Первая студенческая олимпиада по математическому анализу

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

28 апреля 2016 года

Задача 1

Докажите, что функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ на полупрямой $x > 1$ отличаются на постоянную, и найдите эту постоянную.

Задача 2

Исследуйте функцию $f(x) = \sin(x^3)$ на равномерную непрерывность на прямой $(-\infty; +\infty)$.

Задача 3

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и d^2z является положительно определённой квадратичной формой в точке M_0. Докажите, что при этом условии в некоторой окрестности точки $N_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ касательная плоскость к графику функции $z = f(x, y)$ в точке N_0 имеет единственную общую точку с графиком.

Задача 4

Последовательность $\{x_n\}$ строится следующим образом:

$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},\ n = 1, 2, \ldots$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найдите этот предел.

Задача 5

а) (Теорема Брауэра о неподвижной точке) Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и область её значений есть отрезок $[0; 1]$. Докажите, что существует точка $x_0 \in [0; 1]$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

б) Может ли при этих условиях существовать более одной точки $x_0 \in [0; 1]$ такой, что $f(x_0) = x_0$? Ответ обоснуйте.

в) Справедливо ли следующее утверждение: если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(0; 1)$ и область её значений есть интервал $(0; 1)$, то существует точка $x_0 \in (0; 1)$ такая, что $f(x_0) = x_0$? Ответ обоснуйте.

Задача 6

Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2 + \sqrt{(1 + x^2)^3}}}.$$

Задача 1

Докажите, что функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ на полупрямой $x > 1$ отличаются на постоянную, и найдите эту постоянную.

Решение. Поскольку $\big(f(x) - g(x)\big)' = 0$ при $x > 1$, то $f(x) - g(x) = C = \text{const}$ при $x > 1$. Значение константы можно найти, например, рассмотрев предел при $x \to +\infty$:

$$C = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: $f(x) - g(x) = \frac{3\pi}{4}$.

Задача 2

Исследуйте функцию $f(x) = \sin(x^3)$ на равномерную непрерывность на прямой $(-\infty; +\infty)$.

Решение. Докажем, что функция не является равномерно непрерывной. Для этого необходимо показать, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta$, но $|\sin(x_1^3) - \sin(x_2^3)| \geq \varepsilon$.

Возьмём $\varepsilon = 1$. Выберем x_1, x_2 такие, что

$$x_1^3 = 2\pi n + \frac{\pi}{2}, \qquad x_2^3 = 2\pi n, \qquad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $|\sin(x_1^3) - \sin(x_2^3)| = 1 = \varepsilon$. При этом

$$\frac{\pi}{2} = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2),$$

откуда

$$x_1 - x_2 = \frac{\pi}{2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)} < \frac{\pi}{2 \cdot 3 \cdot (2\pi n)^{\frac{2}{3}}}.$$

Отсюда видно, что для любого наперёд заданного $\delta > 0$, выбрав n достаточно большим, всегда можно добиться того, что неравенство $|x_1 - x_2| < \delta$ будет выполняться. Следовательно, функция не является равномерно непрерывной на данном промежутке.

Ответ: функция не является равномерно непрерывной.

Задача 3

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и d^2z является положительно определённой квадратичной формой в точке M_0. Докажите, что при этом условии в некоторой окрестности точки $N_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ касательная плоскость к графику функции $z = f(x, y)$ в точке N_0 имеет единственную общую точку с графиком.

Решение. Запишем уравнение касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке N_0:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \tag{1}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Её геометрический смысл — отклонение (по оси Oz) графика функции $z = f(x, y)$ от касательной плоскости.

Функция $g(x, y)$ дважды дифференцируема в точке M_0, удовлетворяет в этой точке необходимому условию экстремума $dg(M_0) = 0$, и к тому же $d^2g(M_0) = d^2f(M_0)$.

По условию задачи $d^2f(M_0)$ является положительно определённой квадратичной формой, поэтому функция $g(x, y)$ в точке M_0 удовлетворяет всем условиям теоремы о достаточных условиях экстремума и имеет локальный минимум. Поэтому найдётся такая окрестность точки M_0, а следовательно, и точки N_0, в которой график функции $z = f(x, y)$ будет лежать выше касательной плоскости (1) (за исключением самой точки N_0), поэтому в указанной окрестности график функции имеет единственную общую точку N_0 с касательной плоскостью (1).

Задача 4

Последовательность $\{x_n\}$ строится следующим образом:

$x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n},\ n = 1, 2, \ldots$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найдите этот предел.

Решение.

1) Очевидно, что $x_n > 0$ для всех n.
2) Если $x_n < 2$, то $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Поскольку $x_1 < 2$, то отсюда по индукции следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $0 < x_n < 2$ для всех n.
3) $x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{-(x_n - 2)(x_n + 1)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} > 0$ с учётом результата п. 2). Т.е. последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастающая.
4) Из ограниченности и монотонности следует сходимость последовательности $\{x_n\}$. Обозначим её предел через a. Перейдя в равенстве $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ к пределу при $n \to \infty$, получим $a = \sqrt{2 + a}$, откуда $a = 2$.

Ответ: 2.

Задача 5

а) (Теорема Брауэра о неподвижной точке) Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$ и область её значений есть отрезок $[0;1]$. Докажите, что существует точка $x_0 \in [0;1]$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

б) Может ли при этих условиях существовать более одной точки $x_0 \in [0;1]$ такой, что $f(x_0) = x_0$? Ответ обоснуйте.

в) Справедливо ли следующее утверждение: если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(0;1)$ и область её значений есть интервал $(0;1)$, то существует точка $x_0 \in (0;1)$ такая, что $f(x_0) = x_0$? Ответ обоснуйте.

Замечание. На самом деле в п. а) справедливо более сильное утверждение: пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$ и область её значений лежит на отрезке $[0;1]$. Тогда существует точка $x_0 \in [0;1]$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

Решение.

а) Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x$. Эта функция непрерывна на отрезке $[0;1]$. Если $f(0) = 0$, то $x_0 = 0$ является решением уравнения $f(x_0) = x_0$, и утверждение теоремы верно. Если же $f(0) \neq 0$, то $f(0) > 0$, поскольку область значений функции $f(x)$ лежит на отрезке $[0;1]$.
Рассуждая аналогично, получаем, что либо $f(1) = 1$, и тогда $x_0 = 1$ является решением уравнения $f(x_0) = x_0$, и утверждение теоремы верно, либо $f(1) < 1$.
В случае, когда $f(0) > 0$ и $f(1) < 1$ одновременно, получим $g(0) > 0$, $g(1) < 0$. По теореме о прохождении непрерывной функции через промежуточные значения на отрезке $[0;1]$ существует точка x_0, в которой $g(x_0) = 0$. Эта точка и является решением уравнения $f(x_0) = x_0$. Утверждение теоремы доказано.

б) Решение уравнения $f(x_0) = x_0$ может быть не единственным, например, в случае функции $f(x) = x$, удовлетворяющей всем условиям задачи.

в) Нет. Функция $f(x) = x^2$ определена и непрерывна на интервале $(0;1)$, область её значений есть интервал $(0;1)$, но уравнение $f(x) = x$ не имеет решений на интервале $(0;1)$.

Задача 6

Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$$

Решение. Сделаем замену $x = \operatorname{sh} t$. Тогда

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \int \frac{\operatorname{ch} t\, dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{ch}^3 t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+\operatorname{ch} t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{e^t+e^{-t}}{2}}} =$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{e^t+2+e^{-t}}} = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(e^{t/2}+e^{-t/2})^2}} = \sqrt{2}\int \frac{dt}{e^{t/2}+e^{-t/2}} = \sqrt{2}\int \frac{e^{t/2}\,dt}{e^t+1} =$$

$$= 2\sqrt{2}\int \frac{d\left(e^{t/2}\right)}{(e^{t/2})^2+1} = 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(e^{t/2}\right) + \text{const}.$$

Выразим $e^{t/2}$ через x. Рассмотрим равенство $\operatorname{sh} t = x$, откуда

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x,$$

$$(e^t)^2 - 2xe^t - 1 = 0,$$

$$e^t = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Окончательно получим

$$I = 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\right) + \text{const}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\right) + \text{const}.$