Основы математического моделирования

Семинар: Линейное и квазилинейное уравнения переноса. Метод характеристик.

Уравнения переноса используются при моделировании процессов распространения частиц или энергии. В общем случае это интегро-дифференциальное уравнения (например, уравнение Больцмана). Мы рассмотрим основные свойства уравнений переноса на примере одномерных (по пространству) линейных и квазилинейных уравнений.

1. Линейное уравнения переноса.

Одномерное линейное уравнение переноса - это частный случай уравнения в частных производных первого порядка:

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x,t)u = f(x,t). \qquad (1)$$

Не ограничивая общности, будем считать, что a, b, c, f - непрерывно-дифференцируемые функции, причем $a \neq 0$. Если разделить уравнение (1) на $a(x,t)$, оно примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{q(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{c}(x,t)u}_{\frac{\partial}{\partial x}(q \cdot u) + d(x,t)\cdot u} = \tilde{f}(x,t). \qquad (2)$$

Уравнение (2) - пример линейного уравнения переноса, функция $q(x,t)$ имеет смысл <u>скорости</u> переноса.

Введем понятие <u>характеристик</u> для уравнения (1).

Основная цель: выполнить такую замену переменных, чтобы уравнение превратилось в обыкновенное дифференциальное. Заметим, что $a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}$ с точностью до нормировочного множителя представляет собой производную по направлению

$$\vec{A}(x,t)=\{a(x,t),\quad b(x,t)\}.$$

Следовательно, если рассмотреть линии, касательный вектор к которым в любой точке коллинеарен $\vec{A}(x,t)$, и ввести вдоль этих линий параметр τ, то $a\frac{\partial u}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}$ превратится в производную по τ.

Характеристики уравнения (1):

$\begin{cases} t=t(\tau) \\ x=x(\tau) \end{cases}$ – линии на плоскости x,t, такие что
$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau}=a(x,t) \\ \dfrac{dx}{d\tau}=b(x,t) \end{cases} \qquad (3)$$

Исключая из (3) параметр τ, уравнение характеристик можно переписать в виде:

$$\boxed{\frac{dt}{a(x,t)}=\frac{dx}{b(x,t)}}=(d\tau) \qquad (4)$$

Интегральные кривые уравнения (4) представляют собой характеристики уравнения (1).

Они представляют собой однопараметрическое семейство $\Psi(x,t) = \bar{C}$,

где $\bar{C}$ - произвольная константа.

Для линейного уравнения при сформулированных условиях на функции $a(x,t)$ и $b(x,t)$ через любую точку (x,t) проходит одна характеристика (то есть, характеристики не пересекаются)

В самом деле, выберем произвольную точку (x_0, t_0) и рассмотрим задачу Коши для проходящей через неё характеристики:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = q(x,t) \quad , \quad q(x,t) = \dfrac{b(x,t)}{a(x,t)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (5)$$

Функция $q(x,t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, t_0), то есть, в окрестности (x_0, t_0) задача (5) имеет единственное решение.

Это и означает, что через (x_0, t_0) проходит единственная характеристика.

Следовательно, для любой точки (x,t) существует единственная константа $\bar{C}$, определяющая проходящую через эту точку характеристику. Положение точки (x,t) на этой характеристике однозначно определяется значением параметра τ. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между координатами (x,t) и $(\bar{c},\tau)$. Перейдём к новым координатам:

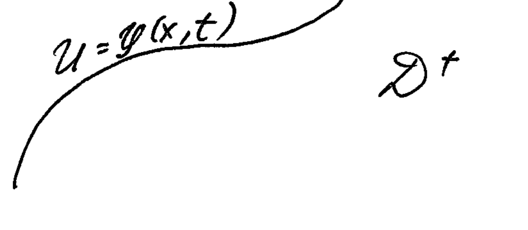
$$\tilde{u}(\bar{c},\tau) = u(x(\bar{c},\tau);\ t(\bar{c},\tau))$$

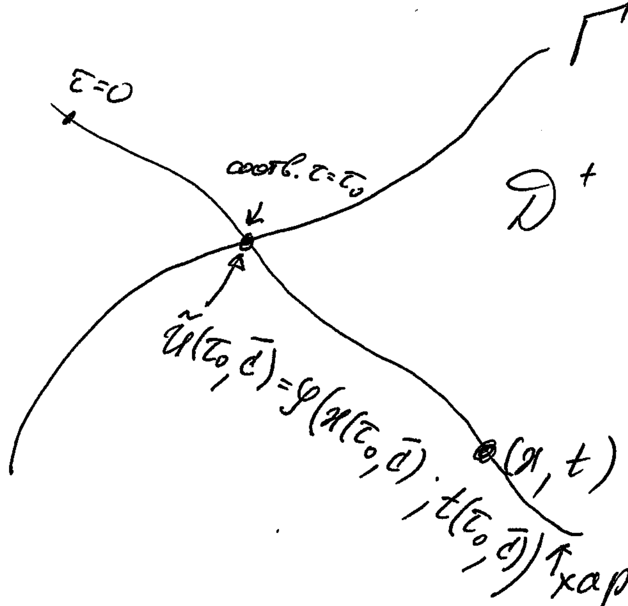
$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{d\tau}}_{b(x,t)} + \frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{a(x,t)} = a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}$$

В новых переменных уравнение (1) принимает вид:
$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} + c(x(c,\tau);\ t(c,\tau))\tilde{u} = f(x(c,\tau);\ t(c,\tau)).$$

Сформулируем начально-краевую задачу для уравнения (1). Пусть Γ - кривая на плоскости x,t, которая не является характеристикой, и которую любая характеристика пересекает 1 раз. Пусть на Γ значение функции $u(x,t)$ известно и равно $\varphi(x,t)$. Тогда получаем задачу:

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial u}{\partial t} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} + cu = f(x,t)\ ; & (x,t)\in D^+ \\ u\Big|_{\Gamma} = \varphi(x,t) \end{cases} \qquad (5)$$





Метод характеристик: выбираем ∀т. (x, t), проводим через неё характеристику и переходим к переменным $(\bar{c}, \bar{\tau})$.

В точке пересечения характеристики с кривой Γ значение функции известно. Параметр τ_0 соответствует точке пересечения. В итоге в новых переменных получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{d\tau} + C\cdot\tilde{u} = f \\ \tilde{u}\Big|_{\tau=\tau_0} = \varphi \end{cases} \qquad (6)$$

Пример 1 На берегу реки находится предприятие, осуществляющее в неё сброс производственных отходов каждый рабочий день с определенного момента времени. Количество сбрасываемого вещества в единицу времени известно и равно $f(t)$. Скорость течения реки известна и равна $g(x)$. Также известно, что при переносе вещество частично осаждается. Коэффициент осаждения равен $\alpha > 0$.

Необходимо найти концентрацию вещества в толще воды в зависимости от времени и расстояния от предприятия.

<u>Решение.</u> Пренебрежем шириной реки по сравнению с её длиной и введем вдоль реки координату x. Пусть $u(x,t)$ - искомая концентрация.

За счет осаждения в единицу времени на единицу длины толщу воды покидает количество вещества $\alpha \cdot u(x,t)$.

Составим уравнение баланса вещества на участке $[x, x+\Delta x]$ за время $[t, t+\Delta t]$, пренебрегая перемешиванием:

$$\underbrace{\int_x^{x+\Delta x} \{u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi, t)\} d\xi}_{\text{изменение количества вещества за время } \Delta t \text{ на участке длиной } \Delta x} = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \{q(x)\cdot u(x,\tau) - q(x+\Delta x) u(x+\Delta x, \tau)\} d\tau}_{\text{разность втекающего и вытекающего количества вещества за время } \Delta t}$$

$$\underbrace{-\alpha \int_x^{x+\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} u(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau}_{\text{количество вещества, покидающее толщу воды за счет осаждения.}}$$

По теореме о среднем $\exists\, \xi^*, \xi^{**} \in [x, x+\Delta x]$ и $\tau^*, \tau^{**} \in [t, t+\Delta t]$, такие что

$$\{u(\xi^*, t+\Delta t) - u(\xi^*, t)\}\Delta x = \{q(x)u(x,\tau^*) - q(x+\Delta x)u(x+\Delta x, \tau^*)\}\Delta t -$$

$$-\alpha u(\xi^{**}, \tau^{**})\Delta x \Delta t.$$

Делим полученное уравнение на $\Delta x \Delta t$:

$$\frac{u(\xi^*, t+\Delta t) - u(\xi^*, t)}{\Delta t} = -\frac{q(x+\Delta x)u(x+\Delta x, \tau^*) - q(x)u(x,\tau^*)}{\Delta x} -$$

$$-\alpha u(\xi^{**}, \tau^{**})$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и $\Delta x \to 0$, получаем дифференциальное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(q u) - \alpha u, \quad x > x_0, \quad t > 0,$$

где $t=0$ - момент, когда каждый день начинается сброс вещества, x_0 - координата вдоль реки, соответствующая предприятию.

Начальные условия: $u\big|_{t=0} = 0$, т.к. до момента $t=0$ предприятие не работает.

Граничные условия: $q(x_0)\cdot u(x_0, t) = f(t)$, если пренебрегаем перемешиванием.

$$\frac{\partial}{\partial x}(q u) = q\frac{\partial u}{\partial x} + q' u. \text{ Пусть } \alpha + q'(x) = b(x).$$

В результате получаем начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + q\dfrac{\partial u}{\partial x} = -b(x)\cdot u\,; & x>x_0,\ t>0 \\ u\big|_{t=0}=0\,; \quad u\big|_{x=x_0} = \dfrac{f(t)}{q(x_0)} \end{cases}$$

Используем метод характеристик:

$$dt = \frac{dx}{q(x)} = d\tau \Rightarrow t - \int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{q(\xi)} = C\,,$$ где $C = const$,

представляют собой характеристики. Кривая Γ в данном случае состоит из двух лучей: $t=0$, $x\geq x_0$ и $x=x_0$, $t\geq 0$. Любая характеристика пересекает её один раз. Введем параметр τ вдоль характеристики таким образом, что $\tau=0$ при $x=x_0$:

$$\frac{dx}{q} = d\tau\,; \quad \tau=0 \text{ при } x=x_0 \Rightarrow \tau = \int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{q(\xi)}$$ – время прихода загрязнения в точку x. Переход к новым переменным:

$$\begin{cases} \tau = \displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{q(\xi)} \\ t-\tau = c \end{cases}$$

При этом $\tau\geq 0$, т.к. $x\geq x_0$, и $c+\tau\geq 0$, т.к. $t\geq 0$.

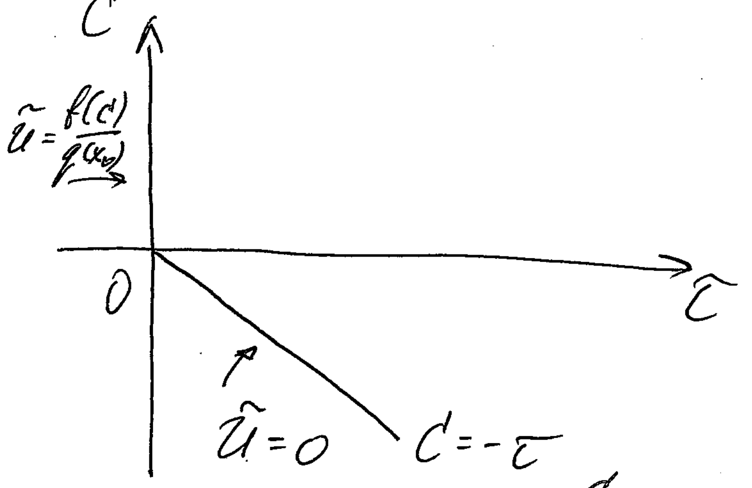
Пусть $b(x(\tau,c)) = \beta(\tau,c)$.

Уравнение в новых переменных принимает вид:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -\beta(\tau, c)\tilde{u}; \quad \tau > 0; \quad \tau + c > 0$$

Начальное условие: $t=0$ соответствует $\tau = -c$, причем $c \le 0$, т.к. по условию τ не может быть отрицательным. Итак, $\tilde{u}\big|_{\tau=-c} = 0$ при $c \le 0$.

Граничное условие: $x = x_0$ соответствует $\tau = 0$. При этом $t = c$, т.е. $c \ge 0$, т.к. $t \ge 0$ по условию. Итак, $\tilde{u}\big|_{\tau=0} = \frac{f(c)}{q(x_0)}$, $c \ge 0$.



Общее решение уравнения:

$$\tilde{u} = A(c) \cdot e^{-\int_0^{\tau} \beta(\tilde{\tau}, c)\, d\tilde{\tau}}$$

$$\tilde{u}\big|_{\tau=0} = A(c) = \frac{f(c)}{q(x_0)}, \quad c \ge 0$$

$$\tilde{u}\big|_{\tau=-c} = A(c)\underbrace{e^{-\int_0^{-c} \beta(\tilde{\tau}, c)\, d\tilde{\tau}}}_{\neq 0} = 0 \text{ при } c \le 0 \Rightarrow$$

$A(c) = 0$ при $c \le 0$. Следовательно:

$$\tilde{u} = \begin{cases} 0, & c \le 0 \\ \frac{f(c)}{q(x_0)} \cdot e^{-\int_0^{\tau} \beta(\tilde{\tau}, c)\, d\tilde{\tau}}, & c \ge 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным координатам, получаем:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t\le\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{q(\xi)},\\ \dfrac{f\left(t-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{q(\xi)}\right)}{q(x_0)}\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\alpha+q'(\xi)}{q(\xi)}d\xi}, & t\ge\int\limits_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{q(\xi)},\end{cases}$$

так как $\beta(\tilde{\tau},c)=b(\xi)=\alpha+q'(\xi)$; $d\tilde{\tau}=\dfrac{d\xi}{q(\xi)}$.

2. Квазилинейное уравнение переноса

Квазилинейным называется уравнение вида

$$a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t}+b(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t,u), \qquad (7)$$

в котором коэффициенты a, b или правая часть f зависят от искомой функции $u(x,t)$, а её производные входят в уравнение линейным образом.

Для квазилинейного уравнения также можно ввести понятие характеристик, сводя его к линейному. Для этого предположим, что решение уравнения (7) задано в неявном виде: $V(x,t,u)=0$, где V – дифференцируемая функция своих переменных, причем $\dfrac{\partial V}{\partial u}\ne 0$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial V/\partial t}{\partial V/\partial u}; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial V/\partial x}{\partial V/\partial u}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (7), умножим его на $\frac{\partial V}{\partial u}$ и перенесем все слагаемые на одну сторону. В итоге получим <u>линейное</u> однородное уравнение для функции $V(x,t,u)$:

$$a(x,t,u)\frac{\partial V}{\partial t} + b(x,t,u)\frac{\partial V}{\partial x} + f(x,t,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \qquad (8)$$

По аналогии с уравнением, рассмотренным в предыдущем пункте, для (8) можно ввести характеристики как линии в пространстве (x,t,u), касательные к которым в каждой точке параллельны вектору $\vec{A}(x,t,u) = \{a(x,t,u);\ b(x,t,u);\ f(x,t,u)\}$ в той же точке:

$$\begin{cases} t = t(\tau) \\ x = x(\tau) \\ u = u(\tau) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = a \\ \frac{dx}{d\tau} = b \\ \frac{du}{d\tau} = f \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dt}{a} = \frac{dx}{b} = \frac{du}{f} \qquad (9)$$

В системе (9) ситуацию, когда $f \equiv 0$, нужно понимать как $\frac{du}{d\tau} = 0$, т.е., $u = const$ вдоль характеристики

Пусть первые интегралы системы (9) имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,t,u) = C_1 \\ \varphi_2(x,t,u) = C_2 \end{cases} \quad (10)$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Уравнение (8) в новых переменных имеет вид

$\frac{d\tilde{V}}{d\tau} = 0$, то есть $V = const$ вдоль характеристик.

Следовательно, общее решение (8) можно записать в виде $V(x,t,u) = F(\varphi_1(x,t,u);\ \varphi_2(x,t,u))$, где $F(\alpha,\beta)$ – произвольная дифференцируемая функция своих аргументов. Тогда u: $F(\varphi_1(x,t,u);\varphi_2(x,t,u)) = 0$.

<u>Идея метода характеристик для начально-краевой задачи для уравнения (8)</u>

$$\begin{cases} a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + b(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u) \\ u\big|_{\Gamma} = \varphi(x,t) \end{cases} \quad (11)$$

Пусть найдены первые интегралы системы уравнений для характеристик: $\begin{cases} \varphi_1(x,t,u) = C_1 \\ \varphi_2(x,t,u) = C_2 \end{cases}$

Пусть (x^*, t^*) – точка на Γ (связь x^* и t^* известна из уравнения кривой Γ), и $u^* = \varphi(x^*, t^*)$ – известное значение $u(x,t)$ в этой точке. Тогда

$$\begin{cases} \varphi_1(x,t,u) = \varphi_1(x^*,t^*,u^*) \\ \varphi_2(x,t,u) = \varphi_2(x^*,t^*,u^*) \end{cases} \qquad (12)$$

В этой системе (x,t) – параметры, x^*, t^*, u^* по известным выражениям можно выразить через t^* или x^* (что удобнее). Тогда система (12) оказывается системой двух уравнений для двух неизвестных: $u(x,t)$ и $x^*(x,t)$ (или $t^*(x,t)$), которые нужно выразить через параметры t и x.

<u>Пример 2</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 - e^{t+u}, \quad x \in (0,1]; \; t \in (0,1] \\ u\big|_{t=0} = \ln \dfrac{2}{2x+1}; \quad u\big|_{x=0} = \ln \dfrac{2}{e^t - 2t e^{-t}} \end{cases}$$

Уравнение характеристик: $dt = dx = \dfrac{du}{1-e^{t+u}}$

Первые интегралы: $\begin{cases} t - x = C_1 \\ u = \ln \dfrac{2C_2 e^t}{1 + C_2 e^{2t}} \end{cases}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы

Получение второго равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 - e^{t+u} \Rightarrow y = e^{t+u} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = y + y\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -1 + \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial t} = 1 - y \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = (2-y)\cdot y \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y}\right)dy = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{2-y} = C_2 \cdot e^{2t} \Rightarrow y = \frac{2C_2 e^{2t}}{1+C_2 e^{2t}} = e^{t+u} \Rightarrow u = \ln \frac{2C_2 e^{t}}{1+C_2 e^{2t}}.$$

Начальные условия: $t=0 \Rightarrow \begin{cases} -x = C_1 \le 0 \\ \ln \dfrac{2}{-2C_1+1} = \ln \dfrac{2C_2}{1+C_2} \end{cases} \Rightarrow C_2^{-1} = -2C_1$ при $C_1 \le 0$

Граничные условия: $x=0 \Rightarrow \begin{cases} t = C_1 \ge 0 \\ \ln \dfrac{2}{e^{C_1} - 2C_1 e^{-C_1}} = \ln \dfrac{2}{C_2^{-1} e^{-C_1} + e^{C_1}} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2^{-1} = -2C_1$ при $C_1 \ge 0$. Следовательно, $C_2^{-1} = -2C_1$ всегда, то есть

$$C_2^{-1} = -2(t-x) = 2(x-t) \Rightarrow$$

$$u = \ln \frac{2}{C_2^{-1} e^{-t} + e^{t}} = \ln \frac{2}{2(x-t)e^{-t} + e^{t}}.$$

Пример 3 Через слой пористого вещества толщиной l проходит поток воздуха со скоростью $q = \text{const}$. Поток переносит химическое вещество, которое частично задерживается сорбентом. Пусть в любой момент времени концентрация задержанного сорбентом вещества a (в рассматриваемом сечении) связана с концентрацией вещества в порах (остающегося свободным и переносимого потоком дальше), равной c, соотношением

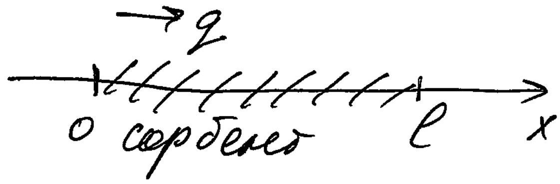
$a = k \cdot \ln(1+c)$, где $k>0$ - известная константа.

Найти концентрацию вещества в любом поперечном сечении сорбента в любой момент времени, если концентрация на входе растет линейно со временем ($u|_{x=0} = \alpha\cdot t$, $\alpha>0$ - известная константа, $t\in[0,T]$). Кроме того, известно, что

$l \le \dfrac{q}{k\cdot\alpha}$.

<u>Решение</u>. Пусть $u(x,t)$ - искомая концентрация,

$u(x,t) = c(x,t) + a(x,t)$, а координата x выбрана так, что



Пусть $u|_{t=0} = 0 \Rightarrow c|_{t=0} = a|_{t=0} = 0$

На входе $c|_{x=0} = \alpha\cdot t$; $a|_{x=0} = 0$.

Уравнение переноса получаем из уравнения баланса вещества на участке $[x, x+\Delta x]$ за время $[t, t+\Delta t]$, пренебрегая диффузией:

$$\underbrace{\int_x^{x+\Delta x}\{c(\xi,t+\Delta t)+a(\xi,t+\Delta t)-c(\xi,t)-a(\xi,t)\}d\xi}_{\substack{\text{изменение количества вещества на}\\ \text{участке } [x,\,x+\Delta x] \text{ за время } [t,\,t+\Delta t]}} =$$

$$= \underbrace{\int_t^{t+\Delta t}\{q\cdot c(x,\tau) - q\,c(x+\Delta x,\tau)\}d\tau}_{\substack{\text{разность втекающего и вытекающего}\\ \text{количества вещества за время } [t,\,t+\Delta t]}}.$$

Применяя теорему о среднем, деля уравнение на $\Delta x\,\Delta t$ и устремляя Δt и Δx к нулю, получаем уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + \dfrac{\partial a}{\partial t} = -q\dfrac{\partial c}{\partial x}; \quad t>0,\ x\in(0,l] \\ a = k\cdot\ln(1+c); \quad c\big|_{t=0} = a\big|_{t=0} = 0; \quad c\big|_{x=0} = \alpha\cdot t. \end{cases}$$

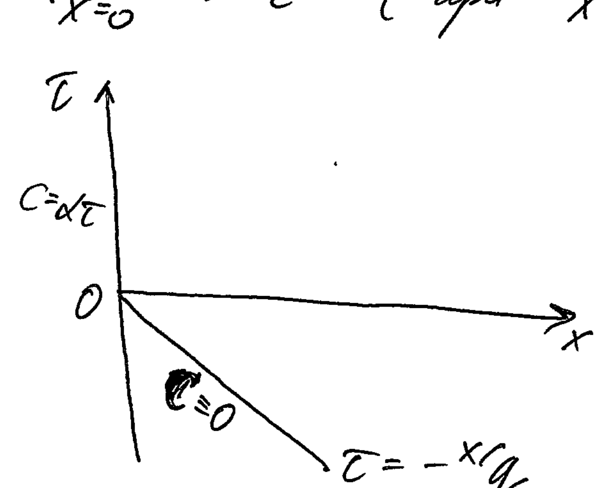
Упростим уравнение, вводя "локальное" время $\tau = t - x/q$.

Перейдем к координатам $\begin{cases} \tau = t - x/q \\ \xi = x \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial \tau}; \ \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} - \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial}{\partial \tau}$

$$\cancel{\frac{\partial c}{\partial \tau}} + \frac{\partial a}{\partial \tau} = -q\frac{\partial c}{\partial \xi} + \cancel{\frac{\partial c}{\partial \tau}} \Rightarrow \frac{\partial a}{\partial \tau} + q\frac{\partial c}{\partial \xi} = 0.$$

Далее для удобства переобозначим ξ за x (ξ было введено для того, чтобы аккуратно и правильно выполнить замену переменных). Пользуясь связью a и c, получаем задачу с квазилинейным уравнением переноса:

$$\begin{cases} \dfrac{k}{1+c}\dfrac{\partial c}{\partial \tau} + q\dfrac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad x\in(0,l]; \quad \tau + \dfrac{x}{q} > 0 \\ c\big|_{\tau=-x/q} = 0 \ (\text{соответствует } t=0) \\ c\big|_{x=0} = \alpha\cdot\tau \ (\text{при } x=0 \ \tau=t) \end{cases}$$



Уравнение характеристик:

$$\frac{d\tau}{k/(1+c)} = \frac{dx}{q} = \frac{dc}{0}$$

Первые интегралы:

$$\begin{cases} c = c^* \\ q\tau - \dfrac{kx}{1+c^*} = q\tau^* - \dfrac{kx^*}{1+c^*}. \end{cases}$$

Точка (x^*, τ^*, c^*) выбирается или на луче $x=0$, или при $\tau = -x/q$, т.е. там, где c известно.

<u>Дальнейшая цель</u>: для точки (x,τ), в которой хотим найти решение, нужно понять, какой из лучей ($x=0$ или $\tau = -\frac{x}{q}$) пересекает проекция на плоскость x, τ соответствующей характеристики, и каким из дополнительных условий (начальным или граничным) определяется значение $c(x,\tau)$ в этой точке.

1) Пусть $x^* \geq 0$ $(x^* \in [0, l])$, $\tau^* = -\frac{x^*}{q}$, $c^* = 0$ (начальные условия)

Первые интегралы уравнений характеристик примут вид:

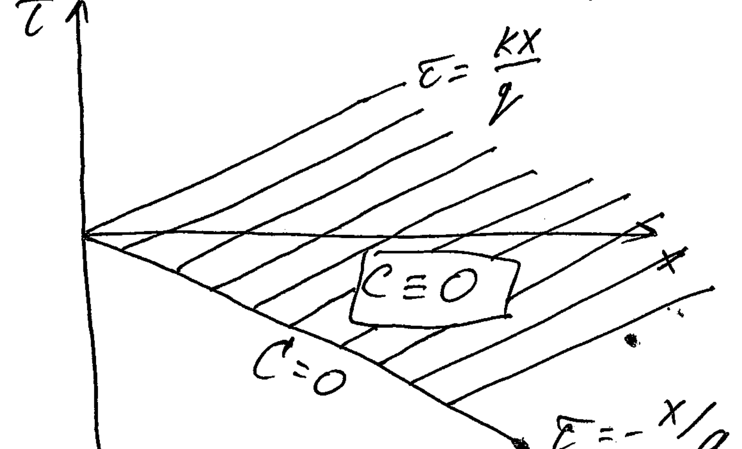
$$\begin{cases} c = 0 \\ q\tau - kx = -x^* - kx^* \end{cases}$$
– уравнение проекций характеристик на плоскость x, τ.

Проекции характеристик – параллельные прямые

$$\tau = \frac{k}{q}x - \frac{1+k}{q}x^*,$$

на которых $c(x,\tau)$ остаётся равным 0 (по ним переносится начальное условие). Соответствующая область:

$$q\tau - kx = -x^*(1+k) \leq 0 \Rightarrow \tau \leq \frac{kx}{q}$$



Итак, при $\tau \leq \frac{kx}{q}$

$$\boxed{c(x,\tau) = 0}.$$

2). Пусть $x^* = 0$, $\tau^* \geq 0$, $c^* = \alpha \cdot \tau^*$ (граничные условия)
Первые интегралы уравнения характеристик примут вид:

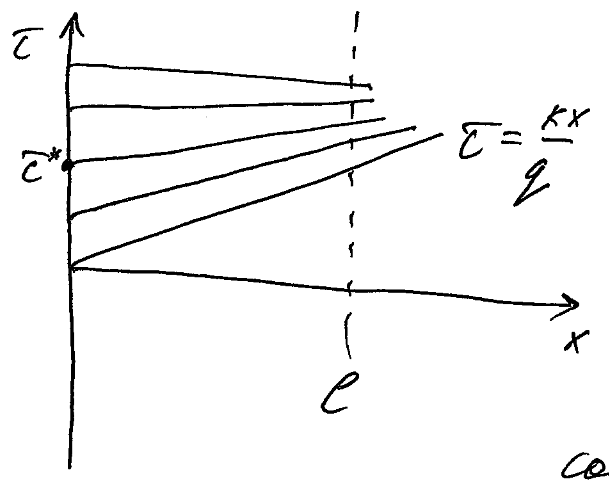
$$\begin{cases} c = \alpha\tau^* \\ q\tau - \dfrac{kx}{1+\alpha\tau^*} = q\tau^* \end{cases}$$

– Уравнение проекций соответствующих характеристик на плоскость (x, τ).

Проекции характеристик на плоскость x, τ:

$$\tau = \frac{k}{q} \cdot \frac{1}{1+\alpha\tau^*} x + \tau^*$$

– чем больше τ^* (координата точки пересечения с осью $x=0$), тем меньше коэффициент углового наклона прямых:



Как будет показано дальше, при условии $l \leq \frac{q}{k\alpha}$ проекции характеристик на плоскость x, τ между собой не пересекаются.

Выразим τ^* через τ и x:

$$q\tau + \alpha q \tau \tau^* - kx = q\tau^* + \alpha q (\tau^*)^2 \iff$$

$$(\tau^*)^2 + \tau^*\left(\frac{1}{\alpha} - \tau\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{kx}{q} - \tau\right) = 0$$

$$\tau^*_{\pm} = \frac{1}{2}\left\{\left(\tau - \frac{1}{\alpha}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} - \tau\right)^2 - \frac{4}{\alpha}\underbrace{\left(\frac{kx}{q} - \tau\right)}_{\leq 0 \text{ при } \tau \geq \frac{kx}{q}}}\right\}$$

В области $\tau \geq \frac{kx}{q}$ $\tau_+^* \geq 0$ и $\tau_-^* \leq 0$, а интересует нас координата τ^* в области $\tau^* \geq 0$. Значит

$$\tau^* = \tau_+^* = \frac{1}{2}\left\{\left(\tau - \frac{1}{\alpha}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-\tau\right)^2 - \frac{4}{\alpha}\left(\frac{kx}{q}-\tau\right)}\right\}$$

$$C(x,\tau) = \alpha\tau^* = \frac{\alpha}{2}\left\{\left(\tau - \frac{1}{\alpha}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}-\tau\right)^2 - \frac{4}{\alpha}\left(\frac{kx}{q}-\tau\right)}\right\}$$ в области

$\tau \geq \frac{kx}{q}$.

Покажем, что проекции характеристик между собой не пересекаются. Так как при $\tau \geq \frac{kx}{q}$ выполнены условия $\tau_+^* \geq 0$ и $\tau_-^* \leq 0$, то физический смысл для них имеет только τ_+^*, то есть при $\tau \geq \frac{kx}{q}$ проекции характеристик точно не пересекаются (через каждую точку (x,τ) идет только одна проекция характеристики, пересекающая ось $x=0$ в точке τ_+^*). Рассмотрим $\tau = \frac{kx}{q}$ (граница двух подобластей, в которых $C(x,\tau)$ определяется начальными или граничными условиями).

$$\tau_\pm^* = \frac{1}{2}\left\{\tau - \frac{1}{\alpha} \pm \left|\frac{1}{\alpha}-\tau\right|\right\} = \begin{cases} \tau - \frac{1}{\alpha} = \frac{kx}{q} - \frac{1}{\alpha} \\ 0 \end{cases}$$

Если $\frac{kx}{q} - \frac{1}{\alpha} \leq 0$, то через точку на прямой $\tau = \frac{kx}{q}$ идет ровно одна проекция характеристики (сама эта прямая)

Если $\frac{kx}{q} - \frac{1}{\alpha} > 0$, то через точку на прямой $\tau = \frac{kx}{q}$ проходят две ~~[illegible]~~ проекции характеристики: одна из них — это сама прямая $\tau = \frac{kx}{q}$, а вторая пересекает ось $x=0$ в некоторой точке $\tau^* > 0$. Но при условии $l \le \frac{q}{k\alpha}$ получаем: $\frac{kx}{q} \le \frac{kl}{q} \le \frac{k}{q} \cdot \frac{q}{k\alpha} = \frac{1}{\alpha}$, то есть $\frac{kx}{q} - \frac{1}{\alpha} \le 0$!

Следовательно, в рассматриваемом случае при $x \in [0, l]$, $l \le \frac{q}{k\alpha}$, проекции характеристик в расчетной области нигде не пересекаются.

Решение в переменных (x, τ):

$$C(x,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \le \frac{kx}{q} \\ \frac{\alpha}{2}\left\{\tau - \frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\tau - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \frac{4}{\alpha}\left(\frac{kx}{q} - \tau\right)}\right\}, & \tau \ge \frac{kx}{q} \end{cases}$$

Решение в переменных (x, t):

$$C(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le \frac{x}{q}(k+1) \\ \frac{1}{2}\left\{\alpha\left(t - \frac{x}{q}\right) - 1 + \sqrt{\left(1 + \alpha\left(t - \frac{x}{q}\right)\right)^2 - \frac{4kx\alpha}{q}}\right\}, & t \ge \frac{x}{q}(k+1) \end{cases}$$

В данном случае $C(x,t)$ — непрерывная функция.

Домашнее задание

Вопросы для самоконтроля:

1) Сформулируйте линейное и квазилинейное уравнение переноса.
2) Что такое характеристики уравнения переноса в линейном и квазилинейном случае?
3) В чем заключается метод характеристик решения начально-краевых задач для уравнений переноса?

Задачи:

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^{-(x+t)}, & x \in [-1, 0); \ t \in (0, 1] \\ u\big|_{x=0} = t; \quad u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2t\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3t \cdot u^2, & x \in (0, \frac{\pi}{2}]; \ t \in (0, \frac{1}{2}) \\ u\big|_{t=0} = 2\sin 2x; \quad u\big|_{x=0} = -\dfrac{2\sin 2t^2}{1+3t^2 \cdot \sin 2t^2} \end{cases}$$

3) В первой задаче практикума (квазилинейное уравнение переноса) составить уравнения характеристик и построить их проекции на плоскость x, t. Результат представить графически, выбрав какое-то количество точек пересечения проекций характеристик с осью $t=0$ ($x_0, x_1, \ldots, x_N$ - выбираются произвольно в пределах расчетной области) и точек пересечения с осью $x=0$ ($t_0, t_1, \ldots, t_M$ - в пределах расчетной области). Определить, в какой подобласти расчетной области решение будет определяться граничными условиями, а в какой - начальными.