

Основы математического моделирования: явная и неявная разностные схемы для уравнения теплопроводности, метод прогонки

Рассмотрим различные варианты разностной аппроксимации линейного одномерного по пространству уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T],$$

где $T > 0$ — некоторая константа.

Введем в области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ равномерную сетку с шагом h по координате и шагом τ по времени:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad hN = l; \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \tau J = T.$$

Рассматриваемое уравнение теплопроводности содержит как производные по пространственной переменной x , так и по времени t , поэтому для построения его разностной аппроксимации придется использовать узлы сетки, соответствующие как минимум двум различным j . Свойства разностных схем зависят от того, на каком слое j по времени аппроксимируется выражение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Рассмотрим возможные варианты.

1 Явная схема

Для аппроксимации оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ используем шаблон, приведенный на рисунке 1.

Соответствующий разностный оператор $L_{h\tau}^{(0)} u$ имеет вид:

$$L_{h\tau}^{(0)} u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - a^2 \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

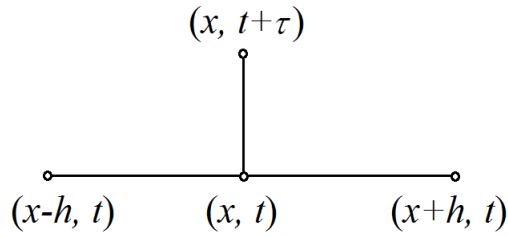


Рис. 1: Шаблон явной схемы для уравнения теплопроводности.

Далее для краткости будем использовать следующие стандартные обозначения:

$$u = u(x, t); \quad \hat{u} = u(x, t + \tau).$$

Тогда:

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad L_{h\tau}^{(0)} u = u_t - a^2 u_{\bar{x}x}.$$

Найдем погрешность аппроксимации разностным оператором $L_{h\tau}^{(0)}$ исходного дифференциального оператора L в точке (x, t) . В случае достаточно гладкой функции $u(x, t)$ при достаточно малых шагах h и τ имеем:

$$u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\tau), \quad (1.1)$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2). \quad (1.2)$$

Следовательно, разностный оператор $L_{h\tau}^{(0)}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L с погрешностью $O(\tau) + O(h^2)$ в точке (x, t) :

$$L_{h\tau}^{(0)} u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t)]} + O(\tau) + O(h^2).$$

Разностная аппроксимация уравнения теплопроводности в соответствии с выбранным шаблоном будет иметь наименьшую погрешность, если правую часть $f(x, t)$ уравнения аппроксимировать в узлах (x_i, t_j) , так как при оценке погрешности аппроксимации все выражения раскладываются по формуле Тейлора с центром в этой точке. Итак, в явной схеме для уравнения теплопроводности разностная аппроксимация уравнения имеет вид:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} + f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (1.3)$$

Разностное уравнение (1.3) аппроксимирует исходное дифференциальное на достаточно гладком решении $u(x, t)$ с первым порядком погрешности по τ и вторым по h .

Исследуем схему на устойчивость по начальным данным с помощью метода гармоник.

Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} \quad (1.4)$$

с начальным условием

$$y_n^0 = e^{iqx_n} = e^{i\alpha_q n}, \quad \alpha_q = qh.$$

При этом получаем $y_n^j = \lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$, где λ_q — множители роста. Подставляя y_n^j в уравнение (1.4) и сокращая на $\lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0.$$

Так как

$$\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{4} = - \left(\frac{e^{i\frac{\alpha_q}{2}} - e^{-i\frac{\alpha_q}{2}}}{2i} \right)^2 = - \sin^2 \frac{\alpha_q}{2},$$

то

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

При изменении α_q (когда число q пробегает все значения от минус до плюс бесконечности) число $\lambda_q(\alpha_q)$ пробегает весь спектр оператора перехода со слоя на слой. В данном случае спектр расположен на отрезке $[1 - 4ra^2, 1]$ (см. рисунок 2).

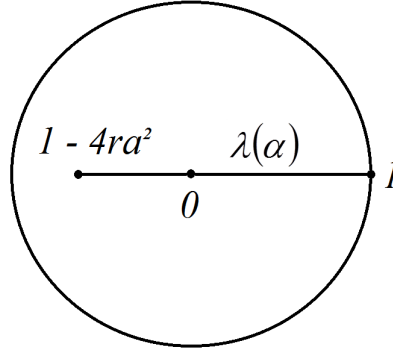


Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой явной схемы для уравнения теплопроводности. Окружность — это граница области, в пределах которой должно оставаться λ , для того чтобы было выполнено спектральное условие устойчивости.

Необходимое условие устойчивости явной схемы выполнено, если

$$1 - 4ra^2 \geq -1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

Можно показать, что это же условие является и достаточным для устойчивости схемы. Таким образом, явная схема для уравнения теплопроводности является *условно устойчивой*. Ее можно использовать только в том случае, когда шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

2 Чисто неявная схема.

Используем для аппроксимации оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ шаблон, приведенный на рисунке 3.

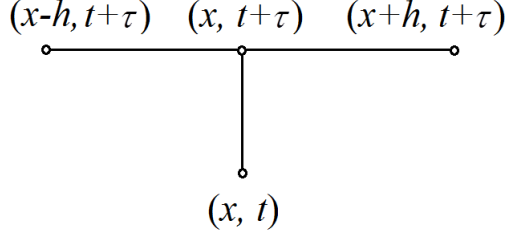


Рис. 3: Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности.

Тогда разностная аппроксимация оператора L уравнения теплопроводности будет выглядеть следующим образом:

$$L_{h\tau}^{(1)}u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - a^2 \frac{u(x + h, t + \tau) - 2u(x, t + \tau) + u(x - h, t + \tau)}{h^2} = u_t - a^2 \hat{u}_{\bar{x}x}.$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации разностным оператором $L_{h\tau}^{(1)}$ исходного дифференциального оператора L в точке $(x, t + \tau)$. Так как для достаточно гладкой функции $u(x, t)$ справедливы равенства

$$u_t = \frac{\partial u(x, t + \tau)}{\partial t} + O(\tau), \quad \hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2),$$

то оператор $L_{h\tau}^{(1)}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L с погрешностью $O(\tau) + O(h^2)$ в точке $(x, t + \tau)$:

$$L_{h\tau}^{(1)}u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \tau)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \tau)]} + O(\tau) + O(h^2).$$

При аппроксимации уравнения в соответствии с выбранным шаблоном удобно взять правую часть уравнения в точке (x_n, t_{j+1}) , так как это уменьшает погрешность. Итак, разностная аппроксимация уравнения теплопроводности с использованием чисто неявной схемы имеет вид:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} + f_n^{j+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1.$$

Исследуем неявную схему на устойчивость по начальным данным с помощью метода гармоник. Для этого рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2}.$$

Подставляя в него $y_n^j = \lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$, где $\alpha_q = qh$, и сокращая на $\lambda_q^j e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\lambda_q - 1 - \frac{a^2 \tau}{h^2} \lambda_q (e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_q(\alpha_q) = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Спектр $\lambda_q(\alpha_q)$ заполняет отрезок вещественной оси:

$$\frac{1}{1 + 4ra^2} \leq \lambda_q(\alpha_q) \leq 1,$$

то есть необходимое условие устойчивости $|\lambda_q| \leq 1$ выполнено при любом r . Можно показать, что неявная схема для уравнения теплопроводности действительно является безусловно устойчивой, то есть устойчивой при любом соотношении шагов τ и h сетки.

3 Схема с весом для уравнения теплопроводности.

Используем шаблон, приведенный на рис. 4, и линейную комбинацию операторов $L_{h\tau}^{(0)}$ и $L_{h\tau}^{(1)}$ для аппроксимации дифференциального оператора L :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} u = \sigma L_{h\tau}^{(1)} u + (1 - \sigma) L_{h\tau}^{(0)} u = \sigma u_t - \sigma a^2 \hat{u}_{\bar{x}\bar{x}} + (1 - \sigma) u_t - (1 - \sigma) a^2 u_{\bar{x}\bar{x}} = u_t - a^2 (\sigma \hat{u}_{\bar{x}\bar{x}} + (1 - \sigma) u_{\bar{x}\bar{x}}),$$

где $\sigma \in [0, 1]$. При $\sigma = 0$ получаем разностный оператор, соответствующий явной схеме, при $\sigma = 1$ — чисто неявной.

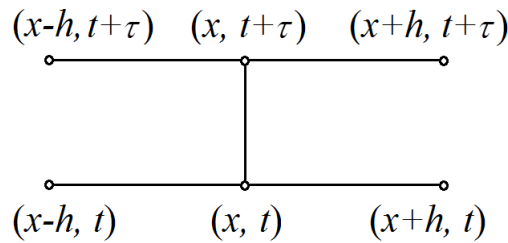


Рис. 4: Шаблон схемы с весом для уравнения теплопроводности.

Отдельный интерес представляет случай $\sigma = 0.5$, так как при этом разностный оператор аппроксимирует исходный дифференциальный со вторым порядком погрешности не только по координате, но и по времени. В самом деле, рассмотрим погрешность аппроксимации в точке $((x, t + \tau/2))$:

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + O(\tau^2), \\
\hat{u}_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+\tau)} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + O(\tau^2) + O(h^2), \\
u_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t)} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \Big|_{(x, t+0.5\tau)} + O(\tau^2) + O(h^2).
\end{aligned}$$

Следовательно, при $\sigma = 0.5$ в точке $(x, t + 0.5\tau)$ оператор $L_{h\tau}^{(0.5)}$ в силу своей симметрии аппроксимирует L со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} u = \underbrace{\frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2}}_{L[u(x, t + \frac{\tau}{2})]} - \frac{\tau a^2}{2} \underbrace{(2\sigma - 1)}_{0 \text{ при } \sigma=0.5} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2) + O(h^2).$$

Для того, чтобы получить разностное уравнение, аппроксимирующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

с погрешностью $O(\tau^2) + O(h^2)$ в точке $(x, t + \frac{\tau}{2})$, достаточно взять в качестве сеточной аппроксимации правой части $f(x, t)$ этого уравнения функцию $\varphi(x_n, t_j) = f(x_n, t_j + 0.5\tau)$.

Итак, разностное уравнение

$$L_{h\tau}^{(0.5)} y = \varphi,$$

где $\varphi(x_n, t_j) = f(x_n, t_j + 0.5\tau)$, аппроксимирует уравнение теплопроводности со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h .

Симметричная схема, соответствующая $\sigma = 0.5$, является безусловно устойчивой.

4 Реализация явной разностной схемы для начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

В качестве примера рассмотрим начально-краевую задачу на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq 1, \\ u(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \\ u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = t. \end{cases} \quad (4.1)$$

Прежде всего, найдем аналитическое решение задачи (4.1). В силу ее линейности решение можно искать в виде $u(x, t) = v(x, t) + xt$, где функция $v(x, t)$ удовлетворяет задаче с однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, & 0 < t \leq 1, \\ v(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right), \\ v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0. \end{cases}$$

Используя метод разделения переменных, получаем: $v = e^{-(3\pi/2)^2 t} \sin(3\pi x/2)$. Следовательно, аналитическое решение задачи (4.1) имеет вид:

$$u(x, t) = xt + e^{-(\frac{3\pi}{2})^2 t} \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right).$$

Для того, чтобы получить численное решение, введем в расчетной области равномерную сетку:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad hN = 1, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad \tau J = 1,$$

такую что $\tau \leq h^2/2$. Для этого достаточно N задать произвольно, а J выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $J \geq 2N^2$.

Построим разностную аппроксимацию уравнения в соответствии с явной схемой:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} + x_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (4.2)$$

Это разностное уравнение необходимо дополнить соответствующими начальными и граничными условиями на сетке. Начальное условие и граничное условие Дирихле при $x = 0$ аппроксимируются точно:

$$y_n^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_n}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$y_0^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Граничное условие при $x = 1$ содержит производную $\frac{\partial u}{\partial x}$. Если ее просто заменить односторонней разностной производной, то уравнение

$$\frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} = t_j, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad (4.3)$$

будет аппроксимировать соответствующее граничное условие с первым порядком погрешности аппроксимации по h . Это означает, что и для всей разностной схемы порядок погрешности аппроксимации по h будет первым.

Для того, чтобы для всей схемы сохранить погрешность аппроксимации $O(\tau) + O(h^2)$, можно использовать различные подходы. Например, можно аппроксимировать граничное условие с помощью трехточечной односторонней производной:

$$\frac{3y_N^{j+1} - 4y_{N-1}^{j+1} + y_{N-2}^{j+1}}{2h} = t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1.$$

В результате получим следующую разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} + x_n, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \\ y_n^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_n}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^{j+1} = 0, \quad \frac{3y_N^{j+1} - 4y_{N-1}^{j+1} + y_{N-2}^{j+1}}{2h} = t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Рассмотрим алгоритм решения системы (4.4). При $j = 0$ значения y_n^0 известны из начального условия, а значения y_n^1 неизвестны и должны быть найдены для всех $n = 0, 1, \dots, N$. Когда найдены все значения y_n^1 , нужно найти y_n^2 и т.д. Следовательно, при каждом фиксированном $j = 0, 1, \dots, J - 1$ неизвестными являются значения y_n^{j+1} . Найти их можно следующим образом:

1) при $n = 1, 2, \dots, N - 1$ из первого уравнения системы (4.4) находим

$$y_n^{j+1} = y_n^j + \frac{\tau}{h^2} (y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j) + \tau x_n;$$

2) при $n = 0$ и $n = N$ пользуемся граничными условиями, учитывая, что y_1^{j+1} , y_{N-1}^{j+1} и y_{N-2}^{j+1} уже известны:

$$y_0^{j+1} = 0, \quad y_N^{j+1} = \frac{4}{3}y_{N-1}^{j+1} - \frac{1}{3}y_{N-2}^{j+1} + \frac{2ht_{j+1}}{3};$$

3) переходим на новый слой по времени, увеличивая j на единицу и повторяем действия 1) и 2).

На рисунках 5-7 приведены аналитическое решение задачи 4.1, результаты ее численного решения по схеме (4.4) для $N = 50$ и $J = 10 + 2N^2$ (число J подобрано так, чтобы условие устойчивости явной схемы выполнялось) и погрешность численного решения.

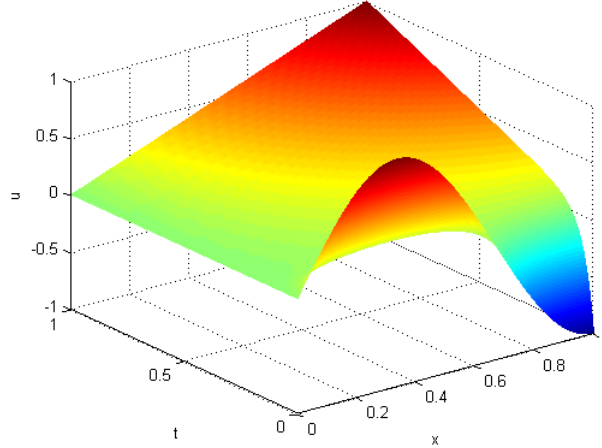


Рис. 5: Аналитическое решение задачи (4.1).

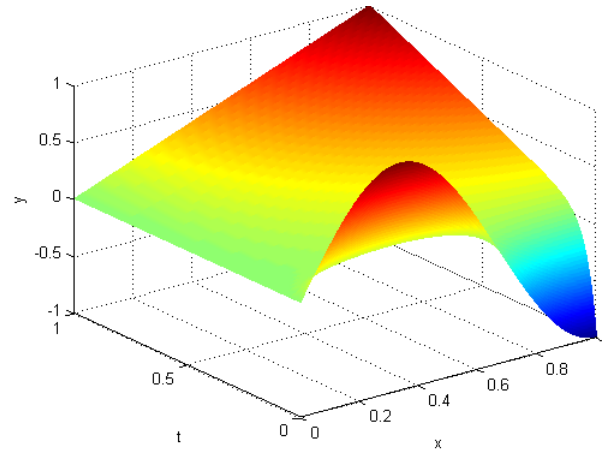


Рис. 6: Численное решение задачи (4.1) с помощью схемы (4.4)

Другой способ улучшить погрешность аппроксимации граничного условия, не меняя при этом оператор, это изменить расчетную сетку. Если $x = 1$ будет *центральной* точкой отрезка $[x_{N-1}, x_N]$, то разностное уравнение

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1} \quad (4.5)$$

будет аппроксимировать условие $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = t$ с погрешностью $O(h^2)$, так как $\frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h}$ в точке $x = 1$ представляет собой центральную производную. Итак, для того, чтобы в яв-

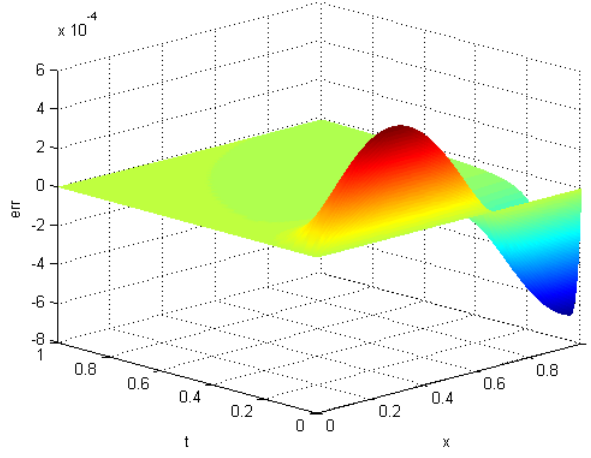


Рис. 7: Погрешность решения задачи с помощью явной схемы (4.4)

ной схеме для рассматриваемой задачи условие (4.5) давало второй порядок погрешности аппроксимации по h , достаточно ввести сетку следующим образом:

$$x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad x_N = Nh = 1 + h/2 \Leftrightarrow h = \frac{1}{N - 0.5}. \quad (4.6)$$

Заметим, что при $x = 0$ мы сетку не сдвигали, так как в точке $x = 0$ задано условие Дирихле, и нам нужно, чтобы узел сетки попадал точно в эту точку.

5 Реализация неявной схемы для уравнения теплопроводности. Метод прогонки.

Построим чисто неявную разностную схему для той же самой начально-краевой задачи (4.1). Используем, например, сетку (4.6) по x , и сетку с произвольным шагом по t , так как неявная схема безусловно устойчива. Разностная схема:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n^0 = \sin\left(\frac{3\pi x_n}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ y_0^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + x_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ \frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

имеет погрешность аппроксимации $O(\tau) + O(h^2)$.

Значения сеточной функции y_n^j на нулевом слое по времени известны из начального условия, поэтому, как и в случае явной схемы, при каждом фиксированном $j = 0, 1, \dots, J-1$

неизвестными являются y_n^{j+1} . В отличие от явной схемы, в которой эти значения просто выражались из разностного уравнения и граничных условий, в данном случае для перехода со слоя на слой придется решать систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0^{j+1} = 0, \\ \frac{\tau}{h^2} y_{n-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_n^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{n+1}^{j+1} = -(y_n^j + \tau x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_{N-1}^{j+1} - y_N^{j+1} = -ht_{j+1}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Система (5.2) является частным случаем системы:

$$\begin{cases} -c_0 y_0^{j+1} + b_0 y_1^{j+1} = -f_0, \quad (n = 0), \\ a_n y_{n-1}^{j+1} - c_n y_n^{j+1} + b_n y_{n+1}^{j+1} = -f_n, \quad (n = 1, 2, \dots, N-1), \\ a_N y_{N-1}^{j+1} - c_N y_N^{j+1} = -f_N, \quad (n = N) \end{cases} \quad (5.3)$$

где $c_0 = 1$, $b_0 = 0$, $f_0 = 0$, $a_n = b_n = \frac{\tau}{h^2}$, $c_n = 1 + \frac{2\tau}{h^2}$, $f_n = y_n^j + \tau x_n$, $a_N = c_N = 1$, $f_N = ht_{j+1}$.

Система (5.3) представляет собой систему с трехдиагональной матрицей. Для ее решения удобно использовать так называемый *метод прогонки*.

5.1 Метод прогонки для систем с трехдиагональной матрицей

Основным прямым методом, используемым для решения СЛАУ, возникающих в разностных схемах для начально-краевых задач математической физики, является метод прогонки и различные его варианты. Классический вариант метода прогонки, называемый также монотонной правой прогонкой, представляет собой метод Гаусса без выбора главного элемента для систем с трехдиагональной матрицей.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0, \quad (i = 0), \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N = -f_N, \quad (i = N) \end{cases} \quad (5.4)$$

Будем формально исключать элементы ниже главной диагонали, а затем сформулируем достаточные условия применимости соответствующего алгоритма. Пусть $c_0 \neq 0$. Тогда первое уравнение системы можно переписать в виде

$$y_0 = \frac{b_0}{c_0} y_1 + \frac{f_0}{c_0} = \alpha_0 y_1 + \beta_0, \quad \text{где } \alpha_0 = \frac{b_0}{c_0}, \beta_0 = \frac{f_0}{c_0}.$$

Исключим во втором уравнении элемент y_0 :

$$a_1 y_0 - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1 \Rightarrow a_1(\alpha_0 y_1 + \beta_0) - c_1 y_1 + b_1 y_2 = -f_1 \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_0}y_2 + \frac{f_1 + a_1\beta_0}{c_1 - a_1\alpha_0} = \alpha_1y_2 + \beta_1,$$

где $\alpha_1 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_0}$, $\beta_1 = \frac{f_1 + a_1\beta_0}{c_1 - a_1\alpha_0}$, если $c_1 - a_1\alpha_0 \neq 0$. Продолжая эти рассуждения, получаем

$$\begin{cases} y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ y_N = \beta_N, \end{cases}$$

где $\alpha_0 = \frac{b_0}{c_0}$, $\beta_0 = \frac{f_0}{c_0}$, $\alpha_i = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}$, $\beta_i = \frac{f_i + a_i\beta_{i-1}}{c_i - a_i\alpha_{i-1}}$. Вычисление коэффициентов α и β по этим формулам называется прямым ходом прогонки. Когда они найдены, решение исходной системы может быть вычислено в результате обратного хода прогонки:

$$\begin{cases} y_N = \beta_N, \\ y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i, & i = N-1, N-2, \dots, 0. \end{cases}$$

Для решения системы (5.4) данным методом необходимо затратить $Q = 8N + 1$ действий. Метод правой монотонной прогонки корректен, если выражения в знаменателе для коэффициентов α_i , β_i не обращаются в ноль ни при каких i . Если допустить, что прогоночные коэффициенты находятся точно, а в y_N допущена ошибка ε_N , то погрешность решения ε_i будет удовлетворять однородному уравнению $\varepsilon_i = \alpha_i \varepsilon_{i+1}$, то есть не будет нарастать при выполнении условия $|\alpha_i| \leq 1$ для всех i . В этом случае можно говорить об устойчивости метода прогонки.

Теорема 5.1 Если коэффициенты системы удовлетворяют условиям $c_0 \neq 0$, $c_N \neq 0$,

$$|a_i| > 0, \quad |b_i| > 0, \quad |c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.5)$$

$$|c_0| \geq |b_0|, \quad |c_N| \geq |a_N|, \quad (5.6)$$

причем хотя бы в одном из неравенств (5.5) или (5.6) выполняется строгое неравенство, то есть для матрицы системы (5.4) имеет место диагональное преобладание, то $c_i - a_i\alpha_{i-1} \neq 0$ и $|\alpha_i| \leq 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, N-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что $0 \leq |\alpha_0| = \frac{|b_0|}{|c_0|} \leq 1$. Пусть $|\alpha_i| \leq 1$, тогда

$$|\alpha_{i+1}| = \frac{|b_{i+1}|}{|c_{i+1} - a_{i+1}\alpha_i|} \leq \frac{|b_{i+1}|}{|c_{i+1}| - |a_{i+1}|} \leq \frac{|b_{i+1}|}{|b_{i+1}|} = 1.$$

Следовательно, $|\alpha_i| \leq 1$ для всех $i = 0, 1, \dots, N-1$. Кроме того, имеют место неравенства

$$|c_i - a_i\alpha_{i-1}| \geq |c_i| - |a_i| \cdot |\alpha_{i-1}| \geq |b_i| + |a_i| \cdot (1 - |\alpha_{i-1}|) \geq |b_i| > 0, \quad i \leq N-1,$$

откуда получаем, что $c_i - a_i\alpha_{i-1} \neq 0$ при $i \leq N-1$.

Остается показать, что $c_N - a_N \alpha_{N-1} \neq 0$. По условию хотя бы в одном из неравенств (5.5) или (5.6) выполняется строгое неравенство. Если $|c_N| > |a_N|$, то $c_N - a_N \alpha_{N-1} \neq 0$, так как $|\alpha_{N-1}| \leq 1$. Если существует $1 \leq i_0 \leq N - 1$, такое что $|c_{i_0}| > |a_{i_0}| + |b_{i_0}|$, то $|c_{i_0} - a_{i_0} \alpha_{i_0-1}| > |b_{i_0}|$, откуда следует, что $|\alpha_{i_0}| < 1$. Тогда по индукции получаем, что $|\alpha_i| < 1$ для всех $i \geq i_0 + 1$. Следовательно, $|c_N - a_N \alpha_{N-1}| > 0$, так как $|\alpha_{N-1}| < 1$. Наконец, если $|c_0| > |b_0|$, то неравенство $|\alpha_i| < 1$ выполняется, начиная с $i = 0$, а значит, как и в предыдущем случае, $|c_N - a_N \alpha_{N-1}| > 0$.

Сформулированные условия являются лишь *достаточными* условиями корректности метода монотонной правой прогонки. Их можно ослабить, разрешив некоторым из коэффициентов a_i и b_i обращаться в ноль.

Вернемся к решению системы (5.2). Очевидно, что для нее достаточные условия устойчивости прогонки выполнены. Задавая начальное условие при всех $n = 0, 1, \dots, N$ и в цикле по $j = 0, 1, \dots, J - 1$ решая систему (5.2) методом прогонки, мы полностью решим систему (5.1). Результаты вычислений по неявной схеме (5.1) в случае $N = M = 50$ приведены на рис. 8-9.

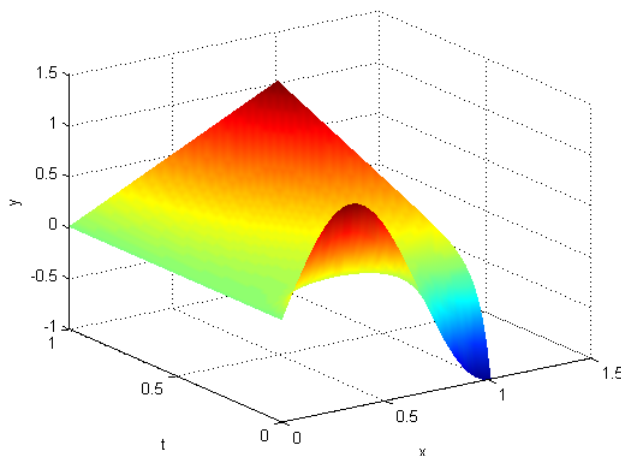


Рис. 8: Численное решение задачи с помощью неявной схемы.

6 Реализация симметричной неявной схемы для уравнения теплопроводности

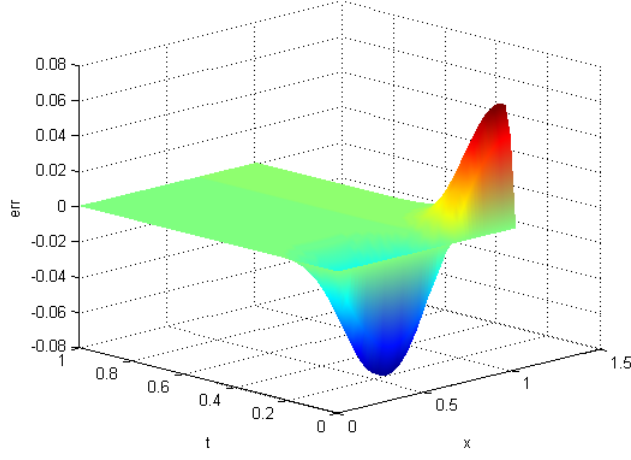


Рис. 9: Погрешность численного решения задачи с помощью неявной схемы.

Рассмотрим теперь симметричную разностную схему (схему с весом $\sigma = 0.5$) для начально-краевой задачи (4.1). Используем для сравнения две сетки по координате x :

вариант а) $x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, $Nh = 1$;

вариант б) $x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, $Nh = 1 + h/2$.

Аппроксимация уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

в соответствии с симметричной разностной схемой имеет вид:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) + x_n, \quad (6.1)$$

где $n = 1, 2, \dots, N-1$, $j = 0, 1, \dots, J-1$. Разностное уравнение (6.1) аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение теплопроводности с погрешностью $O(\tau^2) + O(h^2)$ в точках $(x_n, t_j + 0.5\tau)$ для всех внутренних узлов x_n при $j = 0, 1, \dots, J-1$.

Начальное условие и условие Дирихле при $x = 0$ аппроксимируются так же, как и в двух рассмотренных ранее случаях. Граничное условие Неймана при $x = 1$ аппроксимируем разностным уравнением

$$\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} = t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, J-1.$$

При этом схема будет иметь погрешность аппроксимации $O(h) + O(\tau^2)$, если используется сетка а), и $O(h^2) + O(\tau^2)$ при использовании сетки б).

Как и в случае чисто неявной схемы, при каждом j получаем систему с трехдиагональной матрицей для неизвестных y_n^{j+1} :

$$\begin{cases} y_0^{j+1} = 0, \\ ay_{n-1}^{j+1} - cy_n^{j+1} + by_{n+1}^{j+1} = -f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_{N-1}^{j+1} - y_N^{j+1} = -ht_{j+1}, \end{cases} \quad (6.2)$$

однако в данном случае

$$a = b = \frac{\tau}{2h^2}, \quad c = 1 + 2a, \quad f_n = y_n^j + \tau x_n + \frac{\tau}{2h^2}(y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j).$$

Достаточные условия устойчивости прогонки для системы (6.2) выполнены. Результаты расчетов по схеме (6.2) для $N = M = 50$ приведена на рисунках 10-11.

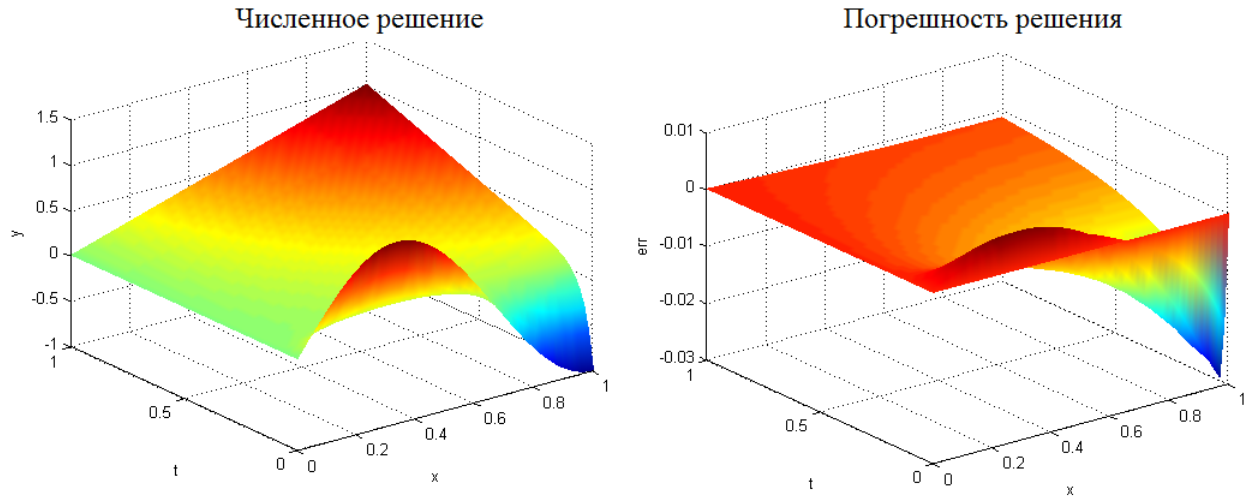


Рис. 10: Численные решения задачи с помощью симметричной схемы и его погрешность на сетке а)

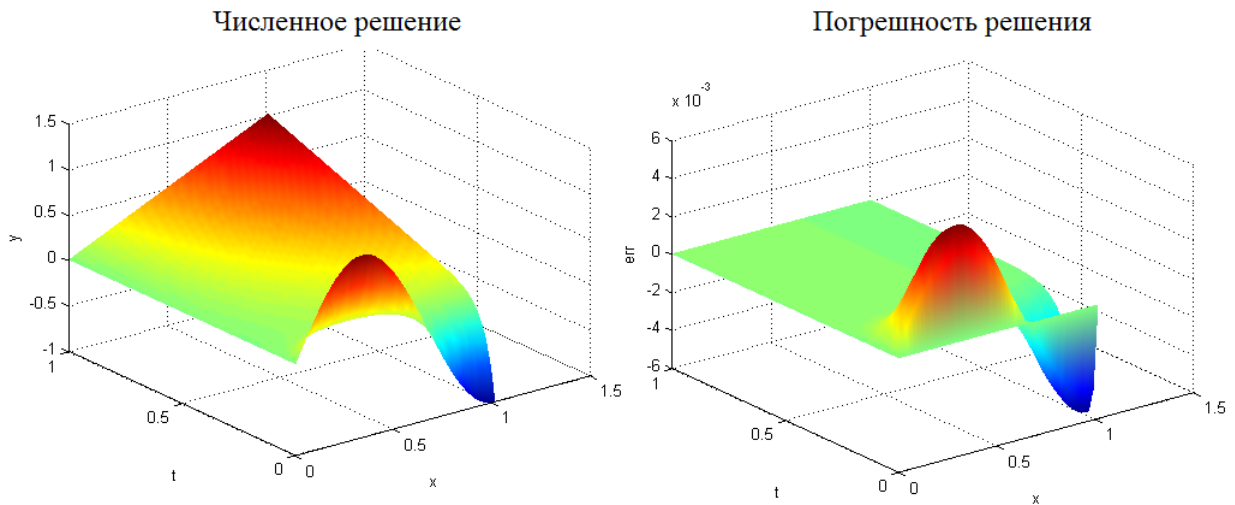


Рис. 11: Численные решения задачи с помощью симметричной схемы и его погрешность на сетке б)