Гл. 3. Цилиндрические функции

1. Канонический вид уравнения цилиндрических функций (уравнение Бесселя)

При решении методом разделения переменных задачи на собственные значения в круге для радиальной функции $R(r)$ было получено уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{R}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0. \qquad (1)$$

С помощью замены $x=\sqrt{\lambda}r$ приведем уравнение (1) к виду

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\mu}{x^2}\right)y=0 \qquad (2)$$

или

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\mu\right)y=0. \qquad (3)$$

Положим $\mu = \nu^2$, где $\nu = \bar{\nu} + i\bar{\bar{\nu}}$, $\bar{\bar{\nu}} \geq 0$ - произвольное действительное число. Тогда из уравнений (2), (3) получим:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad (4)$$

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0. \qquad (5)$$

Определение. Уравнение (4) (или (5)) называется уравнением цилиндрических функций или уравнением Бесселя порядка ν. Любое нетривиальное решение уравнения (4) (или (5)) называется цилиндрической функцией

2. Вспомогательные положения (гамма-функция)

Определение. Гамма-функцией Γ(z) называется интеграл

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \qquad (6)$$

где z-вообще говоря комплексный аргумент: $z=\overline{z}+i\overline{\overline{z}}, \overline{z}>0.$

Основные свойства гамма-функции

1)

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\ \Rightarrow\ \Gamma(n+1)=n! \qquad (7)$$

2)

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \qquad (8)$$

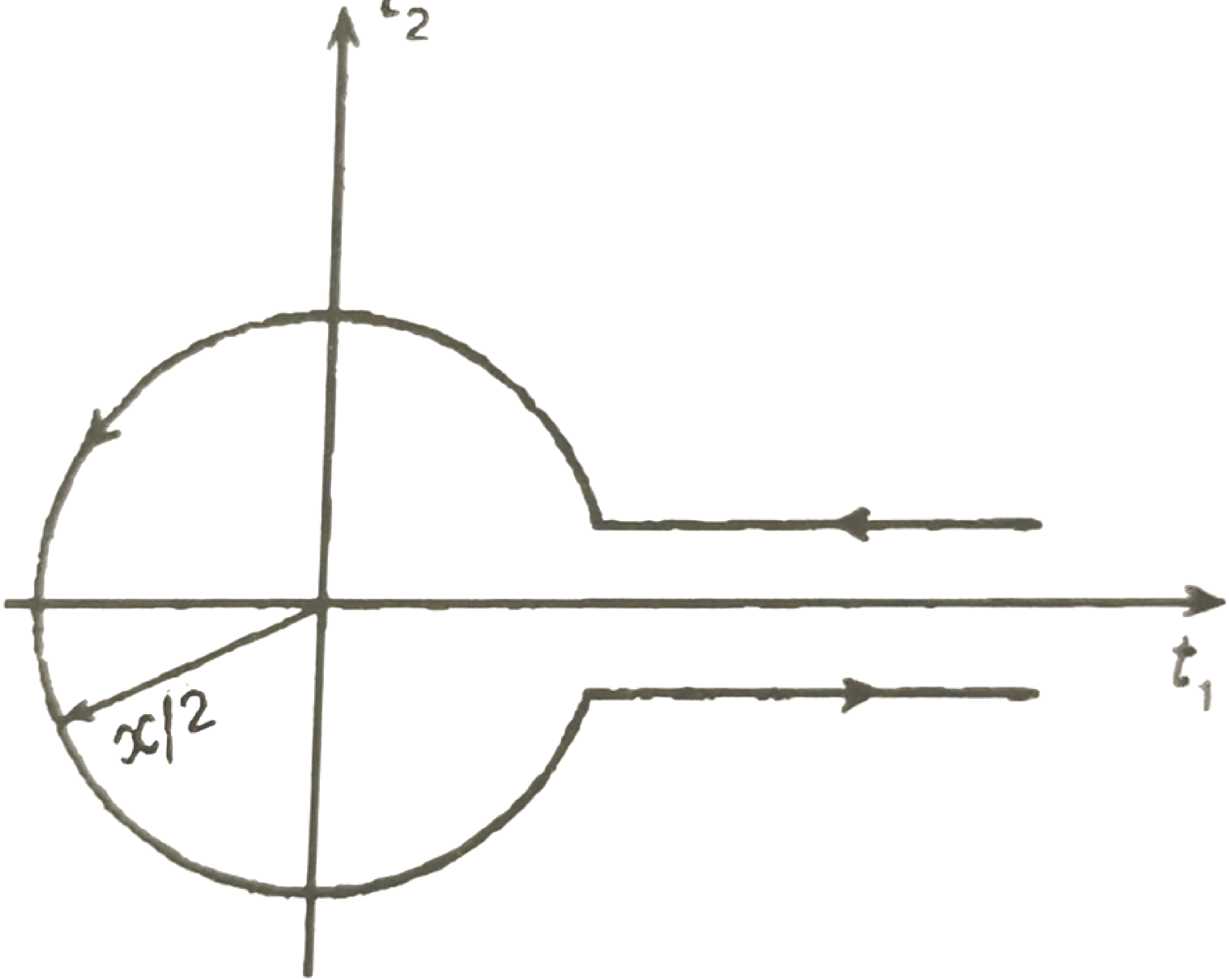
3) Представление виде контурного интеграла Римана-Ханкеля

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int_{\gamma} e^{-t} t^{z-1} dt. \qquad (9)$$

Здесь γ - любой контур на комплексной плоскости t, который обходит точку $t = 0$ против часовой стрелки и концы которого уходят на бесконечность вдоль положительной вещественной полуоси (см. рисунок)..

Формула (9) определяет справа от мнимой оси аналитическую функцию. В силу принципа аналитического продолжения эта формула справедлива на всей комплексной плоскости z и $\Gamma(z)$ представляется в виде частного двух целых функций (аналитических на всей комплексной плоскости $z \neq \infty$), то есть является мероморфной функцией.

При $z = -n,\ \ n \geq 0$ - целое число гамма-функция имеет полюсы.


t_2
t_1
$x/2$

4) Из формул (8) и (9) следует формула

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-t}t^{-z-1}dt. \qquad (10)$$

$$z\to z+1,\ (8),\ (9)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}=\frac{\sin\pi(z+1)}{\pi}\Gamma(-z)=-\frac{\sin\pi z}{\pi}\Gamma(-z)=$$

$$=\frac{e^{-i\pi z}-e^{i\pi z}}{2\pi i\left(e^{-i2\pi z}-1\right)}\int_{\gamma} e^{-t}t^{-z-1}dt=\frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-t}t^{-z-1}dt$$

3.Степенной ряд для функции Бесселя

Пусть $\nu \geq 0$ - вещественное число. Уравнение Бесселя имеет особую точку x=0. Будем искать его решение в виде обобщенного степенного ряда (метод Фробениуса):

$$y(x) = x^{\sigma}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots\right) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+\sigma}, \qquad (11)$$

$$\sigma = const,\; a_0 \neq 0.$$

Подставим (11) в (5) и приравняем к нулю полученные коэффициенты при всех степенях x:

$$a_0\left(\sigma^2 - \nu^2\right) = 0,$$

$$a_1\left((\sigma+1)^2 - \nu^2\right) = 0, \qquad \Rightarrow \quad a_m\left((\sigma+m)^2 - \nu^2\right) + a_{m-2} = 0, \quad (12)$$

$$a_2\left((\sigma+2)^2 - \nu^2\right) + a_0 = 0, \qquad (m=2,3,\ldots)$$

....

Так как $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения (12) получаем

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \sigma = \pm\nu.$$

Будем предполагать, что

$$\sigma + m - \nu \neq 0, \quad \sigma + m + \nu \neq 0, \quad (m = 2, 3, ...) \quad \Rightarrow$$

$$a) \pm\nu + m - \nu \neq 0 \Rightarrow \nu \neq \frac{m}{2} \left(\sigma = -\nu\right),$$

$$b) \pm\nu + m + \nu \neq 0 \Rightarrow \nu \neq -\frac{m}{2} \left(\sigma = \nu\right).$$

Так как $\nu \geq 0$ и m=2,3,…, то b) выполняется всегда, а a) выполняется при

$$\sigma = -\nu, \quad \nu \neq \frac{m}{2} \left(m = 2, 3...\right) \qquad (13)$$

Итак, при выполнении (13) получим, что

$$(\sigma+m)^2-\nu^2\neq 0,\quad m=2,3,\ldots \tag{14}$$

Из второго уравнения (12) следует, что

$$a_1=0, \tag{15}$$

из (12) следует формула

$$a_m=-\frac{a_{m-2}}{(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)},\quad m=2,3,\ldots \tag{16}$$

Из (15), (16) получаем, что $m=2k$ ($k=1,2,\ldots$), поскольку все нечетные коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим случай $\sigma=\nu$.

$$(16),\quad m=2k \quad\Rightarrow\quad a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{2^2k(k+\nu)}\quad (k=1,2,\ldots) \tag{17}$$

Рекуррентно применяя формулу (16), получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(\nu + k)...(\nu + 2)(\nu + 1)}. \qquad (18)$$

Функция $y(x)$ как решение однородного уравнения определяется с точностью до произвольного постоянного множителя a_0. Положим

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu + 1)}. \qquad (19)$$

Подставим (19) в (18) и воспользуемся (7):

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} k!(\nu + k)...(\nu + 2)(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1)} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + 1)\Gamma(k + \nu + 1)} \frac{1}{2^{2k+\nu}}. \qquad (20)$$

Из (20) и (11) при $m=2k$ следует

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \qquad (21)$$

Определение. Функция $J_\nu(x)$, определяемая рядом (20), называется функцией Бесселя порядка ν.

По признаку Даламбера ряд (21) сходится при любом x.

Функцию $J_\nu(x)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость z с разрезом $(-\infty,0)$ по отрицательной части вещественной оси. При нецелом ν точка $Z=0$ является точкой ветвления функции Z^ν. Полученная функция $J_\nu(x)$ будет аналитической в области $-\pi<\arg Z<\pi$. При целом $\nu=n$ эта функция является аналитической на всей комплексной плоскости Z, то есть целой функцией.

Рассмотрим случай $\sigma = -\nu$.

Поскольку теперь должно выполняться неравенство $\nu \neq \frac{m}{2}$, то при $m = 2k \;\Rightarrow\; \nu \neq k,$ где κ – целое число.

Полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}, \tag{22}$$

получим

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu}k!\Gamma(-\nu+1)(-\nu+1)...(-\nu+k)} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\frac{1}{2^{2k-\nu}}. \tag{23}$$

Из (22) и (11) при $m=2k$ получаем

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \qquad (24)$$

Определение. Функция $J_{-\nu}(x)$, определяемая рядом (21), называется функцией Бесселя порядка $-\nu$.

Функция $J_{-\nu}(x)$ представляет собой решение уравнения Бесселя, которое при нецелом ν является линейно независимым от $J_{\nu}(x)$. При этом $J_{\nu}(x)$ имеет при $x=0$ нуль ν - го порядка, а $J_{-\nu}(x)$ - полюс ν - го порядка.

Рассмотрим теперь случай $\nu = n$ - целое число. Так как при $k \le n-1$ имеем $\Gamma(k-n+1) = \pm\infty$, то формула (24) теряет смысл. Продолжим (24) по непрерывности при $\nu \to n$.

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu\to n} J_{-\nu}(x) = \lim_{\nu\to n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \{k = k' + n\} = \tag{25}$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{26}$$

Функции $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ линейно зависимые.

Выводы. При $\nu \neq n$ функции $J_{\nu}(x)$, $J_{-\nu}(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя порядка ν.

При $\nu = n$ функции $J_{n}(x)$, $J_{-n}(x)$ линейно зависимые и не образуют фундаментальной системы решений уравнений Бесселя целого порядка n.

Замечание. Рассмотрим формулу (12) при $\nu = r + \frac{1}{2}$, где r= 1,2,… Пусть $\sigma = -\nu = -r - \frac{1}{2}$ тогда $(\sigma+1) = -r + \frac{1}{2}$, откуда

$$a_1\left((\sigma+1)^2 - \nu^2\right) = a_1(\sigma+1+\nu)(\sigma+1-\nu) =$$

$$= a_1\left(-r + \frac{1}{2} + r + \frac{1}{2}\right)\left(-r + \frac{1}{2} - r - \frac{1}{2}\right) = a_1(-2r) = 0,$$

$$a_m(\sigma+m+\nu)(\sigma+m-\nu)+a_{m-2}=$$

$$=a_m\left(-r-\frac{1}{2}+m+r+\frac{1}{2}\right)\left(-r-\frac{1}{2}+m+r+\frac{1}{2}\right)+a_{m-2}=$$

$$=a_m m(m-1-2r)+a_{m-2}=0 \quad (m=2,3,\ldots)$$

Как и в случае $\nu \neq r+\dfrac{1}{2}$ получаем, что все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_{2r-1}\,(r=1,2\ldots)$ равны нулю а при $m=2r+1$ получим $0\cdot a_{2r+1}+a_{2r-1}=0,$ и коэффициент a_{2r+1} оказывается произвольным. Здесь r=0, 1, …, так как при r=0 произвольным сразу оказывается коэффициент a_1.

При $m=2k+1$ и $k>r$ коэффициент a_{2k+1} определяется равенством

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^{k-r}a_{2r+1}}{(2r+3)(2r+5)\ldots(2k+1)\cdot 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2r)}.$$

В самом деле:

при $k=r+1$ получаем

$$a_{2r+3}=a_{2(r+1)+1}=-\frac{a_{2r+1}}{(2r+3)(2k-2r)}=-\frac{a_{2r+1}}{(2r+3)\cdot 2};$$

при $k=r+2$ получаем

$$a_{2r+5}=a_{2(r+2)+1}=-\frac{a_{2r+3}}{(2r+5)(2k-2r)}=-\frac{a_{2r+1}}{(2r+3)(2r+5)2\cdot 4}.$$

Далее можно применить индукцию.

Подставляя полученные коэффициенты в ряд (11) (для коэффициентов сохраняется формула (24)), решение уравнения Бесселя при $\nu = r + \frac{1}{2}$ можно представить в виде (см. Plana, Mem. Della R. Accad. Delle Sci. di Torino, XXVI (1821), с. 519-538):

$$y(x) = a_0 2^{-r-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - r\right) J_{-r-\frac{1}{2}}(x) + a_{2r+1} 2^{r+\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2} r\right) J_{r+\frac{1}{2}}(x),$$

где a_0, a_{2r+1} – произвольные постоянные.

Таким образом, для случая $\nu = r + \frac{1}{2}$ не требуется никаких изменений в определении функций $J_{r+\frac{1}{2}}(x), J_{-r-\frac{1}{2}}(x)$.

Единственная особенность данного случая заключатся в том, что при построении решения с помощью ряда (11) мы сразу получаем общее решение уравнения Бесселя порядка $\nu = r + \frac{1}{2}$, включающее две произвольные постоянные. (См. Г. Ватсон. Теория бесселевых функций. Т. 1. М.: «Иностранная литература», 1949).

4. Рекуррентные формулы

Для цилиндрических функций справедливы рекуррентные формулы.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{28}$$

Докажем, например, формулу (27).

$$x^\nu\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=x^\nu\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\frac{1}{2^\nu}=$$

$$=\frac{x^\nu}{2^\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\frac{1}{2}2k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)} =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)} =\{l=k-1\}= \qquad (29)$$

$$=-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+(\nu+1)} =-J_{\nu+1}(x),$$

откуда следует формула (27).

Важный частный случай при $\nu=0$:

$$J_0'(x)=-J_1(x) \qquad (30)$$

Проведем дифференцирование в формулах (27) и (28):

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x), \qquad (31)$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \qquad (32)$$

Складывая две последние формулы, получим рекуррентную формулу

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \qquad (33)$$

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x). \qquad (34)$$

5. Цилиндрические функции полуцелого аргумента

Получим выражения для функций $J_{\frac{1}{2}}(x)$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. $(21), \nu = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}, \qquad (35)$$

$(24),\ \nu = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}, \qquad (36)$$

$$(8)\Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(-\frac{1}{2}+k\right)...\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\{(7)\ \ \Rightarrow\}=\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2k+1)}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} \qquad (37)$$

Аналогично из формул (7) и (8) следует

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2k-1)}{2^{k}}\sqrt{\pi}. \qquad (38)$$

Число нечетных сомножителей 123…(2*к*-1) (2*к*+1) равно *к*+1: среди 2*к*+1 всех сомножителей 123…2*к* (2*к*+1) четных сомножителей *к*, а нечетных на единицу больше, то есть *к*+1.

Подставляя (37) в (35), получим

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{\kappa+1}x^{2k+\frac{1}{2}}}{k!1\cdot3\cdot5...(2k+1)\sqrt{\pi}\,2^{2k+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\qquad(39)$$

(так как $2^k k!=2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot2k$, то получим, что

$1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2k+1)\cdot2^k\cdot k!=(2k+1)!$).

Итак,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\qquad(40)$$

Аналогично получаем

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \qquad (41)$$

Функции $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ образуют пару линейно-независимых решений уравнения Бесселя порядка $\nu=\frac{1}{2}$. При этом $J_{\frac{1}{2}}(x)$ имеет в точке x=0 нуль порядка $\frac{1}{2}$, $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ - полюс порядка $\frac{1}{2}$.

Таким образом, функции $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ образуют ФСР – фундаментальную систему решений уравнения Бесселя порядка $\nu=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим функцию $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, где n- целое число. При $\nu=\frac{1}{2}$ из формулы (34) следует:

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right). \qquad (42)$$

При $\nu=\frac{3}{2}$ из формулы (34) следует:

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=-J_{\frac{1}{2}}(x)+\frac{3}{x}J_{\frac{3}{2}}(x)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x+\frac{3}{x}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin(x-\pi)\cdot\left(1-\frac{3}{x^2}\right)+\cos\left(x-\pi\right)\cdot\frac{3}{x}\right). \qquad (43)$$

Применяя последовательно формулу (43), получим

$$J_{n+\frac{1}{2}}\left(x\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin(x-\frac{\pi n}{2})\cdot P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi n}{2}\right)\cdot Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right), \qquad (44)$$

где $P_n\left(t\right)$ и $Q_n\left(t\right)$ - некоторые многочлены относительно $t=\frac{1}{x}$,

причем $P_n\left(0\right)=1,\ Q_n\left(0\right)=0.$

Замечание. Более подробно функцию $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ можно записать следующим образом (см. Г.Бейтман и А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции М.: Наука. 1966. Т. 2, стр.).

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\sin\left(x-\frac{\pi x}{2}\right)\sum_{m=0}^{\leq\frac{n}{2}}(-1)^m\left(n+\frac{1}{2},2m\right)\left(\frac{1}{2x}\right)^{2m}+$$

$$+\cos\left(x-\frac{\pi x}{2}\right)\sum_{m=0}^{\leq\frac{n=1}{2}}(-1)^m\left(n+\frac{1}{2},2m+1\right)\left(\frac{1}{2x}\right)^{2m+1}),$$

где использован символ Ханкеля (см. Бейтман, Эрдейи, стр. 18)

$$(\nu,m)=\frac{2^{-2m}}{m!}((4\nu^2-1)(4\nu^2-3)...(4\nu^2-(2m-1)^2)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu+m\right)}{m!\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu-m\right)}.$$

Цилиндрические функции полуцелого порядка – единственные из цилиндрических функций, которые выражаются через элементарные функции.

6. Интегральное представление функции Бесселя

Воспользуемся формулой (11)

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = \frac{e^{i\pi z}}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-t} t^{-z-1} dt, \qquad (11)$$

в которой положим $z = k + \nu$:

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i}\int_{\gamma} e^{-t} t^{-k-\nu-1} dt \qquad (45)$$

подставив (45) в (21), получим:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{e^{i\pi(k+\nu)}}{2\pi i} \int_\gamma e^{-t} t^{-k-\nu-1} dt \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \left\{ e^{i\pi k} = \cos \pi k + i \sin \pi k = (-1)^k \right\} =$$

$$= \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma e^{-t} \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!} \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_\gamma e^{-t} \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{4t}\right)^k}{k!} \frac{dt}{t} = \frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{x}{2t}\right)^\nu e^{\frac{x^2}{4t}-t} \frac{dt}{t} \qquad (46)$$

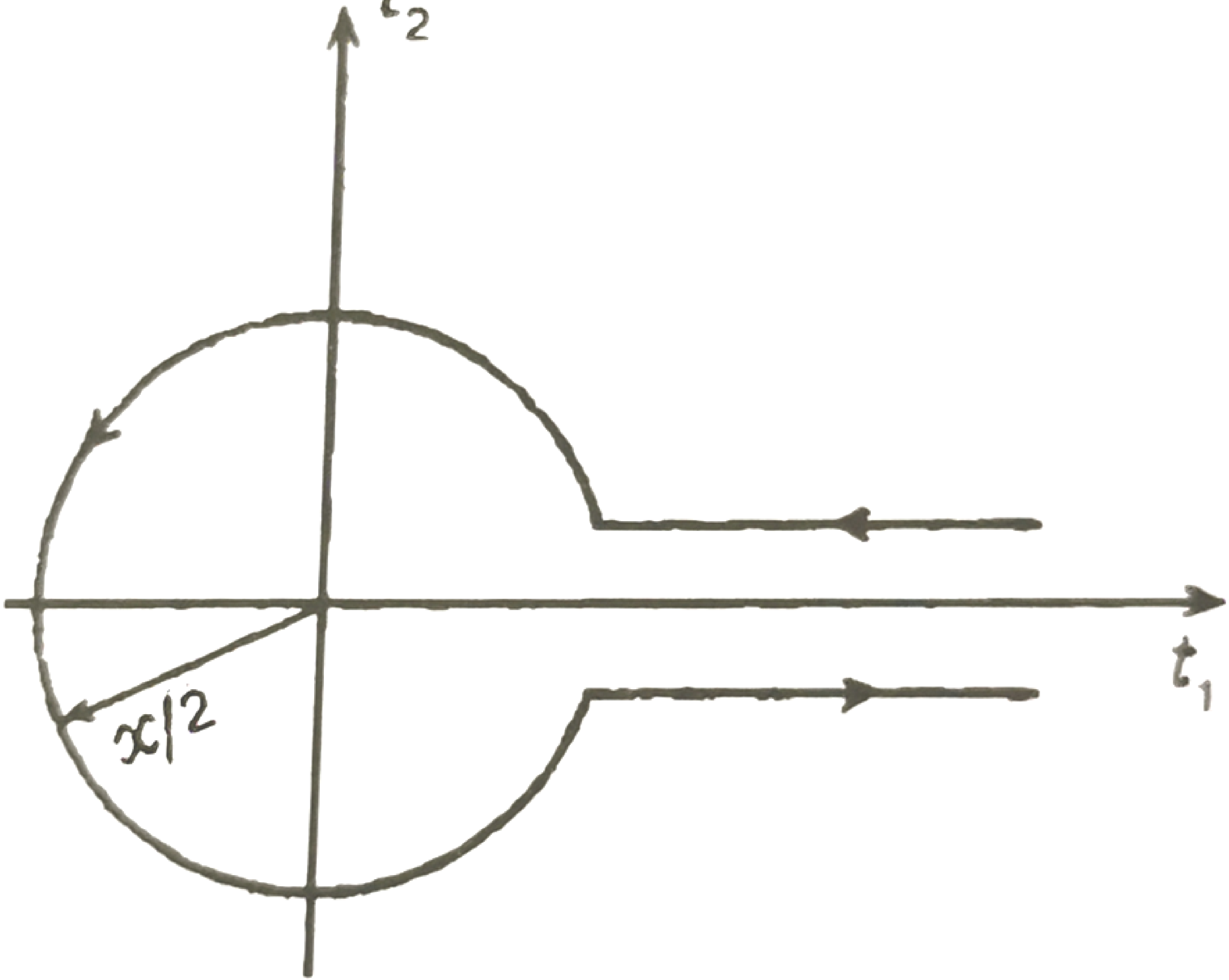
Выберем контур γ со следующим обходом точки t=0: от $+\infty$ до t=0 по верхнему берегу положительной вещественной полуоси t_1, с обходом точки t=0 в положительном направлении и с уходом на $+\infty$ по нижнему берегу положительной вещественной полуоси t_1 (см. рисунок на следующем слайде).

Сделаем замену переменной:

$$t = \frac{x}{2} e^{-i(\varsigma - \pi)}.$$

В результате этой замены контур γ на плоскости t в контур C_0^- на плоскости ς

ς	$\pi + i\infty$	π	$\pi / 2$	0	$-\pi / 2$	$-\pi$
t	∞	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\frac{x}{2} e^{i\pi}$	$\frac{x}{2} e^{i\frac{3\pi}{2}}$	$\frac{x}{2} e^{i2\pi}$


t_2
t_1
$x/2$

Поскольку

$$\frac{dt}{t}=\frac{d\varsigma}{i},\frac{x}{2t}=e^{i(\varsigma-\pi)},\frac{x^2}{4t}-t=t\left(e^{i2(\varsigma-\pi)}-1\right)=\frac{x}{2}\left(e^{i(\varsigma-\pi)}-e^{-i(\varsigma-\pi)}\right)=$$

$$=ix\sin(\varsigma-\pi)=-ix\sin\varsigma,$$

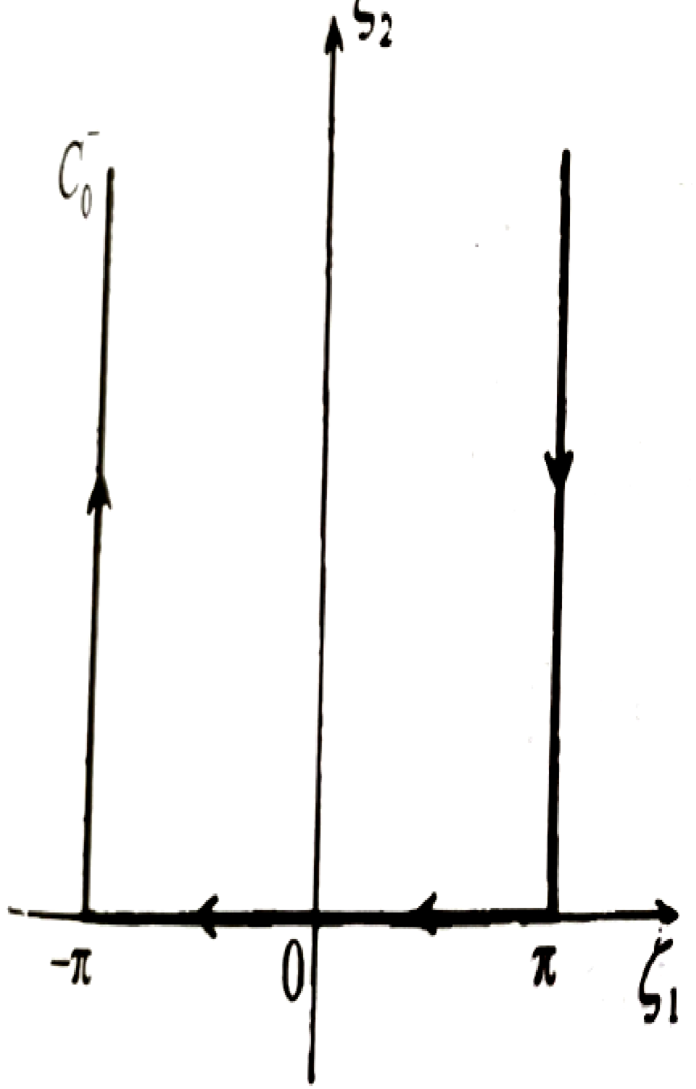
то отсюда получаем

$$J_\nu(x)=-i\frac{e^{i\pi\nu}}{2\pi i}\int_{C_0^-}e^{-i\pi\nu}e^{i\nu\varsigma}e^{-ix\sin\varsigma}d\varsigma=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma, \qquad (47)$$

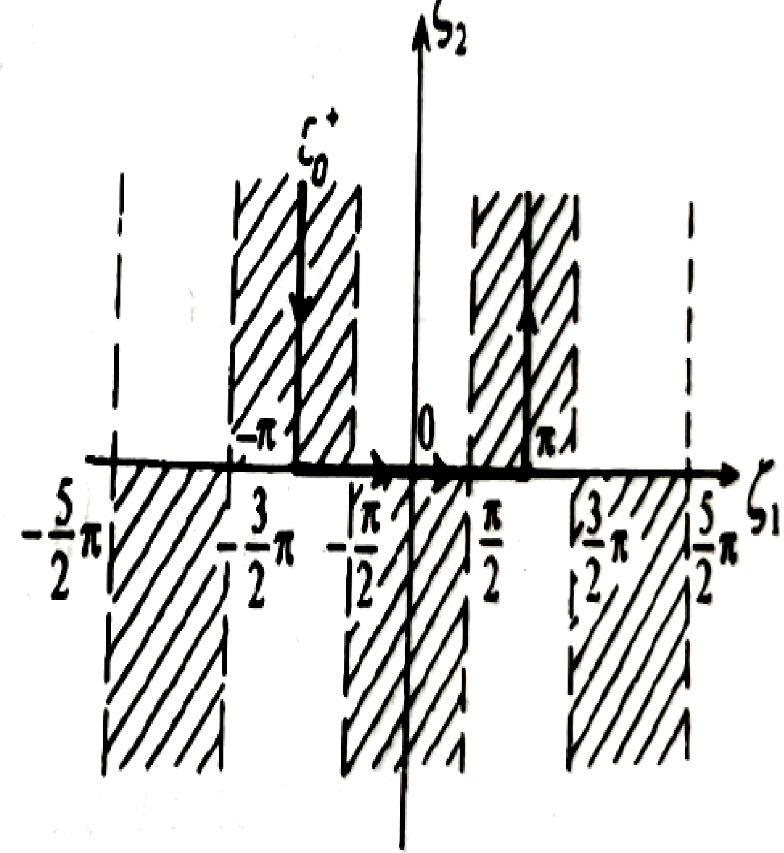
где контур C_0 отличается от контура C_0^- направлением обхода (см.рисунок).

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{C_0}e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma \qquad (48)$$

Итак, мы получили интегральное представление Зоммерфельда для функции Бесселя



ζ_2
C_0^-
$-\pi$
0
π
ζ_1



ζ_2
C_0^+
$-\pi$
0
π
$-\frac{5}{2}\pi$
$-\frac{3}{2}\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3}{2}\pi$
$\frac{5}{2}\pi$
ζ_1

Сделаем в формуле (48) замены:

$$\varsigma = \pm\pi + i\varsigma_2 \;\Rightarrow\; \xi = \varsigma_2; \;\; \varsigma = \varsigma_1 \;\Rightarrow\; \alpha = \varsigma_1.$$

Тогда получаем

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha}\,d\alpha - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x\,\mathrm{sh}\,\xi - \nu\xi}\,d\xi \tag{49}$$

В частности, при $\nu = n$

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\alpha + in\alpha}\,d\alpha \tag{50}$$

Из (50) при n=0 и x=0 получаем

$$J_0(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha = 1. \tag{51}$$

7. Функции Ханкеля. Интегральное представление

Полученное в предыдущем разделе интегральное представление функции Бесселя (48) подсказывает, что можно искать решения уравнения цилиндрических функций в виде

$$y(x) = \int_C e^{-ix\sin\varsigma}\Phi(\varsigma)d\varsigma, \qquad (52)$$

где C – бесконечный контур на комплексной плоскости ς, а функция $\Phi(\varsigma)$ выбирается так, чтобы удовлетворялось уравнение Бесселя.

Контур C может уходить а бесконечность в тех областях, где обеспечена ходимость интеграла (52). При вещественном x>0 интеграл сходится, если выполняется условие

$$\operatorname{Im}\sin\varsigma = \operatorname{Im}\sin(\varsigma_1 + i\varsigma_2) = \operatorname{Im}(\sin\varsigma_1 \operatorname{ch}\varsigma_2 + i\cos\varsigma_1 \operatorname{sh}\varsigma_2) = \cos\varsigma_1 \operatorname{sh}\varsigma_2 < 0,$$

что приводит к системе неравенств:

При $\operatorname{sh}\varsigma_2 > 0$ это условие выполняется при $\cos\varsigma_1 < 0$, что приводит к системе неравенств

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \varsigma_1 < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

При $\operatorname{sh}\varsigma_2 < 0$ это условие выполняется при $\cos\varsigma_1 > 0$, что приводит к системе неравенств

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \varsigma_1 < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом получатся система областей, в которых контур C может уходить на бесконечность (см. рисунок).

Отметим, что контур C_0, по которому ведется интегрирование в формуле (48), лежит в таких областях.

Определим теперь, при каких функциях Ф (x) интеграл (52) удовлетворяет уравнению Бесселя .

Введем оператор Бесселя

$$L_\nu\left[y\right] \equiv x^2 y''\left(x\right) + xy'\left(x\right) + \left(x^2 - \nu^2\right) y\left(x\right)$$

и ядро интегрального представления функции $y(x)$

$$K\left(x,\varsigma\right) = e^{-ix\sin\varsigma}.$$

Так как

$$K_x\left(x,\varsigma\right) = -i\sin\zeta \cdot K\left(x,\varsigma\right);\ K_{xx}\left(x,\varsigma\right) = -\sin^2\zeta \cdot K\left(x,\varsigma\right),$$

то

$$L\left[K\left(x,\varsigma\right)\right] = \left(-x^2\sin^2\varsigma - ix\sin\varsigma + x^2 - \nu^2\right)K\left(x,\varsigma\right).$$

С другой стороны

$$K_{\varsigma}\left(x,\varsigma\right)=-ix\cos\varsigma\cdot K\left(x,\varsigma\right);K_{\varsigma\varsigma}\left(x,\varsigma\right)=\left(x^2\cos^2\varsigma-ix\sin\varsigma\right)K\left(x,\varsigma\right).$$

Отсюда получаем, что

$$L_{\nu}\left[K\left(x,\varsigma\right)\right]=-K_{\varsigma\varsigma}\left(x,\varsigma\right)-\nu^2K\left(x,\varsigma\right).$$

Проинтегрируем по частям интеграл $L_{\nu}\left[y\left(x\right)\right]$, учитывая, что на бесконечности подстановки обращаются в нуль:

$$L_{\nu}\left[y\right]=\int_C L_{\nu}\left[K\left(x,\varsigma\right)\right]\Phi\left(\zeta\right)d\varsigma=-\int_C(K_{\varsigma\varsigma}\left(x,\varsigma\right)+\nu^2K\left(x,\varsigma\right))\Phi\left(\varsigma\right)d\varsigma=$$

$$=-\int_C\left(\Phi''\left(\varsigma\right)+\nu^2\Phi\left(\varsigma\right)\right)K\left(x,\varsigma\right)d\varsigma.$$

Уравнение $L_{\nu}\left[y\right]=0$ будет выполняться будет выполняться при

$\Phi\left(\varsigma\right)=e^{\pm i\nu\varsigma}.$

Выбирая различным образом контур интегрирования, можно получить различные цилиндрические функции.

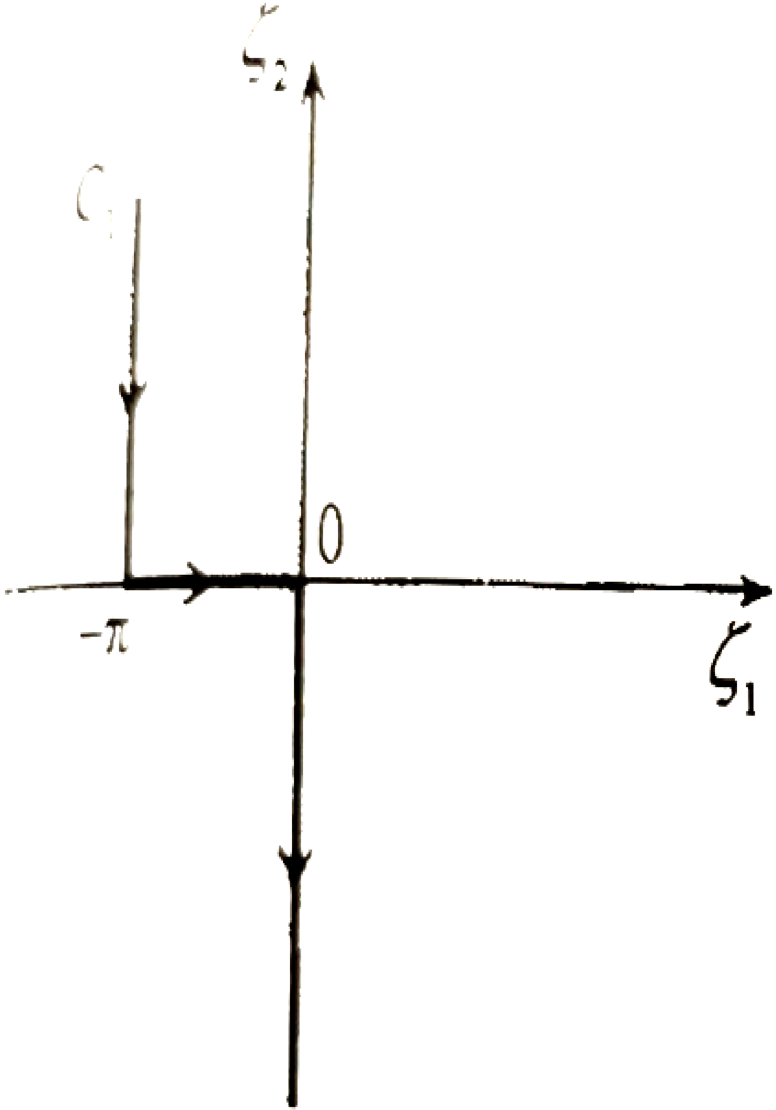
Наиболее существенными являются функции Ханкеля 1-го и 2-го рода, которые определяются следующими интегралами

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\varsigma + i\nu\varsigma}\, d\varsigma, \qquad (53)$$

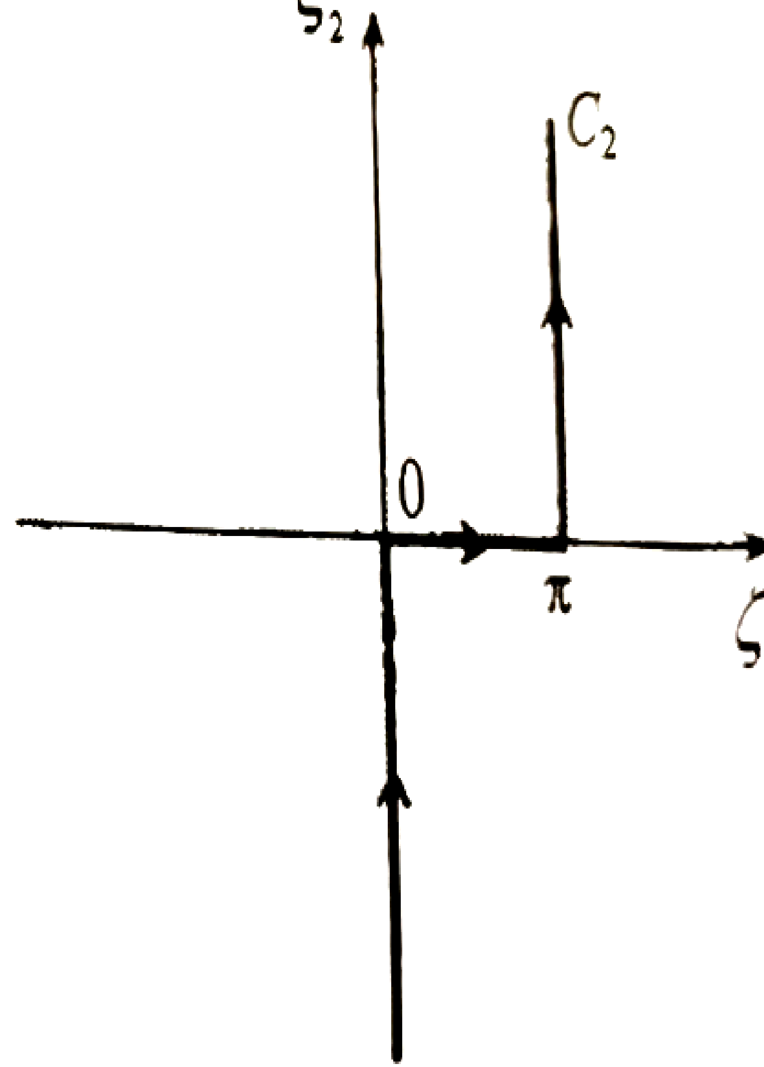
$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_2} e^{-ix\sin\varsigma + i\nu\varsigma}\, d\varsigma, \qquad (54)$$

где контуры C_1 и C_2 выбираются так, как показано на рисунке.

Функции $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ являются аналитическими функциями на всей плоскости Z с разрезом по отрицательно части действительной оси: $|\arg Z| < \pi$.



а



б

Свойства функций Ханкеля первого и второго рода

1) Связь между функциями $\mathbf{H}_{\nu}^{(1)}, \mathbf{H}_{\nu}^{(2)}$ и функциями $\mathbf{H}_{-\nu}^{(1)}, \mathbf{H}_{-\nu}^{(2)}$.

По определению

$$H_{-\nu}^{(1)}\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1} e^{-ix\sin\varsigma-i\nu\varsigma}\Phi\left(\varsigma\right)d\varsigma.$$

Сделаем замену переменных: $\varsigma=-\pi-\alpha,$ в результате которой контур C_1 перейдет в контур C_1 с изменением направления обхода на противоположный, т.е. в контур C_1^- :

$$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2=-\varsigma-\pi=-\left(\varsigma_1+\pi\right)-i\varsigma_2\Rightarrow\alpha_1=-\left(\varsigma_1+\pi\right);\alpha_2=-\varsigma_2;$$

$$\sin\varsigma=\sin\left(-\pi-\alpha\right)=-\sin\left(\pi+\alpha\right)=\sin\alpha;\ d\varsigma=-d\alpha.$$

После подстановки получим

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1^-} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha + i\nu\pi}\,d\alpha = -\frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\int_{C_1^-} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha}\,d\alpha$$

Поменяем знак перед интегралом и одновременно изменим направление обхода контура C_1^-, то есть перейдем к контуру C_1 :

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = \frac{e^{i\nu\pi}}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\alpha + i\nu\alpha}\,d\alpha = e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(x).$$

Итак,

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(x). \qquad (55)$$

Аналогично с помощью замены $\varsigma = \pi - \alpha$ получаем формулу

$$H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(x). \qquad (56)$$

2) Рекуррентные соотношения для функций Ханкеля

Для функций Ханкеля первого и второго рода справедливы рекуррентные соотношения:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H_{\nu}^{(1,2)}(x)}{x^{\nu}}\right)=-\frac{H_{\nu+1}^{(1,2)}(x)}{x^{\nu}}, \qquad (57)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}H_{\nu}^{(1,2)}(x)\right)=x^{\nu}H_{\nu-1}^{(1,2)}(x). \qquad (58)$$

Замечания. 1)Двойной верхний индекс означает, что данные формулы справедливы как для функций Ханкеля первого рода и для функций Ханкеля второго рода.

2) Формулы (57) и (58) полностью аналогичны доказанным ранее рекуррентным формулам (27) и (28) для функций Бесселя. Поскольку функции Ханкеля введены в интегральном виде, а не в виде обобщенного степенного ряда , как функции Бесселя, проведем доказательство формул (57) и (58).

Докажем формулу (57) для функции Ханкеля первого рода. Проведем дифференцирование:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H_\nu^{(1)}(x)}{x^\nu}\right)=\frac{H_\nu^{(1)\prime}(x)}{x^\nu}-\nu\frac{H_\nu^{(1)}(x)}{x^{\nu+1}}=\frac{1}{x^\nu}\left(H_\nu^{(1)\prime}(x)-\frac{\nu}{x}H_\nu^{(1)}(x)\right),$$

$$H_\nu^{(1)\prime}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}(-i\sin\varsigma)e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma. \qquad (59)$$

Проинтегрируем формулу (53) по частям, учитывая обращение в нуль подстановок на бесконечности:

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{-ix\sin\varsigma}e^{i\nu\varsigma}d\varsigma=\frac{1}{\pi}\frac{1}{i\nu}\int_{C_1}e^{-ix\sin\varsigma}de^{i\nu\varsigma}=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{i\nu}\int_{C_1}e^{i\nu\varsigma}de^{-ix\sin\varsigma}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{i\nu}\int_{C_1}e^{i\nu\varsigma}(-ix)\cos\varsigma e^{-ix\sin\varsigma}d\varsigma=\frac{1}{\pi}\frac{x}{\nu}\int_{C_1}\cos\varsigma\cdot e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma. \qquad (60)$$

Используя формулы (59) и (60), получим:

$$H_\nu^{(1)\prime}(x)-\frac{\nu}{x}H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{C_1}(-i\sin\varsigma)e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma-\frac{\nu}{x}\frac{1}{\pi}\frac{x}{\nu}\int_{C_1}\cos\varsigma\cdot e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{C_1}(\cos\varsigma+i\sin\varsigma)e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma=-\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{i\varsigma}e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{C_1}e^{-ix\sin\varsigma+i(\nu+1)\varsigma}d\varsigma=-H_{\nu+1}^{(1)} \qquad (61)$$

Подставляя выражение (61) в формулу (59), получим формулу (57)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{H_\nu^{(1)}(x)}{x^\nu}\right)=\frac{1}{x^\nu}\left(H_\nu^{(1)\prime}(x)-\frac{\nu}{x}H_\nu^{(1)}(x)\right)=-\frac{H_{\nu+1}^{(1)}(x)}{x^\nu}.$$

Формула (58) доказывается полностью аналогично.

8. Связь функций Ханкеля и Бесселя. Функция Неймана

Из интегральных представлений (48), (53) и (54) для функций Бесселя и Ханкеля следует формула

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right). \qquad (62)$$

В силу общих свойств аналитического продолжения, это соотношение можно продолжить на всю комплексную плоскость Z с разрезом по отрицательной части действительной оси $-\pi < \arg Z < \pi$

Используя формулы (55) и (56), получим

$$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2}\left(H_{-\nu}^{(1)} + H_{-\nu}^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)} e^{i\nu\pi} + H_\nu^{(2)} e^{-i\nu\pi}\right) \qquad (63)$$

Рассмотрим два случая: 1) $\nu \neq n$ и 2) $\nu = n$.

1) $\nu \neq n$

$$H_\nu^{(1)}(x) = i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \qquad (64)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -i\,\frac{J_\nu(x)e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu} \qquad (65)$$

2) $\nu = n$

В этом случае , учитывая, что $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, в формулах (64) и (65) возникает неопределенность, которую нужно раскрыть, применяя правило Лопиталя.

$$H_n^{(1)}(x) = \lim_{\nu\to n} i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} =$$

$$= \lim_{\nu\to n} \frac{i}{\pi\cos\nu\pi}\left(-i\pi e^{-i\pi\nu} J_\nu(x) + \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} e^{-i\pi\nu} - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) =$$

$$
= \frac{i}{\pi \cos n\pi} \left(-i\pi e^{-i\pi n} J_n(x) + \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} e^{-i\pi n} - \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right) =
$$

$$
= J_n(x) + \frac{i}{\pi} (-1)^n \left(\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} (-1)^n - \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right) =
$$

$$
= H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + \frac{i}{\pi} \left(\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right). \quad (66)
$$

Совершенно аналогично получаем

$$
H_n^{(2)} = J_n(x) - \frac{i}{\pi} \left(\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)_{\nu=n} \right). \quad (67)
$$

Из формул (64) - (67) следует, что функция Ханкеля второго рода комплексно сопряжена к функции Ханкеля первого рода и наоборот:

$$H_\nu^{(2)}(x) = \left(H_\nu^{(1)}(x)\right)^*, \quad H_\nu^{(1)}(x) = \left(H_\nu^{(2)}(x)\right)^*. \qquad (68)$$

Определение. Функцией Неймана порядка ν называется функция

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)} - H_\nu^{(2)}\right). \qquad (69)$$

При действительном x функция Бесселя является действительной частью функций Ханкеля, а функция Неймана является мнимой частью функции $H_\nu^{(1)}$ и минус мнимой частью функции $H_\nu^{(2)}$:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \qquad (70)$$

9. Линейная независимость цилиндрических функций

Для доказательства линейной независимости цилиндрических функций достаточно показать, что их определитель Вронского отличен от нуля.

Получим определитель Вронского для функции Бесселя и функции Ханкеля первого рода. В силу формулы (64) при $\nu \neq n$ имеем:

$$W\left[J_\nu, H_\nu^{(1)}\right] = -\frac{i}{\sin \pi\nu} W\left[J_\nu, J_{-\nu}\right] \tag{71}$$

так как при $\nu \neq n$ (см. формулу (64))

$$H_\nu^{(1)}(x) = i\,\frac{J_\nu(x)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}.$$

Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, определитель Вронского $W\left[J_\nu, J_{-\nu}\right]$ имеет вид

$$W\left[J_\nu, J_{-\nu}\right] = \frac{C_\nu}{x},\ C_\nu = \mathrm{const} \tag{72}$$

Функции $J_\nu(x),\ J_{-\nu}(x)$ являются решениями уравнения Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Для дифференциального уравнения вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

имеет место формула Остроградского-Лиувилля для определителя Вронского, построенного на решениях этого уравнения (см. Л.Э.Эльсгольц «Дифференциальные уравнения и вариационое исчисление». М.: Наука, 1966. С. 106)

$$W = Ce^{-\int p(x)}dx.$$

В нашем случае $p(x) = \dfrac{1}{x}$, откуда следует формула (72).

Найдем постоянную C_ν .

Из формулы (21) получаем

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$=$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \right) =$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\left(\frac{x}{2}\right)^{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\right)=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+x^{2}P(x)\right).$$

Итак, $$J_{\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+x^{2}P(x)\right), \qquad (73)$$

Аналогично получаем

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left(\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}+x^{2}Q(x)\right), \qquad (74)$$

Где $P(x)$ и $Q(x)$ - ограниченные в нуле функции.

Из формул (73) и (74) следует, что

$$J'_{\nu}(x)=\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left(2xP(x)+x^2P'(x)\right), \tag{75}$$

$$J'_{-\nu}(x)=-\frac{\nu}{x}J_{-\nu}(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left(2xQ(x)+x^2Q'(x)\right), \tag{76}$$

Используя формулы (73) – (76), запишем определитель Вронского

$$W\left[J_{\nu},J_{-\nu}\right]=J_{\nu}(x)J'_{-\nu}(x)-J_{-\nu}(x)J'_{\nu}(x)=-2\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)J_{-\nu}(x)-$$

$$-J_{-\nu}(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\left(2xP(x)+x^2P'(x)\right)+J_{\nu}(x)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\left(2xQ(x)+x^2Q'(x)\right)=$$

$$=-2\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)J_{-\nu}(x)+xS(x)=-2\frac{\nu}{x}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(1-\nu)}+xR(x),$$

где функции $S(x)$ и $R(x)$ ограничены в нуле.

Учитывая формулу (72), получим

$$W\left[J_{\nu}, J_{-\nu}\right] = -2\frac{\nu}{x}\frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)\Gamma\left(1-\nu\right)} + xR\left(x\right) = \frac{C_{\nu}}{x}.$$

откуда, учитывая формулу для гамма-функции

$$\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(1-z\right) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

получим

$$C_{\nu} = -2\nu\frac{1}{\Gamma\left(\nu+1\right)\Gamma\left(1-\nu\right)} = -\frac{2\nu}{\nu\Gamma\left(\nu\right)\Gamma\left(1-\nu\right)} = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi}.$$

Таким образом при $\nu \neq n$

$$W\left[J_\nu, J_{-\nu}\right] = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}. \qquad (77)$$

Отсюда при **любом** ν получаем

$$W\left[J_\nu, H_\nu^{(1)}\right] = -\frac{i}{\sin\nu\pi} W\left[J_\nu, J_{-\nu}\right] = \frac{i}{\sin\nu\pi}\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} = \frac{2i}{\pi x},$$

$$W\left[J_\nu, H_\nu^{(1)}\right] = \frac{2i}{\pi x} \qquad (78)$$

Аналогично получаем

$$W\left[J_\nu, H_\nu^{(2)}\right] = -\frac{2i}{\pi x}. \qquad (79)$$

Поскольку

$$W\left[J_{\nu},H_{\nu}^{(1)}\right]=iW\left[J_{\nu},N_{\nu}\right],$$

то

$$W\left[J_{\nu},N_{\nu}\right]=\frac{2}{\pi x}. \qquad (80)$$

10. Асимптотика цилиндрических функций

Рассмотрим асимптотику цилиндрических функций при больших значениях аргумента x.

Получим асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Ханкеля первого рода, используя метод перевала. Будем исходить из интегральной формулы (53)

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix\sin\varsigma + i\nu\varsigma} d\varsigma. \qquad (53)$$

Интеграл (53) представляет собой интеграл по комплексной переменной ς, зависящий от вещественного параметра x.

Сущность метода перевала состоит в следующем (см. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат Методы теории функции комплексного пкременного. М.: «Наука», 1965. С. 477).

Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int_C e^{xf(\varsigma)} \varphi(\varsigma) d\varsigma.$$

При больших значениях параметра x величина интеграла $F(x)$ определяется в основном тем участком пути интегрирования C, на котором величина

$$\left| e^{xf(\varsigma)} \right| = e^{x \operatorname{Re} f(\varsigma)},$$

то есть величина $\operatorname{Re} f(\varsigma)$, велика по сравнению со значениями на остальной части контура C. Причем этот интеграл оценивается тем легче, чем меньше этот участок и чем круче спадает величина $\operatorname{Re} f(\varsigma)$. Поэтому при применении метода перевала путь интегрирования C стараются деформировать в наиболее удобный путь , пользуясь тем, что по теореме Коши такая деформация не меняет величины интеграла.

Нам понадобится следующее утверждение, основанное на применении метода перевала.

Если $f(\varsigma)$ и $\varphi(\varsigma)$ являются аналитическими функциями ς в области G, содержащей контур интегрирования C, то имеет место асимптотическая оценка при больших значениях x $(x \gg \nu)$.

$$F(x) = \int_C e^{xf(\varsigma)} \varphi(\varsigma)\, d\varsigma = e^{xf(\varsigma_0)} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{x\left|f''(\varsigma_0)\right|}} \varphi(\varsigma_0) e^{i\psi} + O\left(x^{-\frac{3}{2}} \right) \right), \quad (81)$$

где ς_0 - точка перевала функции $f(\varsigma):\ f'(\varsigma_0) = 0,$ а угол ψ

определяет направление наискорейшего спуска :

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\pi - \arg f''(\varsigma_0)\right). \quad (82)$$

Применяя формулы (81) и (82) к интегралу (53), получим:

$$f\left(\varsigma\right)=-i\sin\varsigma;\ f'\left(\varsigma_0\right)=-i\cos\varsigma_0=0\ \Rightarrow\ \varsigma_0=-\frac{\pi}{2};$$

$$f\left(\varsigma_0\right)=-i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=i;\ f''\left(\varsigma_0\right)=-i;\ \left|f''\left(\varsigma_0\right)\right|=1; \tag{83}$$

$$\arg f''\left(\varsigma_0\right)=\frac{3}{2}\pi\ \Rightarrow\ \psi=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Подставляя (83) в (81), получим

$$H_\nu^{(1)}\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_1}e^{-ix\sin\varsigma+i\nu\varsigma}d\varsigma=\frac{1}{\pi}e^{ix}\left(\sqrt{\frac{2\pi}{x}}e^{-i\nu\frac{\pi}{2}-i\frac{\pi}{4}}+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \tag{84}$$

откуда окончательно получаем при $(x >> \nu)$

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \qquad (85)$$

Замечание 1.Функция $H_\nu^{(1)}(z)$ является аналитической функцией комплексной переменной z на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси, поэтому в силу общих свойств аналитического продолжения формула (84) остается справедливой при $|z| >> |\nu|$ в области $|\arg z| \le \pi - \delta,\ \delta > 0.$

При вещественном аргументе x обычно используется формула (85).

Замечание 2. Так как при вещественном x $H_\nu^{(2)}(x) = \left(H_\nu^{(1)}(x)\right)^*$, то при больших значениях вещественного аргумента для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие асимптотические формулы

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \qquad (86)$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \qquad (87)$$

Из формул (86) и (87) следует, что при достаточно больших вещественных значений аргумента x функции Бесселя и Неймана представляют собой осциллирующие функции x, причем с ростом x их амплитуда убывает как $x^{-1/2}$, а расстояние между нулями стремится к π.

Покажем, что все нули функций Бесселя и Неймана, кроме нуля x-0, простые. Пусть в некоторой точке $x_0>0$ функция имеет нуль порядка больше единицы. Тогда в этой точке обращается в нуль сама функция и ее первая производная. Но цилиндрические функции удовлетворяют уравнению Бесселя, являющемуся однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Поставим для него в области $x \in (x_0, \infty)$ задачу Коши

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0, \quad x \in (x_0, \infty), \\ y(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = 0. \end{cases}$$

В силу единственности решения рассматриваемой задачи Коши задача для однородного уравнения с однородными начальными условиями имеет только тривиальное решение $y(x) \equiv 0, \; x \in (x_0, \infty)$, что приводит к противоречию к построенным асимптотикам функций Бесселя и Неймана.

11. Собственные функции круга

В первой главе была рассмотрена задача на собственные значения для круга

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, (r, \varphi) \in U_0^{r_0}, & (88) \\ u(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in C_0^{r_0}, & (89) \end{cases}$$

$U_0^{r_0}$ – круг радиуса r_0, $C_0^{r_0}$ –окружность радиуса r_0 с центром в точке 0, $\bar{U}_0^{r_0} = U_0^{r_0} + C_0^{r_0}$.

В задаче (88), (89) дополнительное граничное условие (89) состоит в задании на границе значения искомой функции. Такое граничное условие называется условием первого рода или условием Дирихле. Если на границе задано значение нормальной производной искомой функции, то такое граничное условие называется условием второго рода или условием Неймана. Если на границе задана линейная Комбинация граничных условий первого и второго рода, то такое граничное условие называется условием третьего рода или условием Робена. В этом случае задача на собственные значения имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \left(r, \varphi\right) \in U_0^{r_0}, & (90) \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\left(r, \varphi\right) = 0, \ \left(r, \varphi\right) \in C_0^{r_0}, & (91) \end{cases}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная функции u по внешней нормали к окружности $C_0^{r_0}$ $\alpha,\ \beta,\ \left|\alpha\right| + \left|\beta\right| \neq 0$ - коэффициенты, позволяющие задавать граничные условия первого, второго и третьего рода , При применении для решения этой задачи метода разделения переменных (метода Фурье) для радиальной функции $R(r)$ мы получаем следующую задачу на собственные значения

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\dfrac{\mu}{r^2}\right)R=0, r\in\left(0,r_0\right), & (92)\\
\left|R\left(0\right)\right|<\infty, & (93)\\
\alpha\dfrac{dR}{dr}+\beta R=0, \quad r=r_0. & (94)
\end{cases}
$$

Для угловой части получается следующая задача с использованием условий периодичности

$$
\begin{cases}
\Phi''+\mu\Phi=0, \varphi\in\left[0,2\pi\right],\\
\Phi\left(\varphi\right)=\Phi\left(\varphi+2\pi\right),
\end{cases}
$$

решение которой имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \\ \sin n\varphi. \end{cases} \qquad \mu = \mu_n = n^2, n = 0,1.2...$$

Таким образом, задача (92) - (94) принимает следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{r^2}\right)R = 0, r \in (0, r_0), & (95) \\ |R(0)| < \infty, & (96) \\ \alpha\dfrac{dR}{dr} + \beta R = 0, \quad r = r_0. & (97) \end{cases}$$

Условие (96) является естественным как с физической , так и с математической точки зрения, поскольку при решении исходной задачи методом разделения переменных мы ищем решение ограниченное в круге и начало вводимой нами цилиндрической системы координат ничем не примечательно. Поскольку точка $r=0$ является особой точкой уравнения (95), то, учитывая лемму, доказанную в главе 2, достаточно поставить условие ограниченности решения в особой точке. Условие (96) естественно и с математической точки зрения, так как в задаче на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка для выделения единственного решения необходимо задать два условия. Граничное условие (97) является вторым условием, обеспечивающим вместе с условием (96) единственность решения задачи и дающим характеристическое уравнения для определения собственных значений.

Как было показано в начале главы 3, с помощью замены $x = \sqrt{\lambda} r$ уравнение (95) переходит в уравнение Бесселя

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \left(x^2 - n^2\right) y(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y(x) = y_n(x) = A J_n(x) + B N_n(x).$$

Поэтому общее решение уравнения (95) можно записать в виде

$$R(r) = R_n(r) = y_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) = A J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right) + B N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right).$$

Так как функция Неймана $N_n\left(\sqrt{\lambda} r\right)$ не ограничена в точке $r=0$, то из условия (96) следует, что $B=0$. Собственная функция , как решение однородного уравнения, определяется с точностью до постоянного множителя, то можно положить $A=1$.

Собственная функция задачи (95)-(97) имеет вид

$$R_n(r) = J_n\left(\sqrt{\lambda} r\right). \qquad (98)$$

Подставляя формулу (98) в граничное условие (97), получаем дисперсионное уравнение для определения собственных значений λ:

$$\alpha\sqrt{\lambda} J_n'\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) + \beta J_n\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) = 0, \qquad (99)$$

где штрих обозначает производную функции Бесселя по полному аргументу. Обозначим через $\tau_k^{(n)} = \sqrt{\lambda_k^{(n)}} r_0 -$ k –й корень дисперсионного уравнения (100)

$$\alpha\tau J_n'(\tau) + \beta r_0 J_n(\tau) = 0 \qquad (100)$$

при фиксированном n=0,1,2,…

Тогда собственные функции и собственные значения задачи (95) - (97) можно записать следующим образом

$$u_{kn}(r,\varphi) = J_n\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\right)\begin{cases}\cos n\varphi, \\ \sin n\varphi.\end{cases} \qquad k=1,2,..., \; n=0,1.2..., \qquad (101)$$

а собственные значения имеют вид

$$\lambda_k^{(n)} = \left(\frac{\tau_k^{(n)}}{r_0}\right)^2, k=1,2,..., \; n=0,1.2... \qquad (102)$$

Найдем норму собственных функций, для чего вычислим следующий интеграл

$$I = \int Z_\nu^2(x)\, x dx,$$

где $Z_\nu(x)$ – любая цилиндрическая функция, удовлетворяющая уравнению Бесселя

$$x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) Z_\nu(x) = 0. \qquad (103)$$

Имеем:

$$I = \int Z_\nu^2(x)\, x dx = \int Z_\nu^2(x)\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} Z_\nu^2(x) - \int \frac{x^2}{2} 2 Z_\nu(x) Z_\nu'(x)\, dx =$$

$$= I = \frac{x^2}{2} Z_\nu^2(x) - \int x^2 Z_\nu(x) Z_\nu'(x)\,dx. \qquad (104)$$

Из уравнения (103) находим

$$-x^2 Z_\nu(x) = x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) - \nu^2 Z_\nu(x),$$

откуда

$$-\int x^2 Z_\nu(x) Z_\nu'(x)\,dx =$$

$$= \int \left(x^2 Z_\nu''(x) + x Z_\nu'(x) - \nu^2 Z_\nu(x) \right) Z_\nu'(x)\,dx =$$

$$= \int \left(x Z_\nu''(x) + Z_\nu'(x) \right) x Z_\nu'(x) dx - \nu^2 \int \left(\frac{Z_\nu^2(x)}{2} \right)' dx =$$

$$= \int x Z_\nu'(x) \left(x Z_\nu'(x) \right)' dx - \frac{\nu^2}{2} Z_\nu^2(x) = \int \frac{\left(\left(x Z_\nu'(x) \right)^2 \right)'}{2} dx -$$

$$- \frac{\nu^2}{2} Z_\nu^2(x) = \frac{x^2}{2} \left(Z_\nu' \right)^2 - \frac{\nu^2}{2} Z_\nu^2(x) \qquad (105)$$

Подставляя (105) в формулу (104), получаем выражене для интеграла I :

$$I=\int xZ_\nu^2(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\left(\left(Z_\nu'(x)\right)^2+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu^2(x)\right). \quad (106)$$

В нашем случае $Z_\nu(x) \Rightarrow J_n\left(\sqrt{\lambda_k^n}\,r\right),\ \nu \Rightarrow n:$

$$\left\|J_n\right\|^2=\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r\right)dr=\left\{x=\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r\right\}=\frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\int_0^{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}r_0} xJ_n^2(x)\,dx=$$

$$=\frac{r_0^2}{2}\left(\left(J_n'\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r_0\right)\right)^2+\left(1-\frac{n^2}{\lambda_k^{(n)}r_0^2}\right)J_n^2\left(\sqrt{\lambda_k^{(n)}}\,r_0\right)\right). \quad (107)$$

12. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента. Функции Инфельда и Макдональда

Цилиндрические функции можно рассматривать не только от вещественного, но и от комплексного аргумента. Рассмотрим цилиндрические функции от чисто мнимого аргумента. Подставим в ряд для функции Бесселя $J_\nu(x)$ вместо вещественного аргумента x комплексный аргумент ix

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x), \qquad (108)$$

где, так как $(-1)^k i^{2k} = (-1)^k (-1)^k = 1,$

$$I_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \qquad (109)$$

Определение. Функция, определяемая формулой (109), называется функцией Инфельда порядка ν.

При $\nu=0$ функция Инфельда имеет следующий вид

$$I_0(x)=1+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots \qquad (110)$$

Из формул (109) и (110) следует, что функция Инфельда $I_\nu(x)$ - вещественная монотонно возрастающая функция, имеющая при $x=0$ нуль $\nu-$го порядка.

Используя асимптотику функций Ханкеля первого и второго рода, получим асимптотику функции Инфельда при $x \to \infty$:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}\frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(ix) + H_\nu^{(2)}(ix)\right) =$$

$$= i^{-\nu}\frac{1}{2}\left(e^{i(ix)}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}e^{-i\frac{\pi}{2}\nu - i\frac{\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right) + e^{-i(ix)}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi i x}}e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right)\right) =$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}e^{x}\left(\sqrt{\frac{1}{2\pi i x}}e^{i\frac{\pi}{2}\nu + i\frac{\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right) = e^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right) =$$

$$= e^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)\right).$$

Отсюда получаем окончательную формулу.

Таким образом асимптотика функции Инфельда при больших значениях аргумента имеет вид

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right). \qquad (111)$$

Аналогичным образом вводится функция Инфельда порядка $-\nu$.

Определение. Функция, определяемая формулой (112)

$$I_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \qquad (112)$$

называется функцией Инфельда порядка $-\nu$.

При нецелом ν функции $I_\nu(x)$, $I_{-\nu}(x)$ линейно независимые, так как в точке x=0 функция $I_\nu(x)$ имеет нуль ν–го порядка, а функция $I_{-\nu}(x)$ имеет полюс ν– го порядка. При целом $\nu = n$ эти функции совпадают

$$I_{-n}(x) = I_n(x). \qquad (113)$$

В самом деле, используя формулу (81), имеем:

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(x) = i^n (-1)^n J_n(x) = i^n (-1)^n i^n I_n(x) = I_n(x).$$

Уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента можно получить из уравнения Бесселя , положив аргумент равным *ix:*

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - \left(x^2 + \nu^2\right) y(x) = 0. \qquad (114)$$

При нецелом значении $\nu \neq n$ функции $I_\nu(x)$, $I_{-\nu}(x)$ являются линейно независимыми и образуют фундаментальную систему решений уравнения (114). При $\nu = n$, согласно формуле (113), эти функции совпадают.

Наряду с функцией Инфельда широко используется функция Макдональда, которая вводится с помощью функции Ханкеля первого рода от чисто мнимого аргумента следующим образом .

Определение. Функция, определяемая формулой

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(x), \qquad (115)$$

называется функцией Макдональда.

Функция Макдональда является вещестенной функцией вещественного аргумента.

В самом деле, пусть $\nu \neq n$. Тогда. Используя формулу (91)

$$H_\nu^{(1)}\left(x\right) = i\,\frac{J_\nu\left(x\right)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}\left(x\right)}{\sin\pi\nu}, \qquad (91)$$

получим

$$K_\nu\left(x\right) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}i\,\frac{J_\nu\left(ix\right)e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}\left(ix\right)}{\sin\pi\nu} =$$

$$= -\frac{\pi}{2\sin\pi\nu}i^\nu\left(i^\nu I_\nu\left(x\right)e^{-i\nu\pi} - i^{-\nu}I_{-\nu}\left(x\right)\right) = \qquad (116)$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left(I_{-\nu}\left(x\right) - I_\nu\left(x\right)\right).$$

Пусть теперь $\nu = n$ - целое число. Переходя в формуле (89) к пределу при $\nu \to n,$ получим:

$$K_n\left(x\right) = \lim_{\nu\to n} K_\nu\left(x\right) = \lim_{\nu\to n} \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\left(I_{-\nu}\left(x\right) - I_\nu\left(x\right)\right) =$$

$$= \lim_{\nu\to n} \frac{\pi}{2\pi\cos\pi\nu}\left(\frac{\partial I_{-\nu}\left(x\right)}{\partial\nu} - \frac{\partial I_\nu\left(x\right)}{\partial\nu}\right) =$$

$$= \frac{\left(-1\right)^n}{2}\left(\left(\frac{\partial I_{-\nu}\left(x\right)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_\nu\left(x\right)}{\partial\nu}\right)_{\nu=n}\right). \qquad (117)$$

Из формул (116) и (117) следует, что функция Макдональда $K_\nu\left(x\right)$ является вещественной функцией при любом ν .

Асимптотику функции Макдональда при больших значениях аргумента $x \to \infty$ можно получить, используя асимптотическую формулу (84) для функции Ханкеля первого рода

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right): \qquad (84)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} i^\nu i e^{i(ix)} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi i x}} e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} e^{-i\frac{\pi}{4}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} i^\nu i e^{-x} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi i x}} i^{-\nu} \frac{1}{\sqrt{i}} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad \Rightarrow$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right). \qquad (118)$$

Из формул (111) и (118) следует, что при $x \to \infty$ функция Инфельда $I_\nu(x)$ экспоненциально возрастает, в то время как функция Макдональда $K_\nu(x)$ экспоненциально убывает. Следовательно, функции Инфельда и Макдональда линейно независимые и образуют фундаментальную систему решений уравнения (114), общее решение которого при любом значении ν можно записать в виде

$$y(x) = AI_\nu(x) + BK_\nu(x),$$

где A и B произвольные постоянные. Причем, если решение ограничено на бесконечности, то A=0, а если решение ограничено в нуле, то B=0.

Поскольку функции Инфельда и Макдональда линейно независимые решения уравнения (114) и функция Инфельда в нуле при $\nu = 0$ ограничена, а при $\nu \neq 0$ имеет ноль ν – го порядка, то в силу леммы главы 2, функция Макдональда имеет при $\nu = 0$ логарифмическую особенность, а при $\nu \neq 0$ - полюс порядка ν.

В частности, асимптотик в нуле функции Макдональда нулевого порядка имеет следующий вид:

$$K_0\left(x\right) = -I_0\left(x\right)\ln\frac{2}{x} + \ldots$$

Определители Вронского для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента - функций Инфельда и Макдональда имеют следующи вид

$$W\left[I_\nu, I_{-\nu}\right] = \frac{2\sin\left(\pi\nu\right)}{\pi x}, \qquad (119)$$

$$W\left[I_\nu, K_\nu\right] = -\frac{1}{x}. \qquad (120)$$

Рекуррентные формулы для цилиндрических функций мнимого аргумента легко получить из рекуррентных формул (27), (28) для цилидрических функций:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{I_\nu(x)}{x^\nu}\right)=\frac{1}{x^\nu}I_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu I_\nu(x)\right)=-x^\nu I_{\nu-1}(x),$$

$$I_{\nu+1}-I_{\nu-1}=-\frac{2\nu}{x}I_\nu(x),$$

$$K_{\nu+1}-K_{\nu-1}=\frac{2\nu}{x}K_\nu(x),$$

$$K_{\nu+1}+K_{\nu-1}=-2K_\nu'(x).$$

В частности

$$I_0'(x)=I_1(x),\quad K_0'(x)=-K_1(x).$$