

Лекция 3. Нелинейные операторы.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

12 сентября 2012 г.

Пусть \mathbb{B}_1 и \mathbb{B}_2 — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ есть соответствующие скобки двойственности.

Рассмотрим некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор

$$F : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2.$$

Определение 1. Оператор \mathbb{F} называется дифференцируемым по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h \right\|_2 = 0, \quad (1)$$

где $\mathbb{F}'_g(u)$ при каждом фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ есть линейный оператор из \mathbb{B}_1 в \mathbb{B}_2 . При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in \mathbb{B}_1$ оператор $\mathbb{F}'_g(u)$ называется производной Гато оператора \mathbb{F} .

Пример 1.

ПРИМЕР 1. Введем \mathbb{B}_2 -значную функцию

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbb{F}(u + \lambda h),$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Тогда, как нетрудно видеть, согласно определению 1 имеет место равенство

$$\mathbb{F}'_g(u)h = \left. \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}.$$

Пример 2.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь случай линейного оператора

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2.$$

Тогда, очевидно, в силу линейности этого отображения имеет место следующее равенство:

$$\frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} = \mathbb{F}h,$$

т. е.

$$\mathbb{F}'_g(u) = \mathbb{F}.$$

Тем самым, приходим к выводу о том, что линейный оператор из \mathbb{B}_1 в \mathbb{B}_2 является бесконечное число раз дифференцируемым по Гато, причем всякий раз соответствующая производная Гато совпадает с самим оператором.

Пример 3.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим теперь следующее отображение:

$$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_n) : \mathbb{R}_m \rightarrow \mathbb{R}_n,$$

Возьмем в этом предельном равенстве в качестве h вектор $e_j \in \mathbb{R}_m$:

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где 1 стоит на j -ом месте. Согласно определению 1 при фиксированном $u \in \mathbb{R}_m$

$$\mathbb{F}'_g(u)$$

есть линейный оператор из \mathbb{R}_m в \mathbb{R}_n . Поэтому

$$\mathbb{F}'_g(u)e_j = \mathbb{A}e_j$$

$$(\mathbb{A}e_j)_k = a_{kj} \quad j \in \overline{1, m} \quad \text{и} \quad k \in \overline{1, n}.$$

Пример 3.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbb{F}_k(u + \lambda e_j) - \mathbb{F}_k(u)}{\lambda} - a_{kj} \right| = 0.$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathbb{F}_k(u + \lambda e_j) - \mathbb{F}_k(u)}{\lambda} = \frac{\partial \mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u).$$

$$a_{kj} = \frac{\partial \mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u).$$

Пример 4.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$\mathbb{G}(u) = \int_0^1 k(x, y)g(u(y), y) dy \quad \text{для всех } y \in [0, 1].$$

В качестве банаховых пространств \mathbb{B}_1 и \mathbb{B}_2 возьмем $\mathbb{C}[0, 1]$ и потребуем, чтобы

$$k(x, y) \in \mathbb{C}([0, 1] \times [0, 1]), \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1 \times [0, 1]).$$

В силу этих предположений имеет место предельное равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{g(u + \lambda h, x) - g(u, x)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial u}(u, x)h(x).$$

Поэтому производная Гато оператора Гаммерштейна имеет вид

$$\mathbb{G}'_g(u)h = \int_0^1 k(x, y) \frac{\partial g}{\partial u}(u(y), y)h(y) dy \quad \text{для всех } h(x) \in \mathbb{C}[0, 1].$$

Определение 2. Оператор \mathbb{F} называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление:

$$\mathbb{F}(u + h) = \mathbb{F}(u) + \mathbb{F}'_f(u)h + \omega(u, h), \quad (2)$$

причем

$$\lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \quad (3)$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор

$$\mathbb{F}'_f(u) : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора \mathbb{F} .

Пример 5.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим отображение, определенное формулой

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{при } x = (x_1, x_2) \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Докажем, что оно дифференцируемо по Гато, но не дифференцируемо по Фреше.

Пример 5.

Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{F}(x + \lambda h) - \mathbb{F}(x)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda^4 h_1^3 h_2}{\lambda^4 h_1^4 + \lambda^2 h_2^2} = \\ &= \lambda \frac{h_1^3 h_2}{\lambda^2 h_1^4 + h_2^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0\end{aligned}$$

в точке $x = (0, 0)$.

Пример 5.

Предположим, что производная Фреше этого отображения существует в точке $(0, 0)$ и равна нулевому отображению Θ . Действительно, согласно определению 2 производной Фреше и явному виду отображения \mathbb{F} имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{F}(h) = \omega(\theta, h), \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(\theta, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow +0.$$

Значит, с необходимостью получаем, что

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0.$$

Пример 5.

Рассмотрим стремление к точке $(0, 0)$ вектора $h \in \mathbb{R}^2$ по кривой $h_2 = h_1^2$. Действительно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} &= \frac{|h_1|^3|h_2|}{h_1^4 + h_2^2} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \\ &= \frac{|h_1|h_1^4}{h_1^4 + h_1^4} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + h_1^2}} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Полученное предельное равенство означает, что производной Фреше в точке $(0, 0)$ не существует. Тем самым, из существования производной Гато в какой-то точке не следует существование производной Фреше в этой же точке.

Какая связь между производной Габо и производной Фреше?

Возникает естественный вопрос: при каких дополнительных условиях вытекает существование производной Фреше в некоторой точке при условии существования производной Габо в той же точке. Для ответа на этот вопрос нам необходимо доказать следующие два утверждения о среднем значении. Во-первых, справедлив следующий результат.

Вспомогательная теорема 1.

Теорема

Пусть $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда для каждой пары $u, h \in \mathbb{B}$ найдется такое число $\lambda = \lambda(u, h) \in (0, 1)$, что имеет место формула

$$F(u + h) - F(u) = \langle F'_g(u + \lambda h), h \rangle, \quad (4)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скобки двойственности между банаховыми пространствами \mathbb{B} и \mathbb{B}^* .

Доказательство теоремы 1.

Введем вещественно-значную функцию

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{F}(u + \lambda h).$$

В силу замечания 1 имеем

$$\varphi'(\lambda) = \langle \mathbb{F}'_g(u + \lambda h), h \rangle.$$

Заметим теперь, что в силу теоремы Лагранжа для вещественных функций имеет место равенство

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\lambda) \quad \text{при некотором } \lambda \in (0, 1).$$

Значит, справедливо равенство (4).

Вспомогательная теорема 2.

Только что доказанная теорема позволит нам доказать следующий результат.

Теорема

Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$, тогда для каждой пары $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ найдется такое вещественное число $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, что имеют место следующие выражения:

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}'_g(u + \lambda h)h \rangle_2 \quad (5)$$

и

$$\|\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leq \left\| \mathbb{F}'_g(u + \lambda h) \right\|_{1 \rightarrow 2} \|h\|_1 \quad (6)$$

Доказательство теоремы 2.

Рассмотрим вещественнозначную функцию:

$$\varphi(u) \equiv \langle f^*, \mathbb{F}(u) \rangle_2 : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Из дифференцируемости по Гато оператора $\mathbb{F}(u)$ вытекает дифференцируемость по Гато функции

$$\varphi(u) : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Причем имеет место равенство

$$\langle \varphi'_g(u), h \rangle_1 = \langle f^*, \mathbb{F}'_g(u)h \rangle_2.$$

В силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = \langle \varphi'_g(u + \lambda h), h \rangle_1$$

при некотором числе $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$.

Доказательство теоремы 2.

Значит, имеет место равенство

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}'_g(u + \lambda h)h \right\rangle_2.$$

В силу следствия из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{2^*} = 1$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \|\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u)\|_2.$$

Наконец, мы в состоянии доказать следующий результат.

Теорема

Пусть оператор $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ является дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности точки $u \in \mathbb{B}_1$ и производная Гато $\mathbb{F}'_g(\cdot)$ непрерывна в точке $u \in \mathbb{B}_1$. Тогда оператор \mathbb{F} дифференцируем по Фреше в этой же точке $u \in \mathbb{B}_1$ и

$$\mathbb{F}'_g(u) = \mathbb{F}'_f(u).$$

Доказательство теоремы 3.

Введем обозначение:

$$\omega(u, h) \equiv \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_g(u)h.$$

Пусть $f^* \in \mathbb{B}_2^*$, тогда имеем

$$\langle f^*, \omega(u, h) \rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 - \langle f^*, \mathbb{F}'_g(u)h \rangle_2.$$

По теореме 2 найдется такое число $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}'_g(u + \lambda h)h \rangle_2.$$

Следовательно,

$$\langle f^*, \omega(u, h) \rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}'_g(u + \lambda h)h - \mathbb{F}'_g(u)h \rangle_2.$$

Доказательство теоремы 3.

По следствию из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{*2} = 1$, что

$$\|\omega(u, h)\|_2 = \langle f^*, \omega(u, h) \rangle_2.$$

Значит, имеет место неравенство

$$\|\omega(u, h)\|_2 \leq \left\| \mathbb{F}'_g(u + \lambda h) - \mathbb{F}'_g(u) \right\|_{1 \rightarrow 2} \|h\|_1.$$

Следовательно, в силу непрерывности $\mathbb{F}'_g(\cdot)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место неравенство

$$\lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\omega(u, h)\|_2}{\|h\|_1} \leq \lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \left\| \mathbb{F}'_g(u + \lambda h) - \mathbb{F}'_g(u) \right\|_{1 \rightarrow 2} = 0.$$

Теорема

Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ — это отображение, дифференцируемое по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, тогда отображение \mathbb{F} непрерывно в этой точке.

Доказательство теоремы 4.

Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление:

$$\left\| \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h \right\|_2 \leq \|h\|_1$$

при достаточно малом $h \in \mathbb{B}_1$. Но тогда имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 &\leq \left\| \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h \right\|_2 + \\ &+ \left\| \mathbb{F}'_f(u)h \right\|_2 \leq \left(1 + \left\| \mathbb{F}'_f(u) \right\|_{1 \rightarrow 2} \right) \|h\|_1. \end{aligned}$$

Пример 6.

ПРИМЕР 6. Приведем пример отображения, дифференцируемого по Гато в некоторой точке, но не непрерывной в этой точке. Пусть

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2}{x_1^6 + x_2^3}, & \text{при } (x_1, x_2) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{при } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Пример 6.

Действительно, выражение

$$\frac{\mathbb{F}(x + \lambda h) - \mathbb{F}(x)}{\lambda}$$

в точке $x = (0, 0)$ имеет вид

$$\frac{\lambda^5 h_1^4 h_2}{\lambda (\lambda^6 h_1^6 + \lambda^3 h_2^3)} = \lambda \frac{h_1^4 h_2}{\lambda^3 h_1^6 + h_2^3} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Значит, производная Гато указанного отображения существует в точке $x = (0, 0)$ и равна нулевому отображению

$$\mathbb{F}'_g(\theta) = \Theta.$$

Пример 6.

Докажем, что тем не менее отображение \mathbb{F} не непрерывно в нуле. Действительно, рассмотрим кривую в \mathbb{R}^2 $x_2 = \lambda x_1^2$ при $\lambda > 0$. И устремим точку (x_1, x_2) к $(0, 0)$ вдоль этой кривой. Тогда получим

$$\mathbb{F}(x) \Big|_{x_2 = \lambda x_1^2} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^3}.$$

Таким образом, предел при $x \rightarrow (0, 0)$ вдоль кривой $x_2 = \lambda x_1^2$ зависит от параметра $\lambda > 0$. Следовательно, указанное отображение \mathbb{F} не является непрерывным в точке $(0, 0)$.

Частичная непрерывность производной Гато.

Однако, в случае дифференцируемости по Гато есть некоторый ослабленный вариант непрерывности. Справедлива следующая лемма.

Лемма

Пусть отображение \mathbb{F} дифференцируемо по Гато в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leq c|\lambda|, \quad (7)$$

где $c = c(u, h) > 0$.

В силу дифференцируемости по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} \right\|_2 &\leq \left\| \frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h \right\|_2 + \\ &+ \left\| \mathbb{F}'_g(u)h \right\|_2 \leq c_1 + c_2 = c_3, \end{aligned}$$

где c_3 не зависит от λ . Отсюда вытекает неравенство (7).

Теорема

Пусть $F : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ и $G : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_3$, причем оператор F дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор G дифференцируем по Фреше в точке $F(u)$. Тогда их композиция

$$K \equiv G \circ F$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство:

$$K'_f(u) = G'_f(F(u))F'_f(u). \quad (8)$$

Доказательство теоремы 5.

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbb{K}(u+h) - \mathbb{K}(u) - \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u) \right\|_3 \leq \\ & \leq \left\| \mathbb{G}(\mathbb{F}(u+h)) - \mathbb{G}(\mathbb{F}(u)) - \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u)) [\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)] \right\|_3 + \\ & \quad + \left\| \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u)) [\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}'_f(u)h] \right\|_3 \leq \\ & \leq \|\omega_1(\mathbb{F}(u), \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u))\|_3 + \left\| \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u)) \right\|_{2 \rightarrow 3} \|\omega_2(u, h)\|_3. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 5.

Теперь заметим, что в силу дифференцируемости по Фреше оператора \mathbb{F} имеет место оценка

$$\|\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leq c\|h\|_1.$$

Поэтому имеет место следующее предельное равенство:

$$\begin{aligned} & \lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u), \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u))\|_3}{\|h\|_1} = \\ & = \lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u), \mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u))\|_3}{\|\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u)\|_2} \frac{\|\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \end{aligned}$$

Кроме этого, имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \frac{\|\omega_2(u, h)\|_3}{\|h\|_1} = 0.$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ — это есть полное измеримое σ -конечное пространство. Дадим определения.

Определение 3. Функция

$$f(x, u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u \in \mathbb{R}^N$ μ -измерима на Ω и для μ -почти всех $x \in \Omega$ непрерывна по $u \in \mathbb{R}^N$.

Определение 4. Оператор $N_f(u) \equiv f(x, u(x))$ называется оператором Немыцкого.

Теорема М. А. Красносельского об операторе Немыцкого.

Теорема

Оператор Немыцкого $N_f(u)$ является ограниченным и непрерывным, действующим из

$$\prod_{k=1}^N \mathbb{L}^{p_k}(\Omega, \mu) \quad \text{в} \quad \mathbb{L}^q(\Omega, \mu) \quad \text{при} \quad p_k, q \in [1, +\infty)$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей Каратеодориевой функции $f(x, u)$ справедлива оценка

$$|f(x, u)| \leq a(x) + c \sum_{k=1}^N |u_k|^{p_k/q}, \quad a(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu),$$

для всех $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ и μ -почти всех $x \in \Omega$.

Один важный пример.

Пусть

$$f(x, u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$$

является Каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x, z) = \int_0^z f(x, \xi) d\xi, \quad (9)$$

а также функционал

$$\psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx. \quad (10)$$

Предположим также, что

$$|f(x, u)| \leq a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1, +\infty),$$

где $a(x) \in L_+^{p'}(\Omega)$ и $c > 0$.

Один важный пример.

Тогда для потенциальной функции $F(x, u)$, определенной формулой (9), имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |F(x, u)| &\leq \left| \int_0^{u(x)} f(x, \xi) d\xi \right| \leq a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leq \\ &\leq \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \quad (11) \end{aligned}$$

где $a_1(x) \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x, u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (11) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : \mathbb{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{L}^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным.

Один важный пример.

Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (10) является ограниченным и непрерывным из $L^p(\Omega)$ в \mathbb{R}^1 . Действительно, в силу оценки (11) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leq \int_{\Omega} |F(x, u(x))| dx \leq \int_{\Omega} a_1(x) dx + c_1 \int_{\Omega} |u|^p dx \leq c_2 + c_1 \|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана.

Один важный пример.

Докажем непрерывность. Пусть $u_n \rightarrow u$ сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega)$.

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leq \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u, v) \equiv \psi(u + v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v \rangle \quad \text{для} \quad u, v \in \mathbb{L}^p(\Omega).$$

$$|\omega(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} [F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x))] dx - \int_{\Omega} N_f(u)(x)v(x) dx \right|.$$

Один важный пример.

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x)) &= \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u(x) + tv(x)) dt = \int_0^1 f(x, u(x) + tv(x))v(x) dt. \end{aligned}$$

Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\omega(u, v)| &\leq \int_0^1 dt \int_{\Omega} dx |N_f(u + tv)(x) - N_f(u)(x)| |v(x)| \leq \\ &\leq \int_0^1 dt \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'} \|v\|_p. \end{aligned}$$

Один важный пример.

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \rightarrow 0} \frac{|\omega(u, v)|}{\|v\|_p} \leq \lim_{\|v\|_p \rightarrow 0} \int_0^1 dt \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Лемма.

Тем самым, справедлива следующая лемма.

Лемма

При сформулированных условиях функционал $\psi(u)$, определенный формулой

$$\psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) dx, \quad F(x, s) = \int_0^s f(x, \sigma) d\sigma,$$

является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство:

$$\psi'_f(u) = N_f(u) \quad \text{для всех } u \in \mathbb{L}^p(\Omega) \quad \text{при } p \in (1, +\infty). \quad (12)$$

Определение 5. Оператор \mathbb{F} называется компактным, если для каждого ограниченного множества $B \subset \mathbb{B}_1$ замыкание множества $\mathbb{F}(B) \subset \mathbb{B}_2$ компактно в \mathbb{B}_2 .

Определение 6. Оператор \mathbb{F} называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.

Определение 7. Оператор \mathbb{F} называется полностью непрерывным, если из условия

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}_1$$

вытекает, что

$$\mathbb{F}(u_n) \rightarrow \mathbb{F}(u) \quad \text{сильно в } \mathbb{B}_2.$$

Связь вполне непрерывных и полностью непрерывных операторов.

Теорема

Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ — это вполне непрерывный оператор, тогда он является полностью непрерывным.

Доказательство теоремы 6.

Итак, пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}_1,$$

тогда эта последовательность сильно ограничена в \mathbb{B}_1 . Тогда в силу компактности \mathbb{L} из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такую, что

$$\mathbb{L}u_{n_k} \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{B}_2.$$

Рассмотрим транспонированный к \mathbb{L} оператор

$$\mathbb{L}^t : \mathbb{B}_2^* \rightarrow \mathbb{B}_1^*.$$

Доказательство теоремы 6.

Поскольку $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, т. е. является линейным и непрерывным, то и $\mathbb{L}^t \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2^*, \mathbb{B}_1^*)$, причем по определению транспонированного оператора справедливо следующее равенство:

$$\langle f^*, \mathbb{L}u \rangle_2 = \langle \mathbb{L}^t f^*, u \rangle_1 \quad \text{для всех } f^* \in \mathbb{B}_2^*, \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

Докажем, что

$$\mathbb{L}u_n \rightharpoonup \mathbb{L}u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}_2.$$

Действительно, имеет место следующее выражение:

$$\langle f^*, \mathbb{L}u_n - \mathbb{L}u \rangle_2 = \langle \mathbb{L}^t f^*, u_n - u \rangle_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

поскольку

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}_1.$$

Доказательство теоремы 6.

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\mathbb{L}u_n \rightharpoonup \mathbb{L}u \quad \text{слабо в } \mathbb{B}_2. \quad (13)$$

Докажем теперь, что на самом деле

$$\mathbb{L}u_n \rightarrow \mathbb{L}u \quad \text{сильно в } \mathbb{B}_2.$$

По доказанному,

$$\mathbb{L}u_{n_k} \rightarrow v \quad \text{сильно в } \mathbb{B}_2,$$

значит,

$$\mathbb{L}u_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, в силу (13) приходим к равенству

$$v = \mathbb{L}u.$$

Доказательство теоремы 6.

Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что имеет место неравенство

$$\|\mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u\|_2 \geq c > 0 \quad \text{для всех } n_k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, по доказанному, у этой подпоследовательности найдется такая подпоследовательность

$$\{u_{n_{k_l}}\} \subset \{u_{n_k}\}$$

такая, что

$$\|\mathbb{L}u_{n_{k_l}} - \mathbb{L}u\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$0 < c \leq \|\mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u\|_2 \leq \|\mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u_{n_{k_l}}\|_2 + \|\mathbb{L}u_{n_{k_l}} - \mathbb{L}u\|_2.$$

Доказательство теоремы 6.

Выберем теперь $l \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| \mathbb{L}u_{n_{k_l}} - \mathbb{L}u \right\|_2 \leq \frac{c}{2}.$$

С другой стороны, для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое $n_k \in \mathbb{N}$, что

$$n_k = n_{k_l} \Rightarrow u_{n_k} = u_{n_{k_l}} \Rightarrow \mathbb{L}u_{n_{k_l}} = \mathbb{L}u_{n_k}$$

и тогда

$$\left\| \mathbb{L}u_{n_k} - \mathbb{L}u_{n_{k_l}} \right\|_2 = 0$$

и мы приходим к противоречивому неравенству

$$0 < c \leq \frac{c}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Важный результат.

Важный результат без доказательства.

Теорема

Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и \mathbb{B}_1 рефлексивно. Тогда для полной непрерывности оператора \mathbb{L} , необходима и достаточна, вполне непрерывность оператора \mathbb{L} .

Нелинейный случай.

Пока мы рассмотрели связь полной непрерывности и вполне непрерывности линейных операторов. Однако, есть некоторые результаты и для нелинейных операторов. Справедлива следующая лемма.

Лемма

Пусть

$$\mathbb{K} : \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$$

— это полностью непрерывный оператор. Тогда при условии рефлексивности банахова пространства \mathbb{B}_1 оператор \mathbb{K} является вполне непрерывным.

Пример 7.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 7. Пусть $\mathbb{B}_1 = \mathbb{L}^2(0, 1)$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}_1$. Рассмотрим следующий нелинейный оператор

$$\mathbb{K}(u) = \int_0^1 u^2(s) ds = \|u\|_2^2.$$

Докажем, что он является вполне непрерывным. Сначала докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^2(0, 1),$$

но тогда в силу очевидного неравенства

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leq \|u_n - u\|_2$$

приходим к выводу о том, что

$$\|u_n\|_2 \rightarrow \|u\|_2 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

Пример 7.

поэтому

$$\mathbb{K}(u_n) \rightarrow \mathbb{K}(u) \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Докажем теперь компактность оператора \mathbb{K} . Пусть $D \subset \mathbb{L}^2(0, 1)$ — это произвольное ограниченное множество. Докажем, что

$$\overline{\mathbb{K}(D)} \quad \text{компактно в} \quad \mathbb{R}^1.$$

Но для этого достаточно доказать, что $\mathbb{K}(D)$ — это ограниченное множество. В силу ограниченности D в $\mathbb{L}^2(0, 1)$ имеем следующее неравенство:

$$\|u\|_2 \leq c \quad \text{для всех} \quad u \in D$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от u . Тогда

$$0 < \mathbb{K}(u) \leq c^2 < +\infty.$$

Тем самым, компактность оператора \mathbb{K} доказана.

Пример 7.

Теперь докажем, что, тем не менее, оператор \mathbb{K} не является полностью непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{L}^2(0, 1)$, где

$$u_n(s) = \sin(\pi ns), \quad s \in (0, 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой фиксированной функции $v(s) \in \mathbb{L}^2(0, 1)$ в силу теоремы Римана–Лебега имеет место выражение

$$\int_0^1 v(s) \sin(\pi ns) ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty,$$

т. е. в силу теоремы представления Рисса

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{L}^2(0, 1).$$

$$\mathbb{K}(u_n) = \int_0^1 u_n^2(s) ds = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = \mathbb{K}(0) \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$