$

Используя оценки (25) и (27), получаем:
$$I_2 \le c\,\Pi_\varkappa(\tau)\int\limits_0^\tau \sqrt{\varepsilon}\exp[-\sqrt{\varepsilon}(k-\varkappa)(\tau-s)]ds =$$
$$= \frac{c}{k-\varkappa}\Pi_\varkappa(\tau)\exp[-\sqrt{\varepsilon}(k-\varkappa)(\tau-s)]\Big|_0^\tau \le \frac{c}{k-\varkappa}\Pi_\varkappa(\tau)\,.$$

Итак, $I_2 \le c\,\Pi_\varkappa(\tau)$, $\tau \ge 0$, и, следовательно,
$$|\widetilde{\Pi}_1(\tau)| \le c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \ge 0\,.$$

Учитывая такую же оценку для первого слагаемого в правой части (17) (см. (22)), окончательно получаем:

$$|\Pi_1(\tau)| \le c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \ge 0\,.$$

Далее по индукции. Допустим, что оценка (20) верна для $\Pi_j(\tau)$ с номерами $j < i$. Тогда, учитывая принцип формирования функции $\pi_i(\tau,\varepsilon)$, приходим к оценке для $\pi_i(\tau,\varepsilon)$ такого же вида, как оценка для $\pi_1(\tau,\varepsilon)$:

$$|\pi_i(\tau,\varepsilon)| \le c\left(\Pi_\varkappa^2(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(\tau)\right), \qquad \tau \ge 0\,,$$

а в силу этой оценки таким же образом, как для $\Pi_1(\tau)$, получается оценка (20) для $\Pi_i(\tau)$:

$$|\Pi_i(\tau)| \le c\,\Pi_\varkappa(\tau), \qquad \tau \ge 0\,.$$

Лемма доказана.

Доказательство вспомогательных оценок (24), (27), (29).

Напомним эти оценки, заменив s на τ :

$$\frac{\Pi_\varkappa(\tau) + \sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}} \le c, \qquad \tau \ge 0\,, \tag{24}$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)} \le c_2, \qquad \tau \ge 0, \tag{27}$$

$$\tau\Pi_\varkappa(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}\tau\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)} \le c, \qquad \tau \ge 0\,. \tag{29}$$

Начнем с оценки (27).

$$\psi(\tau,\varepsilon) := \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon} + \underbrace{[1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)]}_{\ge 0}} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + [\ge 0]}}_{\le 1} + \frac{1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon} + [1 - \exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)]} \le$$

$$\le 1 + \frac{1 - \exp(-kt)}{1 - \exp(-\varkappa t)} = 1 + F(t),$$

где

$$F(t) = \frac{1 - e^{-kt}}{1 - e^{-\varkappa t}} \quad , \quad t \ge 0, \qquad k > \varkappa.$$

Так как $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \frac{k}{\varkappa} > 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = 1$, $F(t) > 1$ и непрерывна на полупрямой $(0, +\infty)$, если положить $F(0) = \frac{k}{\varkappa}$, то существует $\max\limits_{0\le t<+\infty} F(t) =: M_F$, и, следовательно, $\psi(\tau,\varepsilon) \le 1 + M_F$, что и доказывает оценку (27).

Докажем теперь оценку (24).

$$\Pi_\varkappa(\tau) + \sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)} + \sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+1)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)},$$

а для $(\Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon})$, используя (25), получаем оценку снизу

$$\Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon} \ge c_1 \frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)} + \sqrt{\varepsilon} \ge$$

$$\ge \underbrace{\min(c_1, 1)}_{c_2} \cdot \left[\frac{\sqrt{\varepsilon}\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)} + \sqrt{\varepsilon}\right] =$$

$$= c_2 \frac{\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}+1)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}.$$

Следовательно, учитывая оценку (27), получаем:

$$\frac{\Pi_\varkappa(\tau)+\sqrt{\varepsilon}}{\Pi_0(\tau)+\sqrt{\varepsilon}} \le \frac{1}{c_2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}k\tau)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau)} = \frac{1}{c_2}\psi(\tau,\varepsilon) \le c.$$

Тем самым оценка (24) доказана.

Докажем оценку (29).

$$\tau\Pi_\varkappa(\tau) = \frac{t\exp(-\varkappa t)}{\sqrt{\varepsilon}+1-\exp(-\varkappa t)} \le \frac{t\exp(-\varkappa t)}{1-\exp(-\varkappa t)} =: g(t),$$

где $t = \sqrt{\varepsilon}\tau \ge 0$.

Так как $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \dfrac{1}{\varkappa}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, $g(t) \ge 0$ и непрерывна при $t \ge 0$, если положить $g(0) = \dfrac{1}{\varkappa}$, то существует $\max\limits_{0\le t\le+\infty} g(t) =: M_g$, и, следовательно, $\tau\Pi_\varkappa(\tau) \le M_g$, что и доказывает оценку (29).

Обоснование построенной асимптотики.

Обозначим через $U_n(x,\varepsilon)$ частичную сумму построенного ряда (3):

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i/2} \cdot \left(\overline{u}_i(x) + \Pi_i\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right).$$

Теорема 2. *Если выполнены условия 1–4, то для достаточно малых ε задача (1),(2) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, и справедливо равенство (для любого $n = 0, 1, 2, \dots$)*

$$u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}), \qquad x \in [0,a]\,. \tag{30}$$

Доказательство. Докажем теорему с помощью метода дифференциальных неравенств.

Нижнее решение задачи (1), (2) возьмем в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - M\varepsilon^{\frac{n}{2}}, \tag{31}$$

где $n \geq 2$, M – положительное число, которое выберем ниже.

Получим оценку для $L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon \dfrac{d\underline{U}}{dx} - f(x, \underline{U}, \varepsilon)$.

$$L_\varepsilon \underline{U} = \varepsilon \frac{dU_n}{dx} - f\big(x, U_n - M\varepsilon^{n/2}, \varepsilon\big) =$$

$$= \Big[\varepsilon \frac{dU_n}{dx} - f\big(x, U_n, \varepsilon\big)\Big] - \Big[f\big(x, U_n - M\varepsilon^{n/2}, \varepsilon\big) - f\big(x, U_n, \varepsilon\big)\Big] =$$

$$= L_\varepsilon U_n - \Big[f_u\big(x, U_n, \varepsilon\big) \cdot \big(-M\varepsilon^{n/2}\big) + \frac{1}{2} f^*_{uu}\big(M\varepsilon^{n/2}\big)^2\Big], \tag{32}$$

где производная f^*_{uu} берется в некоторой промежуточной точке, $|f^*_{uu}| \leq c_1$. В силу алгоритма построения ряда (3) справедливо равенство

$$L_\varepsilon U_n = O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}), \qquad x \in [0,a]\,,$$

т.е. $|L_\varepsilon U_n| \leq c_2 \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}$ при $x \in [0,a]$, где постоянная c_2 не зависит от ε и, что важно, не зависит от M.

Далее,

$$f_u\big(x, U_n, \varepsilon\big) = -2h(x)\big(U_n - \varphi(x)\big) + \varepsilon f_{1u}\big(x, U_n, \varepsilon\big) =$$

$$= -2h(x)\big(\sqrt{\varepsilon}\,\overline{u}_1(x) + \Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\,\Pi_1(\tau)\big) + O(\varepsilon).$$

Так как $h(x) > 0$, $\overline{u}_1(x) > 0$ при $x \in [0,a]$, и $\Pi_0(\tau) > 0$ при $\tau \geq 0$, то для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$f_u(x, U_n, \varepsilon) \leq -c_0\sqrt{\varepsilon} \quad \text{при} \quad x \in [0,a],$$

где $c_0 > 0$ и не зависит от ε. Из (32) теперь получаем:

$$L_\varepsilon \underline{U} \leq c_2\, \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} - c_0\, M \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2}\, c_2\, M^2\, \varepsilon^n =$$

$$= M\, \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{c_2}{M} - c_0 + \frac{1}{2}\, c_1\, M\, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}\right]. \tag{33}$$

Возьмем столь большое M, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{c_2}{M} - \dfrac{c_0}{2} < 0$. Так как $n \geq 2$, то $\dfrac{n-1}{2} \geq \dfrac{1}{2} > 0$, и поэтому для выбранного M при достаточно малых ε будет выполнено неравенство $-\dfrac{c_0}{2} + \dfrac{1}{2}\, c_1\, M\, \varepsilon^{\frac{n-1}{2}} < 0$. Следовательно, правая часть в (33) будет отрицательной, т.е.

$$L_\varepsilon \underline{U} < 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, a]\,. \tag{34}$$

Итак, функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$, определенная равенством (31), для достаточно большого M и достаточно малых ε удовлетворяет неравенству (34).

Кроме того, так как $U_n(0, \varepsilon) = u^0$ (в силу (10) и (16)), то

$$\underline{U}(0, \varepsilon) = U_n(0, \varepsilon) - M\varepsilon^{n/2} = u^0 - M\varepsilon^{n/2} < u^0.$$

Таким образом, функция $\underline{U}(x, \varepsilon)$ является нижним решением задачи (1), (2).

Аналогично доказывается, что функция

$$\overline{U}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + M\varepsilon^{n/2} \tag{35}$$

для достаточно большого M и достаточно малых ε является верхним решением задачи (1), (2).

Следовательно, для достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1),(2), и справедливы неравенства

$$\overline{U}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \overline{U}(x, \varepsilon), \qquad x \in [0, a]\,.$$

Из этих неравенств и вида (31) и (35) нижнего и верхнего решений следует асимптотическое равенство

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n/2}).$$

Запишем это равенство, заменив n на $n+1$:

$$u(x, \varepsilon) = U_{n+1}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})\,, \tag{36}$$

и воспользуемся тем, что

$$U_{n+1}(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + \varepsilon^{\frac{n+1}{2}} \big(\overline{u}_{n+1}(x) + \Pi_{n+1}(\tau)\big) = \\ = U_n(x, \varepsilon) + O\big(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\big)\,.$$

Тогда из (36) следует равенство

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O\big(\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\big), \qquad x \in [0, a]\,,$$

т.е. равенство (30) доказано для $n \geq 2$.

Запишем это равенство для $n = 2$:

$$u(x,\varepsilon) = U_2(x,\varepsilon) + O\bigl(\varepsilon^{3/2}\bigr)\,. \tag{37}$$

Так как

$$U_2(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + \varepsilon\bigl(\overline{u}_2(x) + \Pi_2(\tau)\bigr) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon)\,,$$

то из (37) следует равенство

$$u(x,\varepsilon) = U_1(x,\varepsilon) + O(\varepsilon), \qquad x \in [0,a]\,, \tag{38}$$

а так как $U_1(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon})$, то из (38) получаем

$$u(x,\varepsilon) = U_0(x,\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}), \qquad x \in [0,a]\,.$$

Следовательно, равенство (30) выполняется для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$. Теорема 2 доказана.

Задачи.

Проверьте выполнение условий теоремы 2 и постройте асимптотику вида (30) при $n = 1$ для решения $u(x,\varepsilon)$ задачи Коши.

Задача 3.3.1.

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{du}{dx} = -(u-x)^2 + \varepsilon(u+2), && 0 \leq x \leq 1\,;\\ &u(0,\varepsilon) = 1\,. \end{aligned}$$

Задача 3.3.2.

$$\begin{aligned} &\varepsilon\frac{du}{dx} = -(u-\sin x)^2 + \varepsilon(u+1+\cos x), && 0 \leq x \leq \pi\,;\\ &u(0,\varepsilon) = 1\,. \end{aligned}$$

Изобразите графики функций $u = u(x,\varepsilon)$ и $u = \bar{u}_0(x)$.

Глава 4. Сингулярно возмущенные краевые задачи

§1. Метод дифференциальных неравенств в двухточечных краевых задачах

4.1.1. Теорема существования решения краевой задачи

Рассмотрим двухточечную краевую задачу с граничными условиями Дирихле (u – скалярная функция):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x,u), \qquad 0 < x < 1\,; \tag{1}$$

$$u(0) = u^0, \qquad\qquad u(1) = u^1\,. \tag{2}$$

Поставим вопрос о существовании ее решения. Одним из подходов в исследовании этого вопроса является так называемый *метод стрельбы*. Он состоит в следующим: вместо краевых условий (2) зададим начальные условия:

$$u(0) = u^0, \qquad \frac{du}{dx}(0) = k, \tag{3}$$

где k – произвольное число, и попробуем подобрать число k так, чтобы решение начальной задачи (1), (3) удовлетворило краевому условию (2) в точке $x = 1$.

Если решение задачи (1),(3) существует на отрезке $[0,1]$ и непрерывно зависит от параметра k, и если для какого-то значения k_1 параметра k решение $u_1(x)$ задачи (1),(3) удовлетворяет неравенству $u_1(1) < u^1$, а для какого-то значения k_2 решение $u_2(x)$ задачи (1), (3) удовлетворяет неравенству $u_2(1) > u^1$, то существует такое $k \in (k_1, k_2)$, при котором решение $u(x)$ задачи (1), (3) удовлетворяет условию $u(1) = u^1$ и, следовательно, функция $u(x)$ является решением краевой задачи (1), (2). Метод стрельбы используют иногда при численном решении краевой задачи: решают начальную задачу ("стреляют") с некоторым значением k и смотрят, что получилось на правом конце отрезка – "недолет"(т.е. $u(1) < u^1$) или "перелет"(т.е. $u(1) > u^1$); в зависимости от этого выбирают новое значение k и решают начальную задачу с этим k, и так до тех пор, пока "не попадут в цель"(т.е. пока не будет выполнено равенство $u(1) = u^1$ с желаемой точностью).

Возможность реализации метода стрельбы зависит от свойств функции $f(x,u)$. Рассмотрим теорему, в которой существенным свойством функции $f(x,u)$ является ее ограниченность.

Теорема 1. *Если функция $f(x,u)$ непрерывна, ограничена, и удовлетворяет условию Липшица по переменной u в полосе $P = \{(x,u) : 0 \le x \le 1,\ u \in R\}$, то для любых u^0 и u^1 краевая задача (1), (2) имеет решение.*

Доказательство. Из условий на функцию $f(x,u)$ следует, что для любого значения k начальная задача (1),(3) имеет единственное решение $u(x,k)$, и это решение непрерывно зависит от параметра k.

Подставим это решение в уравнение (1) и полученное тождество проинтегрируем дважды от 0 до x, используя начальные условия (3). Получим:

$$u(x,k) = u^0 + kx + \int\limits_0^x dx \int\limits_0^s f(t,u(t,k))\,dt.$$

При $x = 1$ это равенство принимает вид

$$u(1,k) = u^0 + k + \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s f(t,u(t,k))\,dt. \tag{4}$$

Так как по условию $f(x,u)$ – ограниченная функция в полосе P, то существует положительное число M, такое, что

$$|f(x,u)| < M, \qquad (x,u) \in P.$$

Используя это неравенство, из (4) получаем:

$$u^0 + k - \frac{1}{2}M < u(1,k) < u^0 + k + \frac{1}{2}M.$$

Возьмем $k = k_1$ таким, что $u^0 + k_1 + \frac{1}{2}M < u^1$, а $k = k_2$ таким, что $u^0 + k_2 - \frac{1}{2}M > u^1$. Тогда

$$u(1,k_1) < u^1, \qquad u(1,k_2) > u^1.$$

Отсюда следует (в силу непрерывной зависимости $u(1,k)$ от параметра k), что существует значение $k \in (k_1,k_2)$, такое, что $u(1,k) = u^1$.

Таким образом, функция $u(x,k)$ при указанном значении k является решением краевой задачи (1), (2). Теорема 1 доказана .

Замечание. Отметим еще раз, что существенным условием в теореме 1 было условие ограниченности функции $f(x,u)$ во всей полосе P. Это условие делает класс функций $f(x,u)$, к которым применима теорема 1, весьма узким. Даже линейная функция $f(x,u) = u$ не попадает в этот класс.

4.1.2. Метод дифференциальных неравенств в краевых задачах

Другим методом в исследовании вопроса о существовании решения краевой задачи (1), (2) является метод дифференциальных неравенств. Одними из первых в этом направлении были результаты японского математика Нагумо [9], развившего идеи Чаплыгина применительно к краевым задачам.

Чтобы сформулировать теорему Нагумо, нам понадобятся понятия нижнего и верхнего решений для краевой задачи (1), (2).

Определение 1. Функции $\underline{U}(x)$ и $\overline{U}(x)$ из класса $C^2(0,1)\cap C[0,1]$ называются соответственно *нижним и верхним решениями* задачи (1), (2), если они удовлетворяют неравенствам

$$L\underline{U} := \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - f\big(x, \underline{U}(x)\big) \geq 0 \geq L\overline{U}, \qquad 0 < x < 1\,, \tag{5}$$

$$\underline{U}(0) \leq u^0 \leq \overline{U}(0), \qquad \underline{U}(1) \leq u^1 \leq \overline{U}(1)\,. \tag{6}$$

Нижнее и верхнее решения называются *упорядоченными*, если

$$\underline{U}(x) \leq \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1\,.$$

Замечание. Отметим, что в отличие от задачи Коши нижнее и верхнее решения $\underline{U}(x)$ и $\overline{U}(x)$ краевой задачи (1),(2) могут быть не упорядоченными, т.е. могут не удовлетворять неравенству $\underline{U}(x) \leq \overline{U}(x)$ при $0 \leq x \leq 1$. В качестве примера такой ситуации рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &u'' + \pi^2 u = 0, \qquad &&0 < x < 1\,, \\ &u(0) = 0, &&u(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Функции $\underline{U}(x) = 2\sin\pi x$ и $\overline{U}(x) = \sin\pi x$ удовлетворяют, очевидно, неравенствам (5),(6) (для этих функций неравенства (5),(6) становятся равенствами), но при этом $\underline{U}(x) \geq \overline{U}(x)$ при $0 \leq x \leq 1$.

Теорема 2 (Нагумо). *Пусть существуют упорядоченные нижнее* $\underline{U}(x)$ *и верхнее* $\overline{U}(x)$ *решения задачи (1), (2), и пусть функция* $f(x,u)$ *непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной* u *в области* $D = \{(x,u) : 0 \leq x \leq 1,\ \underline{U}(x) \leq u \leq \overline{U}(x)\}$. *Тогда существует решение* $u(x)$ *задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам*

$$\underline{U}(x) \leq u(x) \leq \overline{U}(x), \qquad 0 \leq x \leq 1\,. \tag{7}$$

Доказательство. Продолжим функцию $f(x,u)$ на всю полосу $P = \{(x,u) : 0 \leq x \leq 1,\ u \in R\}$, введя функцию $g(x,u)$ следующим образом:

$$
g(x,u)=\begin{cases}
f\bigl(x,\underline{U}(x)\bigr)+\dfrac{u-\underline{U}(x)}{1+u^2} \\
\text{при}\quad (x,u)\in D^{(-)}=\left\{(u,x):0\le x\le 1,\ u<\underline{U}(x)\right\}, \\
f(x,u)\quad \text{при}\quad (x,u)\in D\,, \\
f\bigl(x,\overline{U}(x)\bigr)+\dfrac{u-\overline{U}(x)}{1+u^2} \\
\text{при}\quad (x,u)\in D^{(+)}=\left\{(u,x):0\le x\le 1,\ u>\overline{U}(x)\right\}.
\end{cases}
$$

Убедимся в том, что функция $f = g(x,u)$ непрерывна в полосе P, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по переменной u. Её непрерывность очевидна, ограниченность следует из непрерывности и существовании пределов при $u \to -\infty$ и при $u \to +\infty$ (эти пределы соответственно равны $f(x,\underline{U}(x))$ и $f(x,\overline{U}(x))$). В области D функция $g(x,u)$ равна $f(x,u)$ и, следовательно, удовлетворяет условию Липшица по переменной u с постоянной Липшица, равной некоторому числу N_1 (в силу требования к функции $f(x,u)$). В областях $D^{(-)}$ и $D^{(+)}$ функция $g(x,u)$ имеет ограниченную производную по переменной u:

$$
g_u(x,u)=\frac{1+2\underline{U}(x)\cdot u-u^2}{(1+u^2)^2}\quad \text{при}\quad (x,u)\in D^{(-)},
$$

$$
g_u(x,u)=\frac{1+2\overline{U}(x)\cdot u-u^2}{(1+u^2)^2}\quad \text{при}\quad (x,u)\in D^{(+)}.
$$

Из этих выражений следует, что в указанных областях $|g_u(x,u)| \le N_2$, где N_2 – некоторое положительное число. Поэтому во всей полосе P функция $g(x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной u с постоянной Липшица $N = \max(N_1, N_2)$.

Таким образом, функция $g(x,u)$ удовлетворяет в полосе P всем условиям, которые накладывались на правую часть уравнения (1) в теореме 1. Следовательно, согласно теореме 1, краевая задача

$$
\frac{d^2u}{dx^2}=g(x,u),\qquad 0<x<1\,; \tag{8}
$$

$$
u(0)=u^0,\qquad\qquad u(1)=u^1 \tag{2}
$$

имеет решение $u = u(x)$.

Докажем, что это решение удовлетворяет неравенствам (7), т.е. кривая $u = u(x)$, $x \in [0,1]$ лежит в области D, где $g(x,u) = f(x,u)$, и, значит, функция $u(x)$ является решением задачи (1), (2).

Предположим, что какое-то из неравенств (7) нарушается в некоторой точке $x^* \in (0,1)$ (отметим, что в граничных точках $x = 0$, $x = 1$ неравенства (7) выполняются в силу определения нижнего и верхнего решений, (см.(6)). Пусть, например,

$$u(x^*) < \underline{U}(x^*)\,.$$

Тогда функция $\underline{U}(x) - u(x)$ имеет в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$ положительный максимум, следовательно, $\underline{U}(x_0) - u(x_0) > 0$,

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big[\underline{U}(x) - u(x)\Big]_{x=x_0} = \frac{d^2\underline{U}(x)}{dx^2}(x_0) - \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) \le 0\,. \tag{9}$$

В точке x_0 для решения $u(x)$ выполняется равенство (8), т.е.

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_0) = g(x_0, u(x_0)) = f(x_0, \underline{U}(x_0)) + \frac{u(x_0) - \underline{U}(x_0)}{1 + u^2(x_0)}\,, \tag{10}$$

а для $\underline{U}(x)$ в силу (5) выполняется неравенство

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x_0) - f\big(x_0, \underline{U}(x_0)\big) \ge 0\,. \tag{11}$$

Вычитая из неравенства (11) равенство (10), получаем

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x_0) - \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) \ge \frac{\underline{U}(x_0) - u(x_0)}{1 + u^2(x_0)} > 0\,,$$

что противоречит неравенству (9).

Итак, решение $u(x)$ задачи (8), (2) удовлетворяет неравенствам (7) и, следовательно, является решением задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Пусть вместо краевых условий (2) заданы краевые условия Неймана

$$\frac{du}{dx}(0) = \nu_0, \qquad \frac{du}{dx}(1) = \nu_1\,. \tag{12}$$

Нижнее $\underline{U}(x)$ и верхнее $\overline{U}(x)$ решения задачи (1),(12) определяются как функции из класса $C^2(0,1) \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющие неравенствам (5) из определения 1 и граничным неравенствам

$$\frac{d\underline{U}}{dx}(0) \ge \nu_0 \ge \frac{d\overline{U}}{dx}(0), \qquad \frac{d\underline{U}}{dx}(1) \le \nu_1 \le \frac{d\overline{U}}{dx}(1). \tag{13}$$

В отношении существования решения задачи (1), (12) имеет место теорема, аналогичная теореме 2.

Замечание 2. Рассмотрим более общее уравнение по сравнению с (1)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\Big(x, u, \frac{du}{dx}\Big), \qquad 0 < x < 1\,. \tag{14}$$

В отличие от (1) правая часть в (14) зависит от $\dfrac{du}{dx}$. В вопросе разрешимости краевой задачи (14), (2) важную роль играет характер зависимости правой части уравнения (14) от $\dfrac{du}{dx}$ при $\Big|\dfrac{du}{dx}\Big| \to \infty$.

Пусть

$$\Big|f\Big(x, u, \frac{du}{dx}\Big)\Big| \le \varphi\Big(\Big|\frac{du}{dx}\Big|\Big) \quad \text{при} \quad \{x \in [0,1], \;\; u \in I, \;\; \Big|\frac{du}{dx}\Big| \ge 1\}\,,$$

где $\varphi(t)$ – положительная непрерывная функция при $t \ge 1$, I – некоторый интервал.

Определение 2. Если $\displaystyle\int_1^\infty \frac{u\,du}{\varphi(u)} = \infty$, то будем говорить что функция $f\Big(x, u, \dfrac{du}{dx}\Big)$ принадлежит *классу функций Нагумо.*

Этому классу принадлежат функции, растущие при $\Big|\dfrac{du}{dx}\Big| \to \infty$ не быстрее, чем $\Big|\dfrac{du}{dx}\Big|^2$.

Для задачи (14), (2) вводятся понятия нижнего и верхнего решений (определение, аналогичное определению 1), и имеет место теорема о существовании решения, аналогичная теореме 2, но при условии, что функция $f\Big(x, u, \dfrac{du}{dx}\Big)$ принадлежат классу Нагумо.

§2. Сингулярно возмущенная краевая задача с граничными условиями Неймана

Рассмотрим краевую задачу (u – скалярная функция, $\varepsilon > 0$ – малый параметр) с граничными условиями Неймана:

$$\varepsilon^2\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, \varepsilon), \qquad 0 < x < 1\,; \tag{1}$$

$$\frac{du}{dx}(0, \varepsilon) = \nu_0, \qquad \frac{du}{dx}(1, \varepsilon) = \nu_1\,. \tag{2}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Функция $f(x,u,\varepsilon)$ – достаточно гладкая в области $D = \{(x,u,\varepsilon) : x \in [0,1],\ u \in I,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]\}$, I – некоторый интервал, $\varepsilon_0 > 0$ – некоторое число. Имея в виду построение асимптотики произвольного порядка для решения задачи (1),(2), будем считать функцию $f(x,u,\varepsilon)$ бесконечно дифференцируемой в области D.

Условие 2. Вырожденное уравнение

$$f(x,u,0) = 0$$

имеет корень $u = \varphi(x)$, такой, что $\varphi(x) \in I$ при $x \in [0,1]$.

Условие 3. $\overline{f}_u(x) := f_u(x,\varphi(x),0) > 0$ при $x \in [0,1]$.

При этих условиях будет доказано (с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств), что для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, отличающееся от корня $\varphi(x)$ вырожденного уравнения на величину порядка $O(\varepsilon)$ на всем отрезке $x \in [0,1]$, т.е.

$$u(x,\varepsilon) = \varphi(x) + O(\varepsilon), \qquad x \in [0,1]\,.$$

Из написанного равенства следует теорема о предельном переходе:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \varphi(x), \qquad x \in [0,1]\,.$$

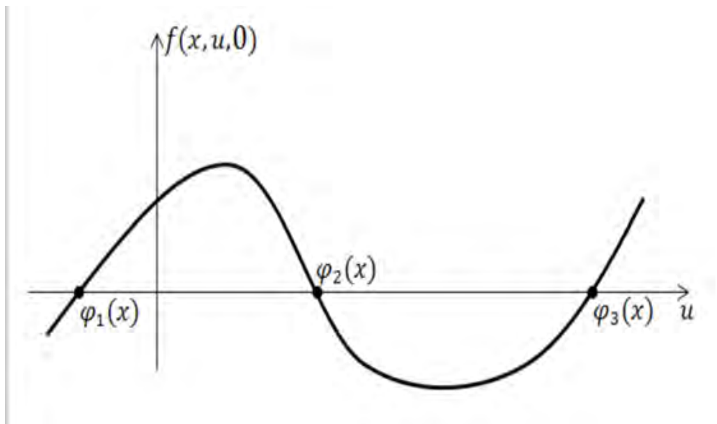


Рис. 4.1

Замечание. Вырожденное уравнение $f(x,u,0) = 0$ может иметь несколько корней, удовлетворяющих условию 3 (на рисунке 4.1 это $\varphi_1(x)$ и $\varphi_3(x)$). Для каждого такого корня существует решение $u_i(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_i(x,\varepsilon) = \varphi_i(x), \qquad x \in [0,1], \qquad i = 1,3\,.$$

В этом состоит принципиальное отличие краевых задач от задачи Коши.

Для решения $u(x,\varepsilon)$ будет построено также полное асимптотическое разложение в виде

$$u(x,\varepsilon)=\overline{u}(x,\varepsilon)+\Pi(\xi,\varepsilon)+\widetilde{\Pi}(\tilde{\xi},\varepsilon)\,, \tag{3}$$

где

$$\overline{u}(x,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{u}_i(x)$$

– регулярная часть асимптотического разложения,

$$\Pi(\xi,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i(\xi),\qquad \xi=\frac{x}{\varepsilon}$$

– погранслойный ряд, играющий роль в описании пограничного слоя в окрестности точки $x=0$,

$$\widetilde{\Pi}(\tilde{\xi},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}),\qquad \tilde{\xi}=\frac{1-x}{\varepsilon}$$

– погранслойный ряд, играющий роль в описании пограничного слоя в окрестности точки $x=1$.

Для нахождения коэффициентов $\overline{u}_i(x)$ и $\Pi_i(\xi)$, $\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$ регулярного и погранслойных рядов подставим искомое разложение (3) в уравнение (1) и заменим $f(x,\overline{u}+\overline{\Pi}+\widetilde{\Pi},\varepsilon)$ суммой $\overline{f}+\Pi f+\widetilde{\Pi}f$, где

$$\overline{f}=f\big(x,\overline{u}(x,\varepsilon),\varepsilon\big)\,,$$

$$\Pi f=f\big(\varepsilon\xi,\overline{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon)+\Pi(\xi,\varepsilon),\varepsilon\big)-\overline{f}\big(\varepsilon\xi,\overline{u}(\varepsilon\xi,\varepsilon),\varepsilon\big)\,,$$

$$\widetilde{\Pi}f=f\big(1-\varepsilon\tilde{\xi},\overline{u}(1-\varepsilon\tilde{\xi},\varepsilon)+\widetilde{\Pi}(\tilde{\xi},\varepsilon),\varepsilon\big)\,.$$

Полученное равенство

$$\varepsilon^2\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}+\frac{d^2\Pi}{d\xi^2}+\frac{d^2\widetilde{\Pi}}{d\tilde{\xi}^2}=\overline{f}+\Pi f+\widetilde{\Pi}f$$

разделим на три равенства для регулярной и двух погранслойных частей асимптотики

$$\varepsilon^2\frac{d^2\overline{u}}{dx^2}=\overline{f},\ \ x\in[0,1];\qquad \frac{d^2\Pi}{d\xi^2}=\Pi f,\ \ \xi>0;\qquad \frac{d^2\widetilde{\Pi}}{d\tilde{\xi}^2}=\widetilde{\Pi}f,\ \ \tilde{\xi}>0. \tag{4}$$

Подставим в эти равенства вместо $\overline{u}$, Π, $\widetilde{\Pi}$ их искомые разложения по степеням ε и разложим (формально) правые части равенств в ряды по степеням ε:

$$\overline{f}=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\overline{f}_i,\qquad \Pi f=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i f,\qquad \widetilde{\Pi}f=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\widetilde{\Pi}_i f.$$

Приравнивая теперь члены с одинаковыми степенями ε в обеих частях равенств, получаем три серии уравнений:

$$\overline{f}_0=0,\quad \overline{f}_1=0,\quad \overline{f}_i=\frac{d^2\overline{u}_{i-2}}{dx^2},\qquad x\in[0,1],\quad i=2,3,\ldots \tag{5}$$

$$\frac{d^2\Pi_i}{d\xi^2}=\Pi_i f,\quad \xi>0;\qquad \frac{d^2\widetilde{\Pi}_i}{d\xi^2}=\widetilde{\Pi}_i f,\quad \tilde{\xi}>0,\quad i=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Для нахождения пограничных функций $\Pi_i(\xi)$ и $\widetilde{\Pi}_i(\xi)$ понадобятся граничные условия. Подставляя выражение (3) для $u(x,\varepsilon)$ в граничные условия (2), получаем равенства

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{u}}{dx}(0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\Pi}{d\xi}(0,\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\widetilde{\Pi}}{d\xi}\Big(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\Big)=\nu_0\,,\\ \frac{d\overline{u}}{dx}(1,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\Pi}{d\xi}\Big(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\Big)-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\widetilde{\Pi}}{d\xi}(0,\varepsilon)=\nu_1\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Подставим в эти равенства вместо $\bar{u}$, Π, и $\widetilde{\Pi}$ их искомые разложения и приравняем члены с одинаковыми степенями ε в обеих частях равенств. Забегая вперед, отметим, что все функции $\Pi_i(\xi)$ и $\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$ и их производные будут иметь экспоненциальные оценки типа $|\Pi_i(\xi)|\le c\,e^{-\varkappa\xi}$, и поэтому $\Pi_i(1/\varepsilon)=O\big(e^{-\frac{\varkappa}{\varepsilon}}\big)=o(\varepsilon^N)$, и также $\widetilde{\Pi}_i(1/\varepsilon)=o(\varepsilon^N)$ для любого N, что позволяет пренебречь слагаемыми $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\Pi}{d\xi}\Big(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\Big)$ и $\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\widetilde{\Pi}}{d\xi}\Big(\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\Big)$ в левых частях равенств (7).

Применив стандартную процедуру, получим:

$$\begin{gathered}\frac{d\Pi_0}{d\xi}(0)=0,\qquad \frac{d\Pi_1}{d\xi}(0)=\nu_0-\frac{d\overline{u}_0}{dx}(0),\qquad \frac{d\Pi_i}{d\xi}(0)=-\frac{d\overline{u}_{i-1}}{dx}(0)\,,\\ i=2,3,\ldots\,;\\ \frac{d\widetilde{\Pi}_0}{d\tilde{\xi}}(0)=0,\qquad \frac{d\widetilde{\Pi}_1}{d\tilde{\xi}}(0)=-\nu_1+\frac{d\overline{u}_0}{dx}(1),\qquad \frac{d\widetilde{\Pi}_i}{d\tilde{\xi}}(0)=\frac{d\overline{u}_{i-1}}{dx}(1)\,,\\ i=2,3,\ldots\,.\end{gathered} \tag{8}$$

К этим условиям добавим стандартные условия стремления к нулю пограничных функций на бесконечности:

$$\Pi_i(\infty) = 0, \qquad \widetilde{\Pi}_i(\infty) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Рассмотрим теперь процедуру последовательного определения членов асимптотики. Из (5) получаем уравнение для $\overline{u}_0(x)$:

$$\overline{f}_0 := f\bigl(x, \overline{u}_0(x), 0\bigr) = 0\,.$$

В качестве решения этого уравнения возьмем функцию $\overline{u}_0(x) = \varphi(x)$, определенную условием 2.

Второе уравнение из (5) в развернутой записи имеет вид

$$\overline{f}_1 := \overline{f}_u(x)\overline{u}_1 + \overline{f}_\varepsilon(x) = 0,$$

где $\overline{f}_u(x) := f_u\bigl(x, \varphi(x), 0\bigr) > 0$ при $x \in [0,1]$ (см. условие 3), $\overline{f}_\varepsilon(x) = f_\varepsilon\bigl(x, \varphi(x), 0\bigr)$. Из этого уравнения находим:

$$\overline{u}_1 = -\overline{f}_\varepsilon(x) \cdot \overline{f}_u^{-1}(x)\,.$$

Аналогичным образом определяются функции $\overline{u}_i(x)$, $i = 2, 3, \ldots$ из последующих уравнений (5).

Из (6) при $i = 0$ получаем уравнение для функции $\Pi_0(\xi)$:

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = \Pi_0 f := f\bigl(0, \varphi(0) + \Pi_0, 0\bigr) - f\bigl(0, \varphi(0), 0\bigr), \qquad \xi > 0\,,$$

а из (8) и (9) следуют граничные условия

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi}(0) = 0, \qquad \Pi_0(\infty) = 0\,.$$

Очевидно, что $\Pi_0(\xi) = 0$ при $\xi \geq 0$, и таким же образом получаем $\widetilde{\Pi}_0(\tilde{\xi}) = 0$. Таким образом, для краевой задачи Неймана пограничные функции в нулевом приближении оказываются равными нулю.

При $i = 1$ из (6) имеем уравнение для $\Pi_1(\xi)$:

$$\frac{d^2\Pi_1}{d\xi^2} = \Pi_1 f := \bar{f}_u(0) \cdot \Pi_1, \qquad \xi > 0,$$

а из (8) и (9) следуют граничные условия

$$\frac{d\Pi_1}{d\xi}(0) = \nu_0 - \frac{d\overline{u}_0}{dx}(0), \qquad \Pi_1(\infty) = 0.$$

Решение этой задачи запишем в виде

$$\Pi_1(\xi) = \frac{\gamma_0}{k_0} \cdot e^{-k_0\xi}, \qquad \xi \geq 0,$$

где

$$\gamma_0 = \frac{d\overline{u}_0}{dx}(0) - \nu_0, \qquad k_0 = \sqrt{\overline{f}_u(0)} > 0\,.$$

Функция $\Pi_1(\xi)$ имеет, очевидно, экспоненциальную оценку

$$\bigl|\Pi_1(\xi)\bigr| \leq c\, e^{-\varkappa\xi}, \qquad \xi \geq 0, \tag{10}$$

где c и $\varkappa$ здесь и далее – подходящие положительные числа, не зависящие от ε. В разных оценках такого типа эти числа могут быть разными, но для упрощения записи будем обозначать их одними и теми же буквами c и $\varkappa$.

Таким же образом находим

$$\widetilde{\Pi}_1(\tilde{\xi}) = \frac{\gamma_1}{k_1} \cdot e^{-k_1\tilde{\xi}}, \qquad \tilde{\xi} \geq 0,$$

где

$$\gamma_1 = \nu_1 - \frac{d\overline{u}_0}{dx}(1), \qquad k_1 = \sqrt{\overline{f}_u(1)} > 0\,.$$

Функция $\widetilde{\Pi}_1(\tilde{\xi})$ имеет, очевидно, оценку типа (10).

При $i \geq 2$ для $\Pi_i(\xi)$ из (6), (8) и (9) получаем задачу

$$\frac{d^2\Pi_i}{d\xi^2} = \Pi_i f := \overline{f}_u(0) \cdot \Pi_i + \pi_i(\xi), \qquad \xi > 0\,;$$

$$\frac{d\Pi_i}{d\xi}(0) = -\frac{d\overline{u}_{i-1}}{dx}(0), \qquad \Pi_i(\infty) = 0\,,$$

где $\pi_i(\xi)$ рекуррентно выражается через функции $\Pi_j(\xi)$ с номерами $j < i$ и имеет оценку типа (10), если такую же оценку имеют функции $\Pi_j(\xi)$ при $j < i$.

Решение задачи для $\Pi_i(\xi)$ нетрудно выписать в явном виде, откуда следует, что $\Pi_i(\xi)$ имеет оценку типа (10).

Таким же образом определяются функции $\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$ при $i \geq 2$. Они также находятся в явном виде и имеют оценки типа (10). Итак, ряд (3) полностью построен.

Теорема 3. *Если выполнены условия 1–3, то для достаточно малых ε краевая задача (1), (2) имеет решение $u(x, \varepsilon)$, для которого справедливо асимптотическое равенство*

$$u(x, \varepsilon) = U_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [0, 1]\,, \tag{11}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n}\left[\overline{u}_i(x) + \Pi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \widetilde{\Pi}_i\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)\right] \tag{12}$$

– частичная сумма ряда (3).

<u>Доказательство.</u> Для доказательства теоремы применим асимптотический метод дифференциальных неравенств. С этой целью, используя построенный ряд (3), сконструируем нижнее и верхнее решения задачи (1),(2) следующим образом. Положим

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1} z(x,\varepsilon), \qquad \overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1} z(x,\varepsilon)\,, \tag{13}$$

где функция $U_n(x,\varepsilon)$ определена формулой (12),

$$z(x,\varepsilon) = M + \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right), \tag{14}$$

M и k – положительные числа (не зависящие от ε), выбор которых уточним ниже.

Докажем, что для достаточно малых ε числа M и k можно выбрать так, что функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$ будут нижним и верхним решениями задачи (1),(2), т.е. будут удовлетворять неравенствам (5) из §1 (при этом нужно учесть, что в нашей задаче $L_\varepsilon u = \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} - f(x,u,\varepsilon)$) и неравенствам (13) из §1.

Начнем с проверки выполнения неравенств (13) из §1. В силу (8) имеет место

$$\frac{dU_n}{dx}(0,\varepsilon) = \nu^0 + \varepsilon^n \frac{d\overline{u}_n}{dx}(0),$$

а из формулы (14) следует, что

$$\frac{dz}{dx}(0,\varepsilon) = -\frac{k}{\varepsilon}\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}\right)\right].$$

Поэтому

$$\frac{d\underline{U}}{dx}(0,\varepsilon) = \nu^0 + \varepsilon^n\left[\frac{d\overline{u}_n}{dx}(0) + k\big(1 - e^{-\frac{k}{\varepsilon}}\big)\right].$$

Очевидно, что при достаточно большом k сумма, заключенная в квадратные скобки, положительна и, следовательно, $\dfrac{d\underline{U}}{dx}(0,\varepsilon) > \nu^0$, т.е. выполнено первое из неравенств (13) в §1. Аналогично проверяется, что при достаточно большом k выполняются и остальные неравенства в (13) из §1.

Перейдем к проверке выполнения неравенств (5) из параграфа 1. В силу уравнений (5), (6) для функции $U_n(x,\varepsilon)$ справедливо равенство

$$L_\varepsilon U_n := \varepsilon^2 \frac{d^2 U_n}{dx^2} - f(x, U_n, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in (0,1).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \underline{U} = \varepsilon^2 \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} - f(x, \underline{U}, \varepsilon) = \left[\varepsilon^2 \frac{d^2 U_n}{dx^2} - f(x, U_n, \varepsilon) \right] - \\ - \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} \left(\varepsilon^{n+1} z(x,\varepsilon) \right) + \left[f(x, U_n, \varepsilon) - f(x, U_n - \varepsilon^{n+1} z, \varepsilon) \right] = \\ = O\left(\varepsilon^{n+1} \right) - \varepsilon^{n+1} k^2 \left[\exp\left(- \frac{kx}{\varepsilon} \right) + \right. \\ \left. + \exp\left(- \frac{k(1-x)}{\varepsilon} \right) \right] + f_u^* \cdot \varepsilon^{n+1} z(x,\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

где производная f_u^* берется в точке $\left(x, U_N - \Theta \varepsilon^{n+1} z, \varepsilon\right)$, Θ – некоторое число из интервала $0 < \Theta < 1$.

Так как

$$U_n - \Theta \varepsilon^{n+1} z = \overline{u}_0(x) + O(\varepsilon)\,,$$

то $f_u^* = \overline{f}_u(x) + O(\varepsilon)$ и, следовательно, в силу условия 3 для достаточно малых ε выполняется неравенство $f_u^* \geq \varkappa > 0$.

Поэтому, учитывая, что $z(x,\varepsilon) > M$, приходим к неравенству

$$L_\varepsilon \underline{U} > \varepsilon^{n+1} \left[O(1) - O(k^2) + \varkappa M \right].$$

При достаточно большом M сумма в квадратных скобках положительна, и, значит, для достаточно малых ε и достаточно большого M получаем неравенство

$$L_\varepsilon \underline{U} > 0, \qquad 0 < x < 1\,,$$

т.е. выполнено неравенство (5) из определения 1 для нижнего решения.

Аналогично проверяется, что для достаточно малых ε и достаточно большого M функция $\overline{U}(x,\varepsilon)$, определенная в (13), удовлетворяет неравенству (5) из §1 для верхнего решения. Таким образом, функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$ для достаточно малых ε и достаточно больших M и k являются нижним и верхним решениями задачи (1),(2). Упорядоченность $\underline{U}$ и $\overline{U}$ очевидна:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) < \overline{U}(x,\varepsilon), \qquad 0 < x < 1\,.$$

В силу теоремы Нагумо задача (1),(2) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \qquad 0 \le x \le 1\,,$$

Из вида (13) функций $\underline{U}$ и $\overline{U}$ следует, что

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad \overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})\,.$$

Поэтому такое же асимптотическое равенство имеет место для решения $u(x,\varepsilon)$, т.е. справедливо равенство (11). Теорема 3 доказана.

Задача.

Задача 4.2.1.

а) Проверьте выполнение условий теоремы 3 и постройте асимптотику вида (11) при $n = 1$ (т.е., с точностью $O(\varepsilon^2)$) для решения $u(x,\varepsilon)$ краевой задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} = -u(1 + \sin x - u) + \varepsilon u, & 0 < x < \pi\,; \\ \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=\pi} = \dfrac{1}{2}, \qquad \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=\pi} = 2. \end{cases}$$

б) Изобразите графики функций $u = U_1(x,\varepsilon)$ и $u = \bar{u}_0(x)$.

§3. Сингулярно возмущенная краевая задача с граничными условиями Дирихле

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для того же уравнения, что и в §2:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = f(x,u,\varepsilon), \qquad x \in [0,1]\,, \tag{1}$$

но теперь с граничными условиями Дирихле

$$u(0,\varepsilon) = u^0, \qquad u(1,\varepsilon) = u^1. \tag{2'}$$

Пусть выполнены условия 1–3 из §2, а также следующее условие, связанное с граничными значениями u^0 и u^1.

Условие 4.

$$\int\limits_{\varphi(0)}^{\nu} f(0,u,0)du > 0 \quad \text{при всех} \quad \nu \in (\varphi(0), u^0], \quad \text{либо} \quad u^0 = \varphi(0); \qquad (3)$$

$$\int\limits_{\varphi(1)}^{\nu} f(1,u,0)du > 0 \quad \text{при всех} \quad \nu \in (\varphi(1), u^1], \quad \text{либо} \quad u^1 = \varphi(1)\,.$$

Здесь $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ – значения функции $u = \varphi(x)$ (корня вырожденного уравнения $f(x,u,0) = 0$) в граничных точках $x = 0$ и $x = 1$. Как мы увидим в дальнейшем, условие 4 означает, что граничные значения u^0 и u^1 принадлежат области влияния (притяжения) корня $u = \varphi(x)$.

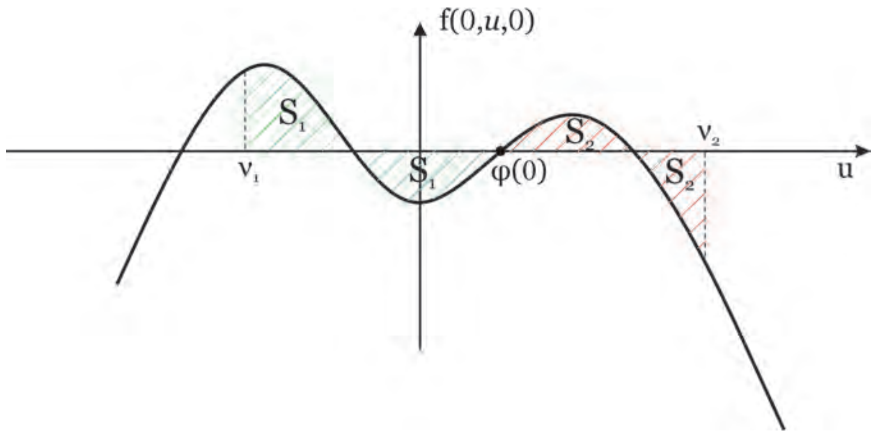


Рис. 4.2

Пример. На рисунке 4.2 изображен график функции $f(0,u,0)$. На оси u отмечены точки ν_1 и ν_2 такие, что

$$\int\limits_{\varphi(0)}^{\nu_i} f(0,u,0)du = 0, \qquad i = 1,2.$$

Для любого $u^0 \in (\nu_1, \nu_2)$ выполнено условие (3).

Асимптотическое разложение решения задачи (1), $(2')$ снова будем строить в виде:

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}(x,\varepsilon) + \Pi(\xi,\varepsilon) + \widetilde{\Pi}(\tilde{\xi},\varepsilon), \qquad (4)$$

где $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$ и $\tilde{\xi} = \dfrac{1-x}{\varepsilon}$ – погранслойные переменные.

Регулярная часть асимптотики

$$\overline{u}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overline{u}_i(x)$$

определяется точно так же, как в §2; в частности $\overline{u}_0(x) = \varphi(x)$.

Уравнение для $\Pi_0(\xi)$ – главного члена погранслойного ряда

$$\Pi(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i(\xi)$$

– имеет тот же вид, что и в §2

$$\frac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = f\big(0, \varphi(0) + \Pi_0, 0\big), \qquad \xi > 0\,, \tag{5}$$

но граничное условие при $\xi = 0$ следует теперь из равенства

$$\overline{u}(0,\varepsilon) + \Pi(0,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \big[\overline{u}_i(0) + \Pi_i(0)\big] = u^0$$

и поэтому имеет вид

$$\Pi_0(0) = u^0 - \overline{u}_0(0) = u^0 - \varphi(0)\,. \tag{6}$$

В качестве второго граничного условия возьмем, как и в §2 условие стремления $\Pi_0(\xi)$ к нулю при $\xi \to +\infty$

$$\Pi_0(+\infty) = 0\,. \tag{7}$$

Докажем, что в силу условия (3) задача (5), (7) имеет единственное монотонное на полупрямой $0 \le \xi < +\infty$ решение $\Pi_0(\xi)$, причем для $\Pi_0(\xi)$ справедлива экспоненциальная оценка:

$$|\Pi_0(\xi)| \le c\, e^{-\varkappa\xi}, \qquad \xi \ge 0\,. \tag{8}$$

Положив $\dfrac{d\Pi_0}{d\xi} = Q$, заменим уравнение (5) системой двух уравнений первого порядка

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = Q, \qquad \frac{dQ}{d\xi} = f(0, \varphi(0) + \Pi_0, 0) \tag{9}$$

и рассмотрим фазовую плоскость системы (9). Точка $(\Pi_0, Q) = (0, 0)$ на фазовой плоскости является точкой покоя системы (9).

Корни соответствующего характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ f_u(0,\varphi(0),0) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \overline{f}_u(0) = 0$$

равны $\pm\sqrt{\overline{f}_u(0)}$, поэтому точка покоя ($\Pi_0 = 0$, $Q = 0$) системы (9) является седлом.

Из этой системы следует уравнение

$$\frac{dQ}{d\Pi_0} = \frac{f(0,\varphi(0)+\Pi_0,0)}{Q}\,,$$

интегрируя которое, получаем уравнения фазовых траекторий

$$Q^2 = 2\int\limits_0^{\Pi_0} f(0,\varphi(0)+s,0)ds + c\,,$$

где c – произвольная константа. При $c = 0$ уравнение можно записать в виде

$$Q = \pm\sqrt{2\int\limits_0^{\Pi_0} f(0,\varphi(0)+s,0)ds} =: \pm F(\Pi_0). \tag{10}$$

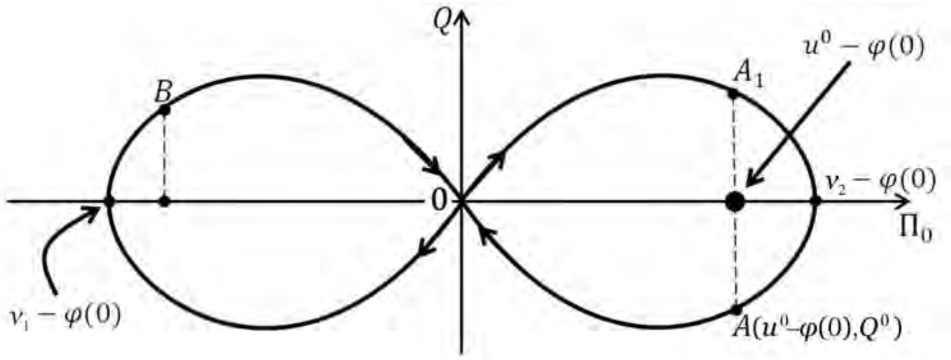


Рис. 4.3

Это уравнение определяет *сепаратрисы* – фазовые кривые, входящие в точку покоя ($\Pi_0 = 0, Q = 0$) и выходящие из нее. Для функции $f(0,u,0)$, имеющий вид, представленный на рис. 4.2, сепаратрисы (10) изображены на рис. 4.3. Стрелки указывают направление движения точки по сепаратрисе с ростом переменной ξ.

В силу условия (3) начальное значение функции $\Pi_0(\xi)$, т.е. число $\Pi_0(0) = u^0 - \varphi(0)$, лежит в интервале $(\nu_1 - \varphi(0), \nu_2 - \varphi(0))$.

Если $u^0 - \varphi(0) > 0$, то решение системы (9) с начальным условием $\Pi_0(0) = u^0 - \varphi(0)$, $Q(0) = Q^0$, где Q^0 – ордината точки A (см. рис. 4.3), изображается на фазовой плоскости отрезком AO сепаратрисы, при этом $\Pi_0(\xi)$ монотонно убывает с ростом ξ и удовлетворяет условию (7): $\Pi_0(\infty) = 0$. Заметим, что в этом случае система (9) имеет второе решение, удовлетворяющее условиям (6) и (7), оно изображается отрезком сепаратрисы, начинающимся в точке A_1, проходящим через точку A и входящим в точку покоя при $\xi \to \infty$, но при этом $\Pi_0(\xi)$ не является монотонной функцией ξ на всем промежутке $0 \leq \xi < +\infty$.

Если $u^0 - \varphi(0) < 0$, то монотонное решение задачи (5), (7) дает Π_0 – компонента решения системы (9), начальной точкой которого на фазовой плоскости является точка B (см. рис 4.3).

Наконец, если $u^0 - \varphi(0) = 0$, то $\Pi_0(\xi) = 0$.

Таким образом, при условии (3) задача (5) - (7) имеет единственное монотонное решение $\Pi_0(\xi)$.

Докажем, что для $\Pi_0(\xi)$ справедлива оценка (8). Для определенности рассмотрим случай, когда $u^0 - \varphi(0) > 0$. В этом случае монотонное решение задачи (5)-(7) будет убывающим, поэтому в правой части уравнения (10) возьмем $-F(\Pi_0)$ и, заменив Q на $\dfrac{d\Pi_0}{d\xi}$, получим уравнение:

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = -F(\Pi_0), \qquad \xi > 0\,.$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $\Pi_0(0) = u^0 - \varphi(0) =: \Pi^0$, приходим к равенству

$$\int\limits_{\Pi^0}^{\Pi_0(\xi)} \frac{ds}{F(s)} = -\xi\,, \tag{11}$$

которое неявным образом определяет искомую функцию $\Pi_0(\xi)$.

Несложные вычисления показывают, что

$$F'(0) = \sqrt{\overline{f}_u(0)},$$

и так как $\overline{f}_u(0) > 0$ и $F(s) > 0$ при $0 < s \leq u^0 - \varphi(0)$, то существует число $\varkappa > 0$ такое, что

$$F(s) \geq \varkappa s \quad \text{при} \quad 0 \leq s \leq u^0 - \varphi(0)\,.$$

Поэтому из уравнения (11) следует неравенство

$$\int\limits_{\Pi^0}^{\Pi_0(\xi)} \frac{ds}{\varkappa s} \le -\xi\,,$$

т.е. $\ln \Pi_0(\xi) - \ln \Pi^0 \le -\varkappa\xi$, откуда для $\Pi_0(\xi)$ получаем неравенство типа (8)

$$\Pi_0(\xi) \le \Pi^0 \exp(-\varkappa\xi), \qquad \xi \ge 0\,.$$

Для пограничных функций $\Pi_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots$ получаются задачи

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\Pi_i}{d\xi^2} = f_u(\xi)\Pi_i + \pi_i(\xi), \qquad \xi > 0\,;\\ &\Pi_i(0) = -\overline{u}_i(0), \qquad \Pi_i(\infty) = 0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

где $f_u(\xi) := f_u\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big)$, а функции $\pi_i(\xi)$ рекуррентно выражаются через $\Pi_j(\xi)$ с номерами $j < i$ и имеют экспоненциальные оценки типа (8), если такие же оценки имеют функции $\Pi_j(\xi)$ при $j < i$.

Решения задач (12) можно записать в явном виде:

$$\Pi_i(\xi) = -\Phi(\xi)\Phi^{-1}(0)\overline{u}_i(0) + \Phi(\xi) \int\limits_0^{\xi} \Phi^{-2}(s) \int\limits_{\infty}^{s} \Phi(t)\pi_i(t)\,dt\,ds\,, \tag{13}$$

где

$$\Phi(\xi) = \frac{d\Pi_0}{d\xi}(\xi) = -F\big(\Pi_0(\xi)\big)\,.$$

Используя выражение (10) для $F(\Pi_0)$, нетрудно доказать, что $\Phi(\xi)$ имеет экспоненциальную оценку типа (8), а явное выражение (13) дает возможность получить такую же оценку для $\Pi_i(\xi)$.

Члены $\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$ погранслойного ряда

$$\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$$

определяются аналогично функциям $\Pi_i(\xi)$ и имеют аналогичные экспоненциальные оценки.

Итак, мы рассмотрели алгоритм, позволяющий определить члены ряда (4) до любого номера n включительно. Как и ранее, обозначим через $U_n(x, \varepsilon)$ частичную сумму этого ряда (см. выражение (12) в §2). Отметим, что для $U_n(x, \varepsilon)$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$L_\varepsilon U_n := \varepsilon^2 \frac{d^2 U_n}{dx^2} - f(x, U_n(x, \varepsilon), \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1}), \qquad 0 < x < 1, \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
&U_n(0,\varepsilon) = u^0 + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \widetilde{\Pi}_i\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big) = u^0 + o(\varepsilon^N), \\
&U_n(1,\varepsilon) = u^1 + o\big(\varepsilon^N\big)\,,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где N – любое положительное число.

Равенство (14) следует из самого алгоритма получения уравнений для членов ряда (4), а равенства (15) справедливы для любого $N > 0$ в силу граничных условий для функций $\Pi_i(\xi)$ и $\widetilde{\Pi}_i(\tilde{\xi})$ в точках $\xi = 0$ и $\tilde{\xi} = 0$ (см.(6) и (12)) и экспоненциальных оценок для этих функций.

Теорема 4. *Если выполнены условия 1–4, то для достаточно малых ε задача (1), (2′) имеет решение $u(x,\varepsilon)$, для которого справедливо асимптотическое равенство*

$$
u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \qquad x \in [0,1], \tag{16}
$$

где $U_n(x,\varepsilon)$ – частичная сумма ряда (4).

Доказательство. Проведем доказательство теоремы с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, т.е. путем построения нижнего и верхнего решений задачи (1), (2′), используя ряд (4).

Нижнее и верхнее решения построим в виде

$$
\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1} z(x,\varepsilon), \quad \overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1} z(x,\varepsilon)\,, \tag{17}
$$

но функцию $z(x,\varepsilon)$ возьмем отличной от $z(x,\varepsilon)$ из §2, а именно

$$
z(x,\varepsilon) = M + P\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \widetilde{P}\Big(\frac{1-x}{\varepsilon}\Big)\,,
$$

где M – положительное число, не зависящее от ε, а $P(\xi)$ и $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$ – неотрицательные функции, выбор которых сделаем ниже, причем так, что они будут экспоненциально убывать при $\xi \to \infty$ и $\tilde{\xi} \to \infty$. Заметим, что $z(x,\varepsilon) > 0$ при $x \in [0,1]$, поэтому

$$
\underline{U}(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \qquad x \in [0,1]\,,
$$

а в силу (15) функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$ для достаточно малых ε удовлетворяют неравенствам

$$
\underline{U}(0,\varepsilon) < u^0 < \overline{U}(0,\varepsilon), \qquad \underline{U}(1,\varepsilon) < u^1 < \overline{U}(1,\varepsilon)\,,
$$

т.е. для функций $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$ выполнены неравенства (6) из определения нижнего и верхнего решений краевой задачи в §1.

Докажем теперь, что можно выбрать число M и функции $P(\xi)$ и $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$ так, что функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$, определенные формулами (17), будут удовлетворять неравенствам

$$L_\varepsilon \underline{U} := \varepsilon^2 \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - f\big(x, \underline{U}(x,\varepsilon), \varepsilon\big) \ge 0 \ge L_\varepsilon \overline{U}, \qquad 0 < x < 1. \tag{18}$$

Тем самым будут выполнены неравенства (5) из определения 1 в §1, и, следовательно, функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$ будут упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (2′).

Рассмотрим выражение $L_\varepsilon \underline{U}$ и преобразуем его следующим образом:

$$L_\varepsilon \underline{U} = \varepsilon^2 \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - f(x, \underline{U}(x,\varepsilon), \varepsilon) = \left[\varepsilon^2 \frac{d^2 U_n}{dx^2} - f(x, U_n, \varepsilon)\right] -$$

$$- \varepsilon^{n+1}\left(\frac{d^2 P}{d\xi^2} + \frac{d^2 \widetilde{P}}{d\tilde{\xi}^2}\right) - \Big\{f(x, \underline{U}, \varepsilon) - f(x, U_n, \varepsilon)\Big\}.$$

Выражение в квадратных скобках не зависит от M, $P(\xi)$, $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$ и равно $O\big(\varepsilon^{n+1}\big)$ (см. (14)), а выражение в фигурных скобках рассмотрим раздельно на промежутках $0 < x \le \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \le x < 1$.

На промежутке $0 < x \le \frac{1}{2}$, имея в виду экспоненциальную оценку

$$\widetilde{P}\big(\tilde{\xi}\big) \le c\, e^{-\varkappa \tilde{\xi}} = c\, e^{\varkappa \frac{x-1}{\varepsilon}},$$

получаем $\widetilde{P}\big(\frac{x-1}{\varepsilon}\big) = o\big(\varepsilon^N\big)$ для любого $N > 0$. Поэтому

$$-\Big\{f(x, \underline{U}, \varepsilon) - f(x, U_n, \varepsilon)\Big\} = -\Big\{f_u(x, U_n, \varepsilon)(\underline{U} - U_n) + O\big((\underline{U} - U_n)^2\big)\Big\} =$$

$$= \left[f_u\Big(x, \varphi(x) + \Pi_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), 0\Big) + O(\varepsilon)\right] \cdot \varepsilon^{n+1}\big(M + P(\xi)\big) + O(\varepsilon^{2n+2}) =$$

$$= \Big\{f_u\big(x, \varphi(x), 0\big) + f_u\Big[\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi) + \Pi_0(\xi), 0\big) - f_u\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi), 0\big)\Big]\Big\} \cdot \varepsilon^{n+1} M +$$

$$+ f_u\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi) + \Pi_0(\xi), 0\big) \cdot \varepsilon^{n+1} P(\xi) + O(\varepsilon^{n+2}) = \Big\{\varepsilon^{n+1} \overline{f}_u(x) M +$$

$$+ \varepsilon^{n+1}\Big[f_u\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big) - f_u\big(0, \varphi(0), 0\big) + O(\varepsilon\xi)\Pi_0(\xi)\Big] M\Big\} +$$

$$+ \varepsilon^{n+1}\Big[f_u\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big) + O(\varepsilon\xi)\Big] P(\xi) + O(\varepsilon^{n+2}) =$$

$$= \varepsilon^{n+1} \overline{f}_u(x) M + \varepsilon^{n+1}\big[f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\big] M + \varepsilon^{n+1} f_u(\xi) P(\xi) + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Здесь использованы введенное ранее обозначение

$$f_u(\xi) := f_u\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big)$$

и равенство $\varepsilon^{n+1}O(\varepsilon\xi)P(\xi) = O(\varepsilon^{n+2})$, справедливое в силу того, что функция $P(\xi)$ будет иметь экспоненциальную оценку.

Кроме того, мы воспользовались равенством

$$f_u\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi) + \Pi_0(\xi), 0\big) - f_u\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi), 0\big) =$$
$$= f_u\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big) - f_u\big(0, \varphi(0), 0\big) + O(\varepsilon\xi)\Pi_0(\xi)\,.$$

Докажем, что оно верно:

$$f_u\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi) + \Pi_0(\xi), 0\big) - f_u\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi), 0\big) =$$

$$= \int\limits_0^1 f_{uu}\big(\varepsilon\xi, \varphi(\varepsilon\xi) + s\Pi_0(\xi), 0\big)\, ds \cdot \Pi_0(\xi) =$$
$$= \int\limits_0^1 \Big(f_{uu}\big(0, \varphi(0) + s\Pi_0(\xi), 0\big) + O(\varepsilon\xi)\Big)\, ds \cdot \Pi_0(\xi) =$$

$$= \int\limits_0^1 f_{uu}\big(0, \varphi(0) + s\Pi_0(\xi), 0\big)\, ds \cdot \Pi_0(\xi) + O(\varepsilon\xi) \cdot \Pi_0(\xi) =$$

$$= f_u\big(0, \varphi(0) + \Pi_0(\xi), 0\big) - f_u\big(0, \varphi(0), 0\big) + O(\varepsilon\xi) \cdot \Pi_0(\xi)\,.$$

Отметим также, что последнее слагаемое $O(\varepsilon^{n+2})$ зависит от M. С учетом полученного равенства, а также равенств (14) и $\dfrac{d^2\widetilde{P}}{d\tilde{\xi}^2} = o(\varepsilon^N)$, выражение для $L_\varepsilon\underline{U}$ на промежутке $0 < x \le \frac{1}{2}$ запишем в виде

$$L_\varepsilon\underline{U} = O(\varepsilon^{n+1}) + \varepsilon^{n+1}\overline{f}_u(x)M -$$
$$- \varepsilon^{n+1}\left[\frac{d^2P}{d\xi^2} - f_u(\xi)P - \big(f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\big)M\right] + O(\varepsilon^{n+2})\,.$$

Определим теперь функцию $P(\xi)$ как решение задачи

$$\frac{d^2P}{d\xi^2} = f_u(\xi)P + g(\xi), \quad \xi > 0; \qquad P(0) = 0, \quad P(\infty) = 0, \tag{19}$$

где $g(\xi) = \big(f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\big)M - \Psi(\xi)$, а $\Psi(\xi)$ – какая-нибудь функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\big|f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\big|M \le \Psi(\xi) \le c\, e^{-\varkappa\xi}, \qquad \xi \ge 0\,. \tag{20}$$

Такая функция $\Psi(\xi)$ существует, поскольку

$$\left|f_u(\xi) - \overline{f}_u(0)\right| \le c\left|\Pi_0(\xi)\right|, \qquad \xi \ge 0\,.$$

В силу (20) $g(\xi) \le 0$ при $\xi \ge 0$. Поэтому решение $P(\xi)$ задачи (19), которое можно записать по формуле вида (13)

$$P(\xi) = \Phi(\xi)\int\limits_0^{\xi} \Phi^{-2}(s)\int\limits_{\infty}^{s} \Phi(t)g(t)\,dt\,ds\,, \tag{21}$$

является неотрицательным: $P(\xi) \ge 0$ при $\xi \ge 0$, и так как $|g(\xi)| \le c\,e^{-\varkappa\xi}$, то $P(\xi)$ имеет такую же экспоненциальную оценку.

С учетом уравнения (19) выражение для $L_\varepsilon \underline{U}$ на промежутке $0 < x \le \frac{1}{2}$ можно теперь записать в виде

$$L_\varepsilon \underline{U} = O(\varepsilon^{n+1}) + \varepsilon^{n+1}\overline{f}_u(x)M + \varepsilon^{n+1}\Psi(\xi) + O(\varepsilon^{n+2})\,. \tag{22}$$

Как уже было отмечено, слагаемое $O(\varepsilon^{n+1})$ в правой части равенства (22) не зависит M, а слагаемое $O(\varepsilon^{n+2})$ зависит от M. Так как $\overline{f}_u(x) > 0$, то число M можно выбрать таким, что сумма двух первых слагаемых в правой части (22) будет больше ε^{n+1} при $0 < x \le \frac{1}{2}$. При выбранном значении M для достаточно малых ε последнее слагаемое в правой части (22) будет меньше по абсолютной величине, чем ε^{n+1} и, следовательно, сумма первого, второго и последнего слагаемых будет положительной. Третье слагаемое $\varepsilon^{n+1}\Psi(\xi) \ge 0$, поскольку функция $\Psi(\xi)$ выбрана неотрицательной.

Таким образом, для достаточно большого M и достаточно малых ε на промежутке $0 < x \le \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $L_\varepsilon \underline{U} > 0$.

Аналогично доказывается, что это неравенство выполняется также на промежутке $\frac{1}{2} \le x < 1$. При этом функции $P(\xi)$ и $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$ меняются ролями: $P(\xi)$ и $\dfrac{d^2P}{d\xi^2}$ являются величинами порядка $o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0$, а функция $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$ определяется как решение задачи

$$\frac{d^2\widetilde{P}}{d\tilde{\xi}^2} = \widetilde{f}_u(\tilde{\xi})\widetilde{P} + \widetilde{g}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} > 0; \qquad \widetilde{P}(0) = 0, \quad \widetilde{P}(\infty) = 0\,,$$

где

$$\widetilde{f}_u(\tilde{\xi}) = f_u\bigl(1, \varphi(1) + \widetilde{\Pi}_0(\tilde{\xi}), 0\bigr), \qquad \widetilde{g}(\tilde{\xi}) = \bigl[\widetilde{f}_u(\tilde{\xi}) - \overline{f}_u(1)\bigr]\cdot M - \widetilde{\Psi}(\tilde{\xi})\,.$$

Функция $\widetilde{\Psi}(\tilde{\xi})$ удовлетворяет неравенствам

$$\bigl[\widetilde{f}_u(\tilde{\xi}) - \overline{f}_u(1)\bigr]\cdot M \le \widetilde{\Psi}(\tilde{\xi}) \le c\,e^{-\varkappa\tilde{\xi}}$$

и потому $\widetilde{g}(\tilde{\xi}) \le 0$ при $\tilde{\xi} > 0$.

Функция $\widetilde{P}(\tilde{\xi})$ выражается формулой, аналогичной (21), она неотрицательна и имеет экспоненциальную оценку $\widetilde{P}(\tilde{\xi}) \le c\, e^{-\varkappa\tilde{\xi}}$ при $\tilde{\xi} \ge 0$.

Аналогично (22) доказывается, что на промежутке $\frac{1}{2} \le x < 1$ справедливо асимптотическое равенство

$$L_\varepsilon \underline{U} = O(\varepsilon^{n+1}) + \varepsilon^{n+1} \overline{f}_u(x) M + \varepsilon^{n+1} \widetilde{\Psi}(\tilde{\xi}) + O(\varepsilon^{n+2})\,,$$

откуда и следует неравенство $L_\varepsilon \underline{U} > 0$ при $\frac{1}{2} \le x < 1$.

Итак,

$$L_\varepsilon \underline{U} > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < 1\,,$$

т.е. для $\underline{U}(x,\varepsilon)$ выполнено неравенство (18). Точно так же доказывается, что для достаточно большого M и достаточно малых ε выполняется неравенство (18) для $\overline{U}(x,\varepsilon)$.

Таким образом, функции $\underline{U}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$ являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (2$'$), откуда следует, что для достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ этой задачи, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \qquad x \in [0,1]\,,$$

а поскольку $\underline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$ и $\overline{U}(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$ (см. (17)), то $u(x,\varepsilon) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$, $x \in [0,1]$, т.е. справедливо равенство (16). Теорема 4 доказана.

Задача.

Задача 4.3.1.

а) Проверьте выполнение условий теоремы 4 и постройте асимптотику вида (16) при $n = 0$ (т.е., с точностью $O(\varepsilon)$) для решения краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2u}{dx^2} = -u \cdot (1 + \sin x - u) + \varepsilon u, \qquad 0 < x < \pi\,;$$
$$u(0,\varepsilon) = \frac{1}{2}, \qquad\qquad u(\pi,\varepsilon) = 2\,.$$

б) Изобразите графики функций $u = u(x,\varepsilon)$ и $u = \overline{u}_0(x)$.

Указания к решению задач

К задаче 3.2.1 из §2 Главы 3.

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{du}{dx} = -(u+x-2)(u-2x) + \varepsilon(u+1), & 0 \le x \le 1; \\ u(0,\varepsilon) = 1\,. \end{cases}$$

Введем обозначение: $f(x,u,\varepsilon) = -(u+x-2)(u-2x) + \varepsilon(u+1)$.

$$\varepsilon = 0: \quad -(u+x-2)(u-2x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 2-x\,[=\varphi_1(x)], \;\; u = 2x\,[=\varphi_2(x)]\,;$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \;\Leftrightarrow\; 2-x = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}, \quad \varphi_1\Big(\frac{2}{3}\Big) = \varphi_2\Big(\frac{2}{3}\Big) = \frac{4}{3}\,;$$

$$f_u(x,u,0) = -2u + (x+2);$$

$$f_u\big(x,\varphi_1(x),0\big) = -2+3x \begin{cases} <0, & 0 \le x < \dfrac{2}{3}\,, \\ >0, & \dfrac{2}{3} < x \le 1\,; \end{cases}$$

$$f_u\big(x,\varphi_2(x),0\big) = -3x+2 \begin{cases} >0, & 0 \le x < \dfrac{2}{3}\,, \\ <0, & \dfrac{2}{3} < x \le 1\,; \end{cases}$$

$$f_u\left(\frac{2}{3}, \varphi_i\Big(\frac{2}{3}\Big), 0\right) = 0\,;$$

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \le x \le \dfrac{2}{3}\,, \\ 2x, & \dfrac{2}{3} \le x \le 1\,. \end{cases}$$

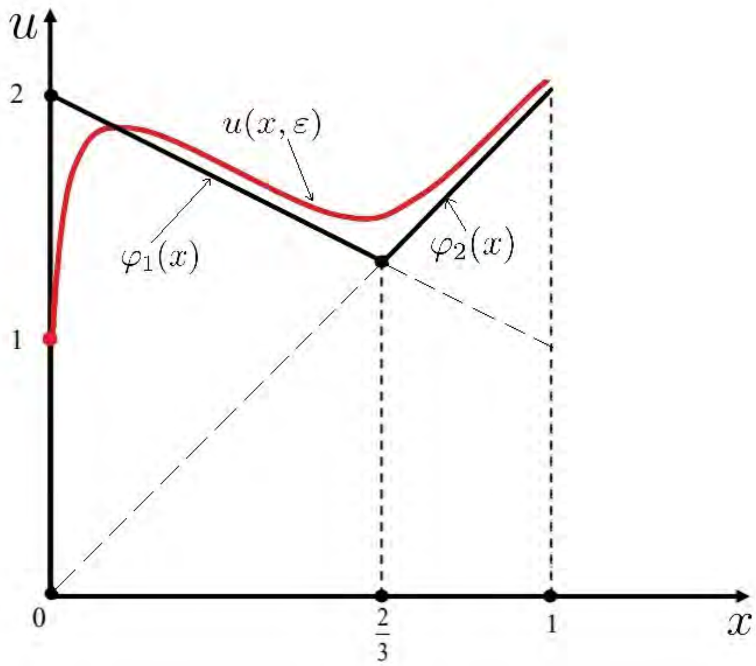


Рис. 5.1

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau} = -\Pi_0(\Pi_0 + 2), \qquad \tau \geq 0\,; \\ \Pi_0(0) = 1 - \varphi_1(0) = -1. \end{cases}$$

$$\Pi_0(\tau) = -\frac{2e^{-2\tau}}{1 + e^{-2\tau}}\,.$$

Условие 6: $\qquad \hat{f}_{uu}\Big(\dfrac{2}{3}\Big) = -2 < 0\,.$

Условие 7: $\qquad \hat{u}'\,\Big(\dfrac{2}{3} \pm 0\Big) - \hat{f}_\varepsilon\Big(\dfrac{2}{3}\Big) = \begin{cases} -1 - \Big(\dfrac{4}{3} + 1\Big) < 0\,, \\ -\Big(\dfrac{4}{3} + 1\Big) < 0\,. \end{cases}$

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} 2 - x - \dfrac{2\exp(-\frac{2x}{\varepsilon})}{1 + \exp(-\frac{2x}{\varepsilon})} + O(\varepsilon), & 0 \leq x \leq \dfrac{2}{3} - \delta\,, \\ \hat{u}(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), & \dfrac{2}{3} - \delta < x \leq 1\,. \end{cases}$$

Производная $\dfrac{du}{dx}(x,\varepsilon)$ обращается в нуль на гиперболе $\Gamma:\ f(x,u,\varepsilon) = 0$, т.е. $-(u + x - 2)(u - 2x) + \varepsilon(u + 1) = 0$, причем $f(x,u,\varepsilon) > 0$ между ветвями Γ_1 и Γ_2 гиперболы и $f(x,u,\varepsilon) < 0$ выше Γ_2 и ниже Γ_1.

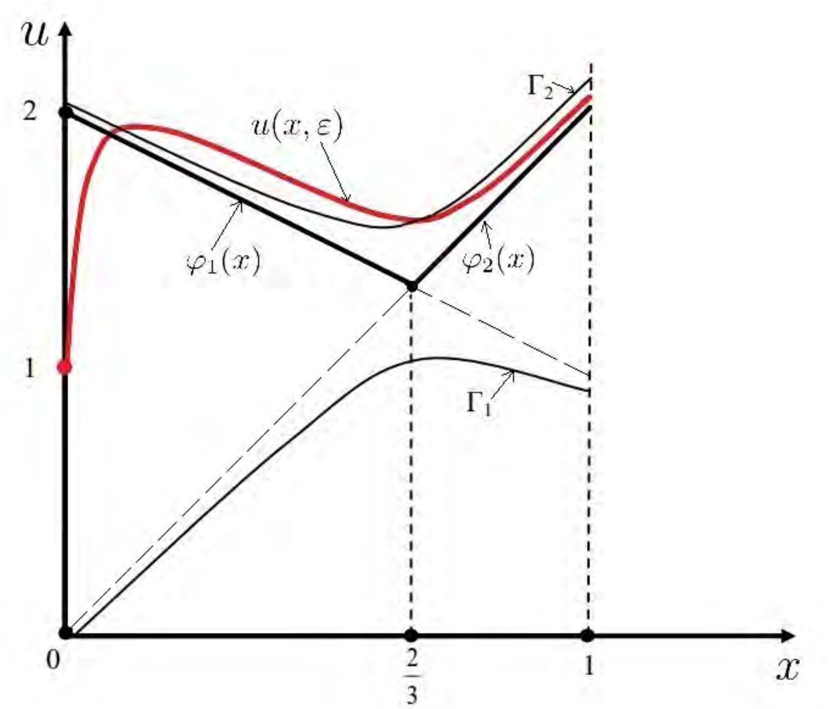


Рис. 5.2

Поэтому график решения $u = u(x,\varepsilon)$ проходит так, как показано на рисунке 5.2, т.е. не пересекает прямую $u = \varphi_2(x) = 2x$. Если бы такое произошло в некоторой точке $x_0 > \dfrac{2}{3}$, то $\dfrac{du}{dx}(x_0,\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}f\big(x_0, u(x_0,\varepsilon), \varepsilon\big) = \dfrac{1}{\varepsilon}f(x_0, 2x_0, \varepsilon) \geq \dfrac{4}{3} + 1 > 2$, что противоречит равенству $\varphi_2'(x_0) = 2$.

К задаче 3.2.2 из §2 Главы 3.

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{du}{dx} = -(u-1)(u-2\sin x) + \varepsilon(2u+x), \qquad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\,; \\ u(0,\varepsilon) = 2\,. \end{cases}$$

Введем обозначение: $f(x,u,\varepsilon) = -(u-1)(u-2\sin x) + \varepsilon(2u+x)\,.$

$$\varepsilon = 0: \quad -(u-1)(u-2\sin x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1\,[=\varphi_1(x)], \quad u = 2\sin x\,[=\varphi_2(x)]\,;$$

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 2\sin x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = \varphi_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1\,;$$

$$f_u(x,u,0) = -2u + 1 + 2\sin x\,;$$

$$f_u(x,\varphi_1(x),0) = -1 + 2\sin x \begin{cases} < 0, \ 0 \le x < \dfrac{\pi}{6}\,, \\ > 0, \ \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{2}\,; \end{cases}$$

$$f_u(x,\varphi_2(x),0) = 1 - 2\sin x \begin{cases} > 0, \ 0 \le x < \dfrac{\pi}{6}\,, \\ < 0, \ \dfrac{\pi}{6} < x \le \dfrac{\pi}{2}\,; \end{cases}$$

$$f_u\left(\frac{\pi}{6}, \varphi_i\left(\frac{\pi}{6}\right), 0\right) = 0\,;$$

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}\,, \\ 2\sin x, & \dfrac{\pi}{6} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

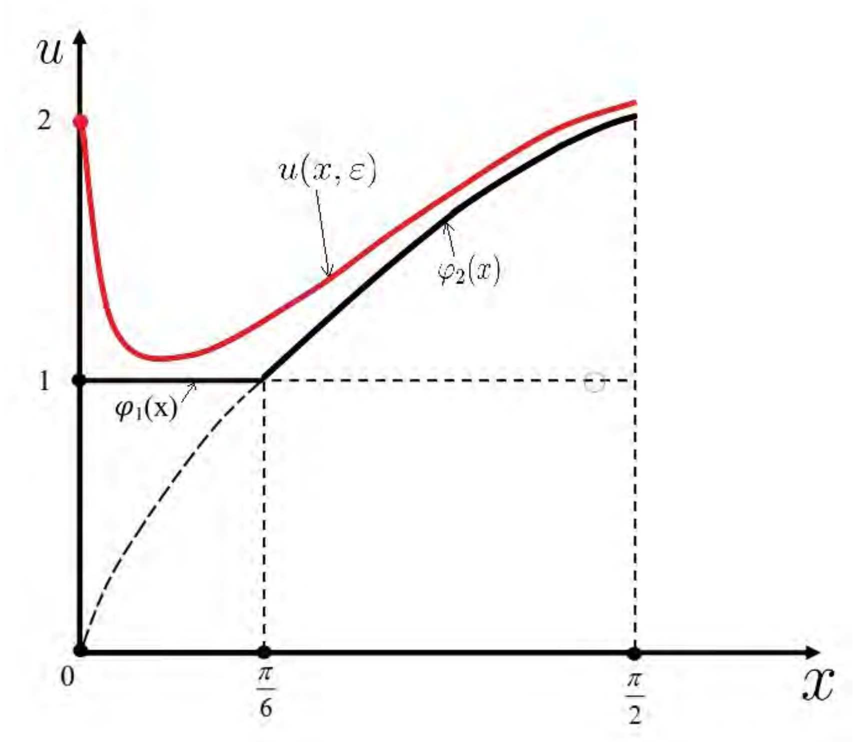


Рис. 5.3

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau} = -\Pi_0(\Pi_0+1), & \tau \geq 0\,; \\ \Pi_0(0) = 1\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_0(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{2-e^{-\tau}}\,.$$

Условие 6: $\quad \hat{f}_{uu}\Big(\dfrac{\pi}{6}\Big) = -2 < 0\,.$

Условие 7: $\quad \hat{u}'\,\Big(\dfrac{\pi}{6} \pm 0\Big) - \hat{f}_\varepsilon\Big(\dfrac{\pi}{6}\Big) = \begin{cases} 0 - \big(2+\dfrac{\pi}{6}\big) < 0\,, \\ \sqrt{3} - \big(2+\dfrac{\pi}{6}\big) < 0\,. \end{cases}$

$$u(x,\varepsilon) = \begin{cases} 1 + \dfrac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{2-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}} + O(\varepsilon), & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6} - \delta\,, \\ \hat{u}(x) + O(\sqrt{\varepsilon}), & \dfrac{\pi}{6} - \delta < x \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

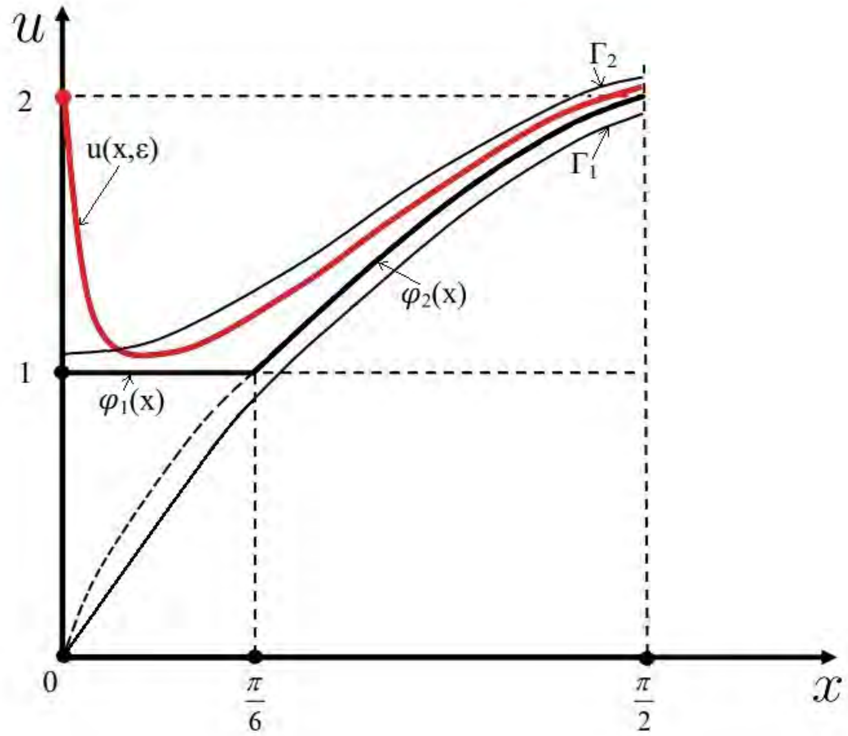


Рис. 5.4

Производная $\dfrac{du}{dx}(x,\varepsilon)$ обращается в нуль на кривой $\Gamma:\ f(x,u,\varepsilon)=0$, т.е. $-(u-1)(u-2\sin x)+\varepsilon(2u+x)=0$. Кривая Γ состоит из двух ветвей Γ_1 и Γ_2 (см. рисунок 5.4):

$$u = \frac{1}{2}\Big(1 + 2\sin x + 2\varepsilon \pm \sqrt{(1-2\sin x)^2 + 4\varepsilon(x+1+2\sin x) + 4\varepsilon^2)}\,\Big) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad u\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}\cdot\sqrt{2+\frac{\pi}{6}} + O(\varepsilon)\,.$$

Заметим, что $f(x,u,\varepsilon) > 0$ между ветвями Γ_1 и Γ_2 и $f(x,u,\varepsilon) < 0$ выше Γ_2 и ниже Γ_1. Поэтому график решения $u = u(x,\varepsilon)$ не может пересекать кривую $u = \varphi_2(x) = 2\sin x$ в точке $(x_0, \varphi_2(x_0))$ при $x_0 > \dfrac{\pi}{6}$, т.к. в такой точке мы имели бы

$$\frac{du}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot f\big(x_0, \varphi_2(x_0), \varepsilon\big) = 4\sin x_0 + x_0 > 2 + \frac{\pi}{6}\,,$$

а $\varphi_2'(x_0) = 2\cos x_0 < \sqrt{3}\,.$

К задаче 3.3.1 из §3 Главы 3.

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{du}{dx} = -(u-x)^2 + \varepsilon(u+2), \qquad 0 \le x \le 1\,; \\ u(0,\varepsilon) = 1\,. \end{cases}$$

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\overline{u}_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2}\Pi_i(\tau), \qquad \tau = \frac{x}{\varepsilon}\,.$$

$$\varepsilon\frac{d}{dx}\big(\overline{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1 + \ldots\big) = -\big(\overline{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1 + \ldots - x\big)^2 + \varepsilon\big(\overline{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1 + \ldots + 2\big)\,;$$

$$\varepsilon^0: \quad -(\overline{u}_0 - x)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{u}_0 = x =: \varphi(x)\,;$$

$$\varepsilon^1: \quad 1 = -\overline{u}_1^2 + x + 2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{u}_1 = \sqrt{x+1} > 0; \qquad \overline{u}_1(0) = 1, \quad \overline{u}_1'(0) = \frac{1}{2}\,;$$

$$\varepsilon^{3/2}: \quad \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = -2\sqrt{x+1}\cdot\overline{u}_2 + \sqrt{x+1} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{u}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4(x+1)} = \frac{2x+1}{4(x+1)}; \qquad \overline{u}_2(0) = \frac{1}{4}\,.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\big(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \ldots\big) &= -\big(\overline{u}_0(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots + \Pi_0(\tau) + \\ &+ \sqrt{\varepsilon}\Pi_1(\tau) + \ldots - \sqrt{\varepsilon}\xi\big)^2 + \big(\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots\big)^2 + \varepsilon\big(\Pi_0(\tau) + \ldots\big) = \\ &= -\Big[\big(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \ldots\big)^2 + 2\big(\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots\big)\big(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \ldots\big)\Big] + \\ &+ \varepsilon\big(\Pi_0(\tau) + \ldots\big), \qquad \text{где} \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\,. \end{aligned}$$

$$\Pi_0: \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau} = -\big(\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(0)\Pi_0\big) = -\big(\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0\big), \qquad \tau \ge 0\,; \\ \Pi_0(0) = 1\,, \end{cases}$$

$$\Pi_0(\tau) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{1 + 2\sqrt{\varepsilon} - e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}\,.$$

$$\Pi_1: \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_1}{d\tau} = -2\big(\Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(0)\big)\Pi_1 + \pi_1(\tau,\varepsilon), \qquad \tau \ge 0\,; \\ \Pi_1(0) = -\overline{u}_1(0) = -1\,, \end{cases}$$

$$\pi_1(\tau,\varepsilon) = \big(-2\overline{u}_1'(0)\varepsilon\tau + 2\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_2(0) + \sqrt{\varepsilon}\big)\Pi_0(\tau) = \sqrt{\varepsilon}\Big(-\sqrt{\varepsilon}\tau + \frac{3}{2}\Big)\Pi_0(\tau)\,;$$

$$\left|\pi_1(\tau,\varepsilon)\right| \le c\cdot\sqrt{\varepsilon}\Pi_\varkappa(\tau)\,,$$

где

$$\Pi_\varkappa(\tau)=\frac{\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau}}{1+\sqrt{\varepsilon}-e^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau}}\,.$$

$$\Pi_1(\tau)=-\Phi(\tau)\Phi^{-1}(0)+\int\limits_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\pi_1(s,\varepsilon)\,ds\,;$$

где

$$\Phi(\tau)=\frac{d\Pi_0}{d\tau}(\tau)=-\big(\Pi_0^2(\tau)+2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\big)=-\Pi_0(\tau)\big(\Pi_0(\tau)+2\sqrt{\varepsilon}\big)=$$
$$=-\frac{2\sqrt{\varepsilon}e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}\cdot\Big(\frac{2\sqrt{\varepsilon}e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}+2\sqrt{\varepsilon}\Big)=-\frac{4\varepsilon(1+2\sqrt{\varepsilon})e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}\,;$$

$$\Phi(0)=-(1+2\sqrt{\varepsilon})\,.$$

$$\Pi_1(\tau)=-\frac{4\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}+\frac{4\varepsilon(1+2\sqrt{\varepsilon})e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}\int\limits_0^\tau\frac{\sqrt{\varepsilon}\big(-\sqrt{\varepsilon}s+\frac{3}{2}\big)\Pi_0(s)}{\Pi_0(s)(\Pi_0(s)+2\sqrt{\varepsilon})}\,ds=$$
$$=-\frac{4\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}+\frac{4\varepsilon^{3/2}(1+2\sqrt{\varepsilon})e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}\int\limits_0^\tau\frac{\frac{3}{2}-\sqrt{\varepsilon}s}{\Pi_0(s)+2\sqrt{\varepsilon}}\,ds=$$
$$=-\frac{4\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}+\frac{2\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}\int\limits_0^\tau\Big(\frac{3}{2}-\sqrt{\varepsilon}s\Big)\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}s}\big)\,ds=$$
$$=\frac{2\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}\Big[-2+\int\limits_0^\tau\Big(\frac{3}{2}-\sqrt{\varepsilon}s\Big)\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}s}\big)\,ds\Big]=$$
$$=\frac{2\varepsilon e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\big(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)^2}\Big[-2+\frac{3}{2}(1+2\sqrt{\varepsilon})\tau-\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{2}\sqrt{\varepsilon}\tau^2-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\big(1-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\big)-\frac{1}{2}\tau e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\Big]\,;$$

$$|\Pi_1(\tau)|\le c\cdot\Pi_\varkappa(\tau),\qquad \tau\ge 0\,;$$

$$u(x,\varepsilon)=\overline{u}_0(x)+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x)+\Pi_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)+\sqrt{\varepsilon}\Pi_1\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)+O(\varepsilon)\,.$$

Вне пограничного слоя:

$$\frac{du(x,\varepsilon)}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}\big[-\varepsilon\overline{u}_1^2+\varepsilon(\overline{u}_0+2)+o(\varepsilon)\big]=-(x+1)+(x+2)+o(1)=1+o(1)>0\,,$$

$$u(x,\varepsilon)=\overline{u}_0+\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1+o(\sqrt{\varepsilon})=x+\sqrt{\varepsilon(x+1)}+o(\sqrt{\varepsilon})>x=\overline{u}_0(x),\qquad 0\le x\le 1\,.$$

Производная $\dfrac{du(x,\varepsilon)}{dx}$ обращается в нуль на кривой $f(x,u,\varepsilon)=0$, т.е.

$$-(u-x)^2+\varepsilon(u+2)=0\quad\Rightarrow\quad u^2-(2x+\varepsilon)u+x^2-2\varepsilon=0\quad\Rightarrow$$

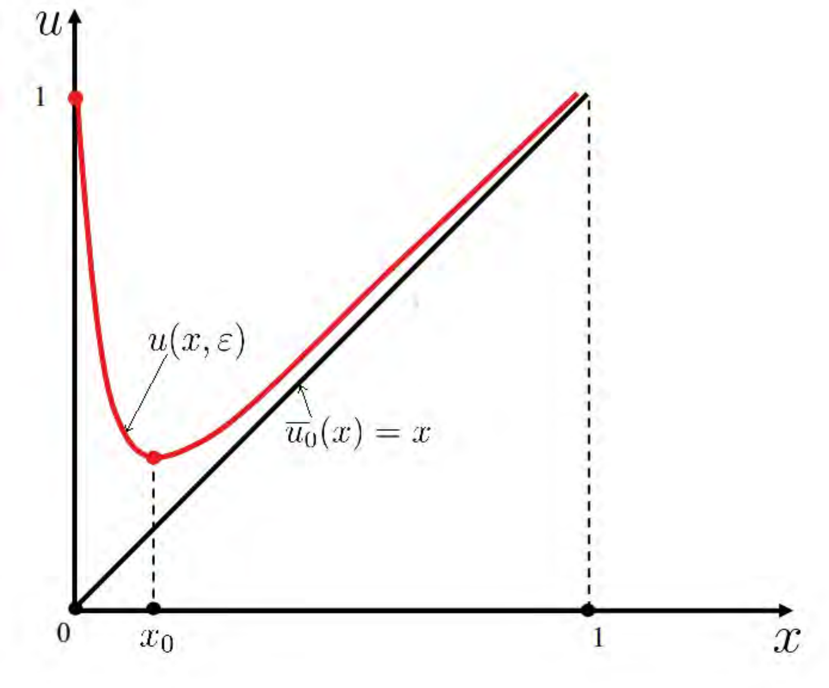


Рис. 5.5

$$\Rightarrow \quad u = x + \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{x^2 + \varepsilon x + \frac{\varepsilon^2}{4} - x^2 + 2\varepsilon} = x \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2+x} + O(\varepsilon)\,.$$

В точке x_0:

$$\frac{du}{dx}(x_0,\varepsilon) = 0, \qquad u(x_0,\varepsilon) = x_0 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2+x_0} + O(\varepsilon) > \overline{u}_0(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\,\overline{u}_1(x_0)\,;$$

$$\frac{du}{dx}(x,\varepsilon) = \begin{cases} <0, & x < x_0\,, \\ >0, & x > x_0\,. \end{cases}$$

Более короткое вычисление $\Pi_1(\tau)$:

$$\Pi_1(\tau) = -\Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) + \Phi(\tau)\int\limits_0^\tau \Phi^{-1}(s)\pi_1(s,\varepsilon)\,ds =$$

$$= \frac{\Pi_0^2(\tau) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)}{1+2\sqrt{\varepsilon}} + \left(\Pi_0^2(\tau) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right)\int\limits_0^\tau \frac{\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\varepsilon}s\right)\Pi_0(s)}{\Pi_0^2(s) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(s)}\,ds =$$

$$= \left(\Pi_0^2(\tau) + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0(\tau)\right)\left(\frac{1}{1+2\sqrt{\varepsilon}} + I\right),$$

где

$$I = \int\limits_0^\tau \frac{\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\varepsilon}s\right)}{\Pi_0(s) + 2\sqrt{\varepsilon}}\,ds = \sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \frac{\left(\frac{3}{2} - \sqrt{\varepsilon}s\right)\left(1 + 2\sqrt{\varepsilon} - e^{-2\sqrt{\varepsilon}s}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}(1+2\sqrt{\varepsilon})}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2(1+2\sqrt{\varepsilon})}\left[\frac{3}{2}(1+2\sqrt{\varepsilon})\tau - \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{2}\sqrt{\varepsilon}\tau^2 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1 - e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\right) - \frac{1}{2}\tau e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\right].$$

К задаче 3.3.2 из §3 Главы 3.

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{du}{dx} = -(u - \sin x)^2 + \varepsilon(u + 1 + \cos x), \qquad 0 \le x \le \pi\,; \\ u(0, \varepsilon) = 1\,. \end{cases}$$

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \overline{u}_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \Pi_i(\tau), \qquad \tau = \frac{x}{\varepsilon}\,.$$

$$\varepsilon \frac{d}{dx}(\overline{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1 + \ldots) = -(\overline{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1 + \ldots - \sin x)^2 + \\ + \varepsilon(\overline{u}_0 + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1 + \ldots + 1 + \cos x)\,;$$

$$\varepsilon^0: \qquad -(\overline{u}_0 - \sin x)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{u}_0 = \sin x =: \varphi(x)\,;$$

$$\varepsilon^1: \qquad \cos x = -\overline{u}_1^2 + \sin x + 1 + \cos x \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{u}_1 = \sqrt{1 + \sin x} > 0; \qquad \overline{u}_1(0) = 1, \quad \overline{u}_1'(0) = \frac{1}{2}\,;$$

$$\varepsilon^{3/2}: \qquad \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}} = -2\sqrt{\sin x + 1} \cdot \overline{u}_2 + \sqrt{\sin x + 1} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{u}_2 = \frac{1}{2} - \frac{\cos x}{4(\sin x + 1)} = \frac{2\sin x + 2 - \cos x}{4(\sin x + 1)}; \qquad \overline{u}_2(0) = \frac{1}{4}\,.$$

$$\frac{d}{d\tau}\big(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \ldots\big) = -\Big[\big(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \ldots\big)^2 + \\ + 2\big(\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(\sqrt{\varepsilon}\xi) + \ldots\big) \cdot \big(\Pi_0 + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1 + \ldots\big)\Big] + \varepsilon\big(\Pi_0(\tau) + \ldots\big)\,,$$

где

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\,;$$

$$\Pi_0: \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_0}{d\tau} = -\big(\Pi_0^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\Pi_0\big), \qquad \tau \ge 0\,; \\ \Pi_0(0) = 1\,, \end{cases}$$

$$\Pi_0(\tau) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau})}{1 + 2\sqrt{\varepsilon} - e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau})}\,.$$

$$\Pi_1: \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_1}{d\tau} = -2(\Pi_0(\tau) + \sqrt{\varepsilon})\Pi_1 + \pi_1(\tau, \varepsilon), \qquad \tau \ge 0\,; \\ \Pi_1(0) = -\overline{u}_1(0) = -1\,, \end{cases}$$

$$\pi_1(\tau, \varepsilon) = \big(-2\overline{u}_1'(0)\varepsilon\tau + 2\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_2(0) + \sqrt{\varepsilon}\big)\Pi_0(\tau) = \sqrt{\varepsilon}\bigg(-\sqrt{\varepsilon}\tau + \frac{3}{2}\bigg)\Pi_0(\tau)\,;$$

$$\big|\pi_1(\tau, \varepsilon)\big| \le c \cdot \sqrt{\varepsilon}\Pi_{\varkappa}(\tau)\,,$$

где

$$\Pi_{\varkappa}(\tau) = \frac{\sqrt{\varepsilon}e^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau}}{1+\sqrt{\varepsilon}-e^{-\sqrt{\varepsilon}\varkappa\tau}}\,.$$

$$\Pi_1(\tau) = -\Phi(\tau)\Phi^{-1}(0) + \int\limits_0^{\tau} \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\pi_1(s,\varepsilon)\,ds\,;$$

где

$$\Phi(\tau) = \frac{d\Pi_0}{d\tau}(\tau) = -\frac{4\varepsilon\bigl(1+2\sqrt{\varepsilon}\bigr)e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}}{\bigl(1+2\sqrt{\varepsilon}-e^{-2\sqrt{\varepsilon}\tau}\bigr)^2}\,;$$

$\Pi_1(\tau)$ имеет такое же выражение, как в предыдущей задаче:

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x) + \Pi_0\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr) + \sqrt{\varepsilon}\Pi_1\Bigl(\frac{x}{\varepsilon}\Bigr) + O(\varepsilon)\,.$$

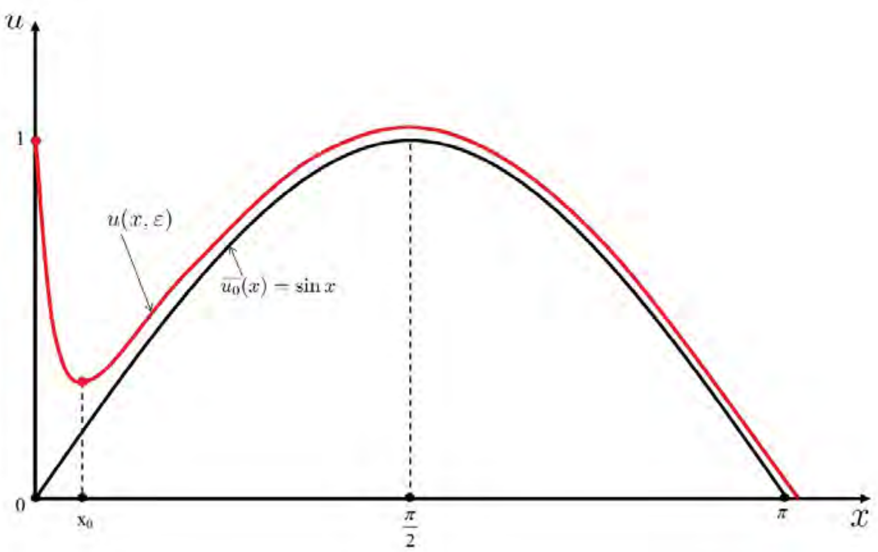


Рис. 5.6

Вне пограничного слоя:

$$\frac{du(x,\varepsilon)}{dx} = -\frac{1}{\varepsilon}\Bigl[\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x) + \varepsilon\overline{u}_2(x) + O\bigl(\varepsilon^{3/2}\bigr)\Bigr]^2 +$$

$$+\bigl(\overline{u}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x) + O(\varepsilon) + 1 + \cos x\bigr) =$$

$$= -\Bigl[\overline{u}_1^2(x) + 2\sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x)\overline{u}_2(x) + O(\varepsilon)\Bigr] + \overline{u}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x) + 1 + \cos x + O(\varepsilon) =$$

$$= -\Bigl(1 + \sin x + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{4+4\sin x - 2\cos x}{4\sqrt{1+\sin x}} + O(\varepsilon)\Bigr) +$$

$$+\sin x + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+\sin x} + 1 + \cos x + O(\varepsilon) =$$

$$= \cos x + \sqrt{\varepsilon}\,\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} + O(\varepsilon)\begin{cases} > 0, & x_0 < x < \dfrac{\pi}{2} - \delta\,, \\ < 0, & \dfrac{\pi}{2} + \delta < x \le \pi\,. \end{cases}$$

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x) + O(\varepsilon) =$$
$$= \sin x + \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{1+\sin x} + O(\varepsilon) > \sin x = \overline{u}_0(x), \qquad 0 \le x \le \pi\,.$$

Производная $\dfrac{du(x,\varepsilon)}{dx}$ обращается в нуль на кривой $f(x,u,\varepsilon) = 0$, т.е.

$$-(u-\sin x)^2 + \varepsilon(u + 1 + \cos x) = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad u^2 - (2\sin x + \varepsilon)u + \sin^2 x - \varepsilon(1+\cos x) = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad u = \sin x + \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\sin^2 x + \varepsilon \sin x + \frac{\varepsilon^2}{4} - \sin^2 x + 1 + \cos x} =$$
$$= \sin x \pm \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+\sin x+\cos x} + O(\varepsilon)\,.$$

В точке x_0 :

$$\frac{du}{dx}(x_0,\varepsilon) = 0\,,$$
$$u(x_0,\varepsilon) = \sin x_0 + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+\sin x_0+\cos x_0} + O(\varepsilon) > \overline{u}_0(x_0) + \sqrt{\varepsilon}\overline{u}_1(x_0)\,,$$

следовательно, график решения $u = u(x,\varepsilon)$ не пересекает график вырожденного решения $u = \sin x$.

К задаче 4.2.1 из §2 Главы 4.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{d^2u}{dx^2} = -u(1+\sin x - u) + \varepsilon u, & 0 < x < \pi\,; \\ \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=\pi} = \dfrac{1}{2}, \qquad \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=\pi} = 2. \end{cases}$$

$$\overline{u}: \qquad \overline{u}(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \varepsilon\overline{u}_1(x) + O(\varepsilon^2);$$
$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2}\big(\overline{u}_0 + \ldots\big) =$$
$$= -\big(\overline{u}_0 + \varepsilon\overline{u}_1 + O(\varepsilon^2)\big)\big(1 + \sin x - \overline{u}_0 - \varepsilon\overline{u}_1 + O(\varepsilon^2)\big) +$$
$$+\varepsilon\left(\overline{u}_0 + \varepsilon\overline{u}_1 + O(\varepsilon^2)\right).$$

$$\varepsilon^0: \qquad 0 = -\overline{u}_0\cdot\left(1+\sin x - \overline{u}_0\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \overline{u}_0 = 0\,, \\ \overline{u}_0 = 1 + \sin x\,; \end{array}\right.$$

$$\overline{u}_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{f}_u(x) = 2\overline{u}_0 - (1+\sin x) = -(1+\sin x) < 0,$$
$$\overline{u}_0 = 1 + \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{f}_u(x) = 1 + \sin x > 0, \qquad x\in[0,\pi].$$

Итак, $\quad \overline{u}_0(x) = 1 + \sin x.$

$$\varepsilon^1: \qquad 0 = \overline{u}_0\cdot\overline{u}_1 + \overline{u}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{u}_1(x) = -1.$$

$$\Pi: \qquad \Pi(\xi,\varepsilon) = \varepsilon\Pi_1(\xi) + O(\varepsilon^2), \qquad\qquad \xi = \frac{x}{\varepsilon}\,;$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\big(\varepsilon\Pi_1 + \dots\big) = -\big(\overline{u}_0(\varepsilon,\xi) + \varepsilon\overline{u}_1(\varepsilon,\xi) + \varepsilon\Pi_1 + O(\varepsilon^2)\big)\times$$

$$\times\big(\underbrace{1+\sin(\varepsilon\xi) - \overline{u}_0(\varepsilon\xi)}_{=0,\ \text{см. ур-е для } \overline{u}_0(x)} - \varepsilon\overline{u}_1(\varepsilon\xi) - \varepsilon\Pi_1 + O(\varepsilon^2)\big) +$$

$$+\big(\overline{u}_0(\varepsilon\xi) + \varepsilon\overline{u}_1(\varepsilon\xi) + O(\varepsilon^2)\big)\times$$

$$\times\big(\underbrace{1+\sin(\varepsilon\xi) - \overline{u}_0(\varepsilon\xi)}_{=0} - \varepsilon\overline{u}_1(\varepsilon\xi) + O(\varepsilon^2)\big) +$$

$$+\varepsilon^2\Pi_1 + O(\varepsilon^2)\,.$$

$$\varepsilon^1: \qquad \frac{d^2\Pi_1}{d\xi^2} = \overline{u}_0(0)\cdot\Pi_1 = \Pi_1, \qquad\qquad \xi > 0\,;$$

$$\frac{d\Pi_1}{d\xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{1}{2} - \frac{d\overline{u}_0}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{1}{2}, \qquad \Pi_1(\infty) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \Pi_1(\xi) = \frac{1}{2}e^{-\xi}\,.$$

$$\widetilde{\Pi}: \qquad \widetilde{\Pi}(\tilde{\xi},\varepsilon) = \varepsilon\widetilde{\Pi}_1(\tilde{\xi}) + O(\varepsilon^2), \qquad\qquad \tilde{\xi} = \frac{\pi - x}{\varepsilon}\,;$$

$$\frac{d^2\widetilde{\Pi}_1}{d\tilde{\xi}^2} = \overline{f}_u(\pi)\cdot\widetilde{\Pi}_1 = \widetilde{\Pi}_1, \qquad\qquad \tilde{\xi} > 0\,;$$

$$\frac{d\widetilde{\Pi}_1}{d\tilde{\xi}}\bigg|_{\tilde{\xi}=0} = -2 + \frac{d\overline{u}_0}{dx}\bigg|_{x=\pi} = -3, \qquad \widetilde{\Pi}_1(\infty) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \widetilde{\Pi}_1(\xi) = 3e^{-\tilde{\xi}}\,.$$

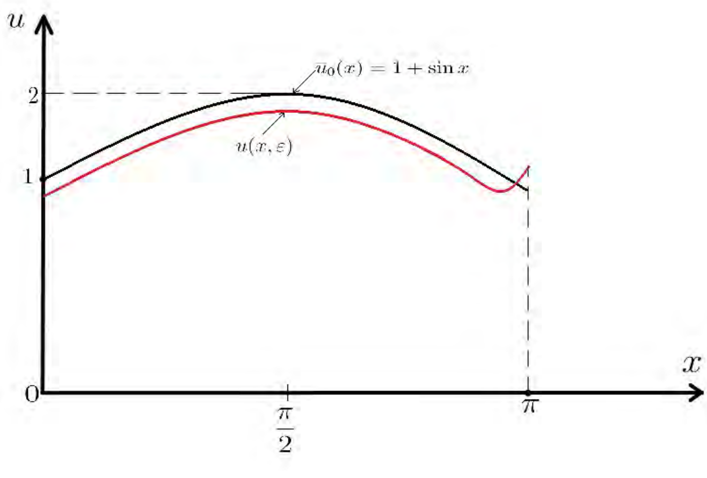


Рис. 5.7

Таким образом, асимптотическое приближение решения $u(x,\varepsilon)$ задачи 4.2.1 с точностью $O\bigl(\varepsilon^2\bigr)$ имеет вид (рис. 5.7):

$$u(x,\varepsilon) = \overline{u}_0(x) + \varepsilon\overline{u}_1(x) + \varepsilon\Pi_1 + \varepsilon\widetilde{\Pi}_1 + O(\varepsilon^2) =$$
$$= 1 + \sin x - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\exp\Bigl(-\frac{x}{\varepsilon}\Bigr) + 3\,\varepsilon\exp\Bigl(\frac{\pi - x}{\varepsilon}\Bigr) + O(\varepsilon^2)\,.$$

К задаче 4.3.1 из §3 Главы 4.

$$\begin{cases} \varepsilon^2\,\dfrac{d^2u}{dx^2} = \overbrace{-u\cdot(1+\sin x - u)}^{f(x,u,\varepsilon)} + \varepsilon u, \qquad 0 < x < \pi; \\ u(0,\varepsilon) = \dfrac{1}{2}, \qquad u(\pi,\varepsilon) = 2. \end{cases}$$

$$\overline{u}_0: \qquad \overline{u}_0 = 1 + \sin x, \quad \overline{u}_0(0) = 1, \quad \overline{u}_0(\pi) = 1.$$

$$\Pi_0(\xi): \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\Pi_0}{d\xi^2} = f(0,\overline{u}_0(0)+\Pi_0,0) - f(0,\overline{u}_0(0),0) = (1+\Pi_0)\cdot\Pi_0\,, \\ \Pi_0(0) = \dfrac{1}{2} - \overline{u}_0(0) = -\dfrac{1}{2}, \quad \Pi_0(+\infty) = 0\,, \end{cases}$$

где $\quad \xi = \dfrac{x}{\varepsilon} > 0\,.$

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = w, \quad \frac{dw}{d\xi} = (1+\Pi_0)\cdot\Pi_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{dw}{d\Pi_0} = \frac{(1+\Pi_0)\cdot\Pi_0}{w} \quad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}w^2 = \frac{1}{2}\Pi_0^2 + \frac{1}{3}\Pi_0^3 \quad\Longrightarrow\quad w = \frac{d\Pi_0}{d\xi} = \pm\Bigl(\Pi_0^2 + \frac{2}{3}\Pi_0^3\Bigr)^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}\cdot\Pi_0\,.$$

В последней формуле выбираем знак минус в соответствии с рисунком 5.8

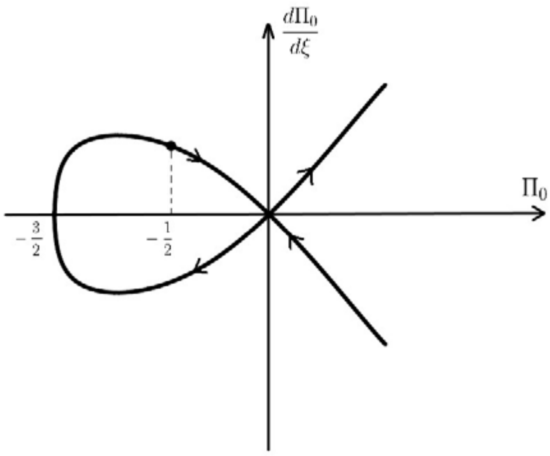


Рис. 5.8

Итак,

$$\frac{d\Pi_0}{d\xi} = -\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}\cdot\Pi_0, \qquad \Pi_0(0) = -\frac{1}{2}\,.$$

$$\frac{d\Pi_0}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}\cdot\Pi_0} = -d\xi \quad\Longrightarrow\quad \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\Pi_0(\xi)} \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{2}{3}s}\cdot s} = -\xi \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{1+\frac{2}{3}s} = t \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{3}{2}\big(t^2-1\big), \qquad ds = 3t\,dt \quad\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int\limits_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}} \frac{3\,\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}\cdot\frac{3}{2}(t^2-1)} = -\xi \quad\Longrightarrow\quad \int\limits_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = -\xi \quad\Rightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}} = -\xi \quad\Longrightarrow\quad \ln\left[\frac{1-\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}}\cdot\frac{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}\right] = -\xi \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{1-\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}}{1+\sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}_{:=\frac{1}{k_0}\,(k_0<1)} = e^{-\xi} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{1+\frac{2}{3}\Pi_0}\cdot\big(1+k_0e^{-\xi}\big) = 1-k_0e^{-\xi} \quad\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2}{3}\Pi_0 = \left(\frac{1-k_0e^{-\xi}}{1+k_0e^{-\xi}}\right)^2 - 1 \quad\Longrightarrow\quad \Pi_0(\xi) = -\frac{6k_0e^{-\xi}}{\big(1+k_0e^{-\xi}\big)^2}\,;$$

$$k_0 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big)^2,$$

$$1+k_0 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}\big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big),$$

$$\big(1+k_0\big)^2 = 12\big(\sqrt{3}-\sqrt{2}\big)^2.$$

$$\widetilde{\Pi}_0(\tilde{\xi}): \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\widetilde{\Pi}_0}{d\tilde{\xi}^2} = f(\pi, \overline{u}_0(\pi)+\widetilde{\Pi}_0, 0) - f(\pi, \overline{u}_0(\pi), 0) = (1+\widetilde{\Pi}_0)\cdot\widetilde{\Pi}_0, \\ \widetilde{\Pi}_0(0) = 2-\overline{u}_0(\pi) = 1, \qquad \widetilde{\Pi}_0(+\infty) = 0, \end{cases}$$

где $\quad \tilde{\xi} = \dfrac{\pi - x}{\varepsilon} > 0\,.$

$$\frac{d\widetilde{\Pi}_0}{d\tilde{\xi}} = -\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}\cdot\widetilde{\Pi}_0, \qquad \widetilde{\Pi}_0(0) = 1\,;$$

$$\int\limits_1^{\widetilde{\Pi}_0} \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{2}{3}s}\cdot s} = -\tilde{\xi} \quad \Longrightarrow \quad \left[t=\sqrt{1+\frac{2}{3}s}\right] \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \int\limits_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}} \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = -\tilde{\xi} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \ln\left[\frac{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}+1}\cdot\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}+1}{\sqrt{\frac{5}{3}}-1}\right] = -\tilde{\xi} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}+1} = k_1 e^{-\tilde{\xi}}, \quad \text{где} \quad k_1 = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} < 1\,, \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{1+\frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0}\cdot\left(1-k_1e^{-\tilde{\xi}}\right) = 1+k_1e^{-\tilde{\xi}} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{3}\widetilde{\Pi}_0 = \left(\frac{1+k_1e^{-\tilde{\xi}}}{1-k_1e^{-\tilde{\xi}}}\right)^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\Pi}_0(\tilde{\xi}) = \frac{6k_1e^{-\tilde{\xi}}}{\left(1-k_1e^{-\tilde{\xi}}\right)^2}\,.$$

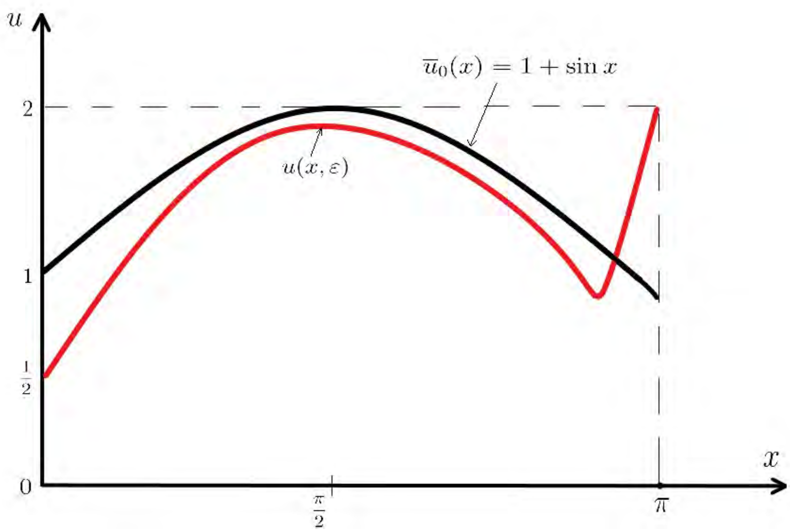


Рис. 5.9

Таким образом, асимптотическое приближение решения $u(x,\varepsilon)$ задачи 4.3.1 с точностью $O(\varepsilon)$ имеет вид (рис. 5.9):

$$\begin{aligned} u(x,\varepsilon) &= \overline{u}_0(x) + \Pi_0(\xi) + \widetilde{\Pi}_0(\tilde{\xi}) + O(\varepsilon) = \\ &= 1+\sin x - \frac{6k_0\cdot e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{\left(1+k_0\cdot e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right)^2} + \frac{6k_1\cdot e^{\frac{x-\pi}{\varepsilon}}}{\left(1-k_1\cdot e^{\frac{x-\pi}{\varepsilon}}\right)^2} + O(\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. // Матем. сб. 1952 т.31(73). №3. с. 147-156.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно позмущенных уравнений. М.:Наука, 1973.

3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.:Физматлит, 2005.

4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Изд-во Моск. ун-та, 1984.

5. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.;Л.:ГИТТЛ, 1950.

6. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. ур-ния. 1995. т.31.№4. с.718-722.

7. Васильева А.Б.. Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. т.4.№3. с. 799-851.

8. Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах. Ярославль:ЯрГУ, 2014

9. Nagumo M. Über das Randwertproblem der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialglechungen zweiter Ordnung // Proc. Phys. Math. Soc. Japan III ser. 1942.24. P. 845-851.

10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.:Высшая школа, 1990.