Лекция 10. Метод Галеркина в сочетании с методом монотонности.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

27 ноября 2013 г.

Постановка задачи.

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi n(x), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad (2)$$

$$\mathbf{D} = |\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \qquad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \qquad (4)$$

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (5)$$

Свойства $p-$лапласиана-1.

Теперь мы займемся исследованием свойств оператора

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u),$$

который носит название *псевдо–лапласиана*.

Прежде всего докажем, что он является оператором, действующим как

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}, \qquad (6)$$

где, напомним, $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над пространством С. Л. Соболева $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Свойства p–лапласиана-2.

С этой целью заметим, что оператор псевдо–лапласиана можно представить в виде композиции трех отображений следующим образом:

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \operatorname{div}(\xi), \quad \xi = |\eta|^{p-2}\eta, \quad \eta = \nabla u. \tag{7}$$

Пусть $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, тогда справедливы следующие формулы. Во–первых, согласно определению пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$\eta = \nabla u : \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega). \tag{8}$$

Во–вторых, проверим, что имеет место следующее выражение для оператора $\xi = |\eta|^{p-2}\eta$:

$$\xi = |\eta|^{p-2}\eta : L^p(\Omega)\times L^p(\Omega)\times L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)\times L^{p'}(\Omega)\times L^{p'}(\Omega). \tag{9}$$

Свойства $p-$лапласиана-3.

Действительно, представим покоординатно выражение для вектора ξ.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$

$$\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1, \quad \xi_2 = |\eta|^{p-2}\eta_2, \quad \xi_3 = |\eta|^{p-2}\eta_3.$$

Докажем, например, что $\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1 \in L^{p'}(\Omega)$. Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$|\xi^1|^{p'} = \left||\eta|^{p-2}\eta_1\right|^{p'} \leqslant \left||\eta|^{p-1}\right|^{p'} = |\eta|^p,$$

поэтому отсюда вытекает, что если $\eta \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega)$, то $\xi_1 \in L^{p'}(\Omega)$. Формула (9) доказана. Третий оператор $\operatorname{div}(\xi)$ действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(\xi) : L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega) \to \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega). \tag{10}$$

Строгая монотонность оператора $p-$лапласиана.

Действительно, введем сначала более короткое обозначение

$$\triangle_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \tag{11}$$

и докажем следующее его свойство:

$$\langle -\triangle_p u_1 + \triangle_p u_2, u_2 - u_2\rangle \geqslant 0, \tag{12}$$

причем равенство в этом неравенстве имеет место, тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$.

Формула интегрирования по частям.

Теперь заметим, что в силу построения оператора псевдо–лапласиана имеет место формула «интегрирования по частям»:

$$\langle \triangle_p u, v\rangle = -\sum_{i=1}^{3} \left\langle |\nabla u|^{p-2} u_{x_i}, v_{x_i}\right\rangle_1 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \left(\nabla u, \nabla v\right)\, dx \tag{13}$$

для всех $u, v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot\rangle_1$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $L^{p'}(\Omega)$ при $p \in [2, +\infty)$, которые имеют следующий явный вид

$$\langle f, u\rangle_1 = \int\limits_{\Omega} f(x) u(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^{p'}(\Omega), \quad u(x) \in L^p(\Omega),$$

чем мы и воспользовались в формуле (13)

Строгая монотонность.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим следующую формулу:

$$\langle -\triangle_p u_1 + \triangle_p u_2, u_2 - u_2 \rangle = \\ = \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2, \nabla u_1 - \nabla u_2 \right) dx. \quad (14)$$

Справедлива следующая цепочка выражений для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta \right) = |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-2}(\xi, \eta) - |\eta|^{p-2}(\xi, \eta) \geqslant \\ \geqslant |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-1}|\eta| - |\eta|^{p-1}|\xi| = \\ = [|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}][|\xi| - |\eta|] \geqslant 0 \quad (15)$$

поскольку функция $f(x) = x^{p-1}$ является монотонной при $x \geqslant 0$ и при $p > 1$.

Определение.

Заметим, что можно доказать более сильное неравенство следующего вида:

$$\left(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\right) \geqslant 2^{2-p}|\xi-\eta| \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{16}$$

Определение. *Отображение*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется монотонным относительно скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

между сопряженными банаховыми пространствами, если для всех $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geqslant 0, \tag{17}$$

и называется строго монотонным, если равенство в формуле (17) имеет место, тогда и только тогда, когда $u = v$.

Слабое решение.

Определение. *Слабым решением задачи* (1) *при условии, что* $f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, *называется функция* $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая следующему равенству*:

$$\langle -\triangle_p u, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \tag{18}$$

Коэрцитивность.

Определение. *Оператор* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{19}$$

Докажем, что оператор псевдолапласиана является коэрцитивным. Действительно, «интегрированием по частям» доказывается следующая формула:

$$\langle -\triangle_p u, u\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \|\nabla u\|_p^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{20}$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Лемма об остром угле.

Лемма

Пусть $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— непрерывное отображение, для некоторого* $R > 0$ *удовлетворяющее условию*

$$(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, *что* $|a| \leqslant R$ *и* $\mathbb{T}a = 0$.

Доказательство-1.

Допустим, что

$$\mathbb{T}a \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{K}_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(\mathbb{T}a, a) = -R|\mathbb{T}a| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

S^+ свойство.

Определение. *Будем говорить, что оператор* $\triangle_p$ *удовлетворяет так называемому* S^+ *свойству, если из того, что*

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

и условия, что

$$\limsup_{m\to+\infty} \langle -\triangle_p u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0, \tag{21}$$

вытекает, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

S^+ свойство $p-$лапласиана.

Лемма

Оператор $\triangle_p$ удовлетворяет S^+ свойству.

Доказательство-1.

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Рассмотрим следующие выражения:

$$\langle \triangle_p u - \triangle_p u_m, u_m - u \rangle =$$
$$= \int_\Omega \left(|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla u_m - \nabla u \right) \geqslant$$
$$\geqslant 2^{p-2} \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u|^p \, dx, \quad (22)$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (16).

Доказательство-2.

Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что

$$\langle \triangle_p u, u_m - u \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{23}$$

поэтому переходя к пределу в неравенстве (22) в силу предельного свойства (21) получим, что

$$0 \geqslant \lim_{m \to +\infty} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u|^p \, dx \geqslant 0.$$

Значит,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

Метод Галеркина.

заметим, что банахово пространство $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$ является сепарабельным, т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество $\{w_j\} \subset \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \tag{24}$$

причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\langle -\triangle_p u_m, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}. \tag{25}$$

Локальная разрешимость-1.

Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы 1 об остром угле. С этой целью рассмотрим следующий оператор

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = (\mathbb{T}_1(\mathbf{c}_m), ..., \mathbb{T}_m(\mathbf{c}_m)), \quad \mathbf{c}_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}).$$

$$\mathbb{T}_j(\mathbf{c}_m) = -\langle \triangle_p u_m, w_j \rangle - \langle f, w_j \rangle \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Локальная разрешимость-2.

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^m$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) = -\langle \triangle_p u_m, u_m \rangle - \langle f, w_m \rangle = \|\nabla u_m\|_p^p - \langle f, w_m \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|\nabla u_m\|_p^p - \|f\|_* \|\nabla u_m\|_p = \|\nabla u_m\|_p \left(\|\nabla u_m\|_p^{p-1} - \|f\|_* \right) \geqslant 0$$

при достаточно большом $r : \|\nabla u_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|\nabla u\|_p$ обозначена норма банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|\nabla u\|_p = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u \rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

Локальная разрешимость-3.

Осталось заметить, что на конечномерном эвклидововм пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$, что

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| \leqslant R,$$

т. е. алгебраическая система (25) имеет решение $u_m \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Слабая сходимость.

Тем самым, у нас имеется последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений. Вот здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

причем $u(x)$ удовлетворяет равенству (18).

Реализация схемы.

Прежде всего умножим равенство (25) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\triangle_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle, \tag{26}$$

в котором после «интегрирования по частям» мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|\nabla u_m\|_p^p = \langle f, u_m \rangle \leqslant \|f\|_* \|\nabla u_m\|_p$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|\nabla u_m\|_p \leqslant \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Слабая сходимость.

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому в силу теоремы 4 Лекции 1 существует такая ее подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, для которой

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{28}$$

S^+ свойство.

Теперь докажем, что выполнено свойство

$$\limsup_{m\to+\infty} \langle -\triangle_p u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0.$$

Действительно, в силу (25) имеет место следующее равенство

$$\langle -\triangle_p u_m, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle \to 0, \tag{29}$$

S^+ свойство. Продолжение-1.

Теперь выберем последовательность вида

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} k_{mj} w_j \tag{30}$$

такую, что

$$v_m \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \tag{31}$$

Теперь умножим обе части равенства (25) на k_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\triangle_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle \,. \tag{32}$$

S^+ свойство. Продолжение-2.

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\langle -\triangle_p u_m, u_m - u\rangle &= \langle f, u_m\rangle - \langle -\triangle_p u_m, u\rangle = \\ &= \langle f, u_m\rangle - \langle -\triangle_p u_m, u - v_m\rangle - \langle -\triangle_p u_m, v_m\rangle = \\ &= \langle f, u_m\rangle - \langle -\triangle_p u_m, u - v_m\rangle - \langle f, v_m\rangle = \\ &= \langle f, u_m - v_m\rangle - \langle -\triangle_p u_m, u - v_m\rangle = \mathrm{I}_{1m} + \mathrm{I}_{2m}.\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Действительно, имеет место неравенство

$$|\mathrm{I}_{1m}| \leqslant |\langle f, u_m - v_m\rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \qquad (33)$$

поскольку

$$u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

S^+ свойство. Продолжение-3.

Оценим второе слагаемое I_{2m}. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_{2m}| \leqslant |\langle -\triangle_p u_m, u - v_m\rangle| \leqslant \|\triangle_p u_m\|_* \|u - v_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{34}$$

поскольку имеет место свойство (31)

S^+ свойство. Продолжение-4.

и, кроме того, так как имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\|\triangle_p u_m\|_* = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle -\triangle_p u_m, \varphi\rangle| =$$

$$= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left| \int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-2}(\nabla u_m, \nabla\varphi)\, dx \right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^{p-1}|\nabla\varphi|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^p\, dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla\varphi|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^p\, dx \right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_*^p.$$

S^+ свойство. Продолжение-5.

Но тогда уж тем более имеет место свойство (21). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 и получить следующий важный результат:

$$u_{m_m} \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{35}$$

Теперь наша ближайшая задача доказать, что

$$\triangle_p u_{m_m} \to \triangle_p u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{36}$$

Липшиц–непрерывность-1.

С этой целью нам нужно доказать так называемую *липшиц–непрерывность* оператора псевдолапласиана. Рассмотрим отдельно следующее выражение:

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \quad \text{для любых} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку. Действительно, имеет место первая оценка

$$\begin{aligned}\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| &= \left||\xi|^{p-2}[\xi-\eta] + \eta\left[|\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2}\right]\right| \leqslant \\ &\leqslant |\xi|^{p-2}|\xi-\eta| + (p-2)|\eta| \max\left\{|\xi|^{p-3}, |\eta|^{p-3}\right\}|\xi-\eta|, \end{aligned} \tag{37}$$

а теперь вторая

$$\begin{aligned}\left||\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi\right| &= \left||\eta|^{p-2}[\eta-\xi] + \xi\left[|\eta|^{p-2} - |\xi|^{p-2}\right]\right| \leqslant \\ &\leqslant |\eta|^{p-2}|\eta-\xi| + (p-2)|\xi| \max\left\{|\eta|^{p-3}, |\xi|^{p-3}\right\}|\eta-\xi|, \end{aligned} \tag{38}$$

Липшиц–непрерывность-2.

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \leqslant \min\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| +$$
$$+ (p-2)\min\{|\xi|,|\eta|\}\frac{\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}}{\min\{|\xi|,|\eta|\}}|\xi-\eta| =$$
$$= (p-1)\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| \quad (39)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 2$.

Липшиц–непрерывность-3.

Теперь согласно определению нормы банахова пространства $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\|\triangle_p u - \triangle_p u_m\|_* = \sup_{\|w\|\leqslant 1} |\langle \triangle_p u - \triangle_p u_m, w\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|w\|\leqslant 1} \left| \int_\Omega \left| |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \right| |\nabla w| \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant (p-1) \sup_{\|w\|\leqslant 1} \int_\Omega |\nabla u_m - \nabla u| \max\left\{|\nabla u|^{p-2}, |\nabla u_m|^{p-2}\right\} |\nabla w| \, dx = \mathrm{I}, \tag{40}$$

где мы воспользовались неравенством (39).

Липшиц–непрерывность-4.

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (40).
Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{p}{p-2}, \quad p_3 = p, \quad r = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1.$$

И тогда получим следующее неравенство для выражения I :

$$\mathrm{I} \leqslant (p-1) \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u - \nabla u_m|^p \, dx \right)^{1/p} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\Omega} \max\left\{ |\nabla u|^p, |\nabla u_m|^p \right\} \, dx \right)^{(p-2)/p} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^p \, dx \right)^{1/p} . \tag{41}$$

Липшиц–непрерывность-5.

Таким образом из неравенств (40) и (41) вытекает следующая оценка

$$\|\triangle_p u - \triangle_p u_m\|_* \leqslant \mu(\mathrm{R}_m)\|\nabla u - \nabla u_m\|_p, \tag{42}$$

$$\mu(\mathrm{R}_m) = c_1 \mathrm{R}_m^{p-2}, \quad \mathrm{R}_m = \max\left\{\|\nabla u\|_p, \|\nabla u_m\|_p\right\}.$$

В силу свойства (27) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(\mathrm{R}_m) \leqslant c_1 \max\left\{\|\nabla u\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)}\right\},$$

т. е. ограничена величиной, которая не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, мы в силу (35) и (42) приходим к выводу о том, что

$$\triangle_p u_m \to \triangle_p u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega). \tag{43}$$

Предельный переход.

Теперь осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (25) и получить с учетом (43) следующий результат:

$$\langle -\triangle_p u, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, +\infty}, \tag{44}$$

из которого в силу плотности счетного семейства $\{w_j\}$ в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ удовлетворяет равенству (18) определения 2 слабого решения. Осталось доказать единственность слабого решения. Для этого воспользуемся неравенством (16), из которого вытекает следующее неравенство:

$$\begin{gathered}
\langle -\triangle_p u_1 + \triangle_p u_2, u_2 - u_1 \rangle = \\
= \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla u_2|^{p-2} \nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1, \nabla u_2 - \nabla u_1 \right) dx \geqslant \\
\geqslant 2^{2-p} \int\limits_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p \, dx. \quad (45)
\end{gathered}$$

Единственность.

Теперь возьмем в неравенстве (45) в качестве $u_1, u_2 \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ какие то два слабых решения в смысле определения 2, но тогда из неравенства (45) вытекает, равенство

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p \, dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность решения задачи (1), понимаемого в слабом смысле определения 2.

Основной результат.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема

Для всякой $f \in \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$ *существует единственное слабое обобщенное решение* $u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *задачи* (1), *понимаемой в слабом смысле определения* 2.