Спектральный анализ разностных схем

1 Исследование схем на устойчивость по начальным данным методом гармоник

Одним из достаточно простых и эффективных способов исследования линейных разностных схем на устойчивость по начальным данным является метод гармоник. Его можно использовать как для двухслойных схем вида

$$B\frac{\hat{y}-y}{\tau}+Ay=\varphi, \tag{1.1}$$

так и для трехслойных схем вида

$$B\frac{\hat{y}-\check{y}}{2\tau}+R(\hat{y}-2y+\check{y})+Ay=\varphi, \tag{1.2}$$

где A, B и R — линейные разностные операторы с постоянными коэффициентами, действующие на сеточную функцию y как на функцию пространственной переменной x. Заметим, что рассмотренные нами схемы для уравнения теплопроводности принадлежат к классу (1.1), а для уравнения колебаний — к классу (1.2).

Далее будем рассматривать частный случай — разностные схемы для задач Коши на прямой $x \in (-\infty, +\infty)$. Пусть схемы (1.1) и (1.2) заданы на равномерной сетке:

$$x_n = n\cdot h,\ \ n=0,\, \pm1,\, \pm2,\, ...;\quad t_j=j\cdot\tau,\ \ j=0,1,...$$

Исследуя устойчивость по начальным данным, фиксируем правую часть φ в уравнениях (1.1) и (1.2). Пусть $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ — решения соответствующих разностных уравнений при двух разных начальных условиях. Тогда их разность $\delta y = y^{(1)} - y^{(2)}$ будет удовлетворять однородному уравнению

$$B\frac{\delta\hat{y}-\delta y}{\tau}+A\delta y=0 \tag{1.3}$$

в случае двухслойной схемы, и уравнению

$$B\frac{\delta\hat{y}-\delta\check{y}}{2\tau}+R(\delta\hat{y}-2\delta y+\delta\check{y})+A\delta y=0 \tag{1.4}$$

в случае трехслойной схемы.

Разложим $\delta y(x_n, t_j) = \delta y_n^j$ в ряд по пространственным гармоникам e^{iqx_n}:

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j)e^{iqx_n}.$$

Так как уравнения (1.3) и (1.4) линейны, их можно рассматривать для каждой гармоники $\delta y_{n,q}^j = C_q(t_j)e^{iqx_n}$ в отдельности.

Рассмотрим подробно случай двухслойной схемы (1.3). При каждом фиксированном q получаем:

$$\left(C_q(t_{j+1}) - C_q(t_j)\right)Be^{iqx_n} + \tau C_q(t_j)Ae^{iqx_n} = 0. \tag{1.5}$$

Так как выражения Be^{iqx_n} и Ae^{iqx_n} представляют собой конечные линейные комбинации выражений $e^{iqx_n} = e^{i\alpha_q n}$, $e^{iqx_{n-1}} = e^{i\alpha_q(n-1)}$, $e^{iqx_{n+1}} = e^{i\alpha_q(n+1)}$ и т.д., где $\alpha_q = qh$, то, сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, из равенства (1.5) получаем, что

$$C_q(t_{j+1}) = \lambda_q \cdot C_q(t_j),$$

где λ_q — число, которое не зависит ни от n, ни от j. Число λ_q называют множителем роста для q-й гармоники. Его можно найти из уравнения:

$$\left(\lambda_q - 1\right)Be^{iqx_n} + \tau Ae^{iqx_n} = 0.$$

Таким образом, для двухслойной схемы получаем:

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j)e^{iqx_n}, \quad \delta y_n^{j+2} = \sum_q \lambda_q^2 C_q(t_j)e^{iqx_n},$$

и так далее.

Аналогичный результат имеет место и в случае трехслойной схемы. Рассматривая уравнение (1.4) для каждой гармоники в отдельности и учитывая, что $\delta y_{n,q}^{j-1}$, $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ связаны соотношениями

$$\delta y_{n,q}^{j-1} = C_q(t_{j-1})e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^j = \lambda_q \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q C_q(t_{j-1})e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q^2 \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q^2 C_q(t_{j-1})e^{iqx_n},$$

для множителей роста приходим к следующему квадратному уравнению:

$$(\lambda_q^2 - 1)Be^{iqx_n} + 2\tau(\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1)Re^{iqx_n} + 2\tau\lambda_q Ae^{iqx_n} = 0.$$

Теорема 1.1 *Для равномерной устойчивости схем (1.1) и (1.2) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы для любых q выполнялось условие:*

$$|\lambda_q| \leqslant 1 + c\tau, \tag{1.6}$$

где константа $c \geqslant 0$ не зависит ни от параметра q, ни от шагов сетки τ и h.

Доказательство.

Необходимость. Пусть хотя бы для одной гармоники с номером q_0 условие (1.6) не выполняется. Это означает, что для любого сколь угодно большого c имеет место неравенство:

$$|\lambda_{q_0}| \geqslant 1 + c\tau.$$

Если на произвольном слое t_j в этой гармонике имеется возмущение $\delta y^j_{n,q_0}$, то к моменту времени $T = t_j + J \cdot \tau$ его амплитуда будет порядка

$$|\lambda_{q_0}|^J = |\lambda_{q_0}|^{(T-t_j)/\tau} \geqslant (1 + c\tau)^{(T-t_j)/\tau} \approx (e^{c\tau})^{(T-t_j)/\tau} = e^{c(T-t_j)},$$

где c может быть сколь угодно велико. Это и означает неустойчивость по начальным данным.

Достаточность. Разложим возмущение на некотором слое t_j в ряд по гармоникам:

$$\delta y(t_j) = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

При $t = t_{j+J}$ возмущение будет иметь вид:

$$\delta y(t_{j+J}) = \sum_q C_q(t_{j+J}) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q^J C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Гармоники e^{iqx_n} с различными q ортогональны между собой на отрезке длиной 2π. Оценим погрешность решения на слое $j + J$ по норме L_2 на отрезке длиной 2π:

$$\|\delta y(t_{j+J})\|^2_{L_2} = \sum_q |\lambda_q|^{2J} |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|^2_{L_2} \leqslant (1+c\tau)^{2J} \underbrace{\sum_q |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|^2_{L_2}}_{\|\delta y(t_j)\|^2_{L_2}} \leqslant e^{2c(t-t_j)} \|\delta y(t_j)\|^2_{L_2}.$$

Последнее неравенство означает равномерную устойчивость по начальным данным. ■

Замечание 1.2 *В случае, когда множители роста λ_q не зависят явным образом от шага τ, условие (1.6) принимает вид*

$$|\lambda_q| \leqslant 1.$$

2 Примеры использования метода гармоник

Пример 2.1. *Исследуйте на устойчивость с помощью метода гармоник явную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \ \ t \in (0,T], \\ u(x,0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение. Введем равномерную сетку

$$x_n = n \cdot h, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \quad t_j = j \cdot \tau, \ j = 0, 1, ..., J, \ J \cdot \tau = T.$$

На этой сетке явная схема для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2\dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

При этом погрешность δy решения, обусловленная погрешностью начальных данных, удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} - a^2\frac{\delta y_{n+1}^j - 2\delta y_n^j + \delta y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1. \tag{2.1}$$

В соответствии с методом гармоник получаем:

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n} = \sum_q C_q(t_j) e^{i\alpha_q n},$$

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \lambda_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{i\alpha_q n},$$

где $\alpha_q = qh$. Гармоники $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j, \quad \delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{i\alpha_q n} \quad j = 1, 2, ..., J-1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.1) и сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} - a^2\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0.$$

Так как

$$\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{4} = -\left(\frac{e^{i\frac{\alpha_q}{2}} - e^{-i\frac{\alpha_q}{2}}}{2i}\right)^2 = -\sin^2\frac{\alpha_q}{2},$$

то

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - 4ra^2\sin^2\frac{\alpha_q}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

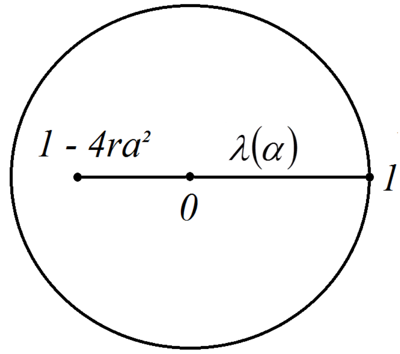

Рис. 1: Спектр оператора перехода со слоя на слой явной схемы для уравнения теплопроводности

При изменении α_q число $\lambda_q(\alpha_q)$ пробегает весь спектр оператора перехода со слоя на слой. В данном случае спектр расположен на отрезке $[1-4ra^2, 1]$ (см. рис. 1). Условие устойчивости (1.6) схемы выполнено, если

$$1-4ra^2 \geqslant -1 \;\; \Rightarrow \;\; r \leqslant \frac{1}{2a^2} \;\; \Leftrightarrow \;\; \tau \leqslant \frac{h^2}{2a^2}.$$

Таким образом, явная схема для уравнения теплопроводности является условно устойчивой. Ее можно использовать только в том случае, когда шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau \leqslant \dfrac{h^2}{2a^2}$.

Пример 2.2. *Исследуйте на устойчивость с помощью метода гармоник неявную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0,T], \\ u(x,0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение. Пользуясь той же сеткой, что и в предыдущем примере, запишем неявную схему для рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Так как гармоники погрешности δy решения, обусловленной погрешностью начальных данных, на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j, \qquad \delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{i\alpha_q n} \;\; j = 1, 2, ..., J-1,$$

а сама погрешность в данном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^{j+1} - 2\delta y_n^{j+1} + \delta y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1,$$

получаем:

$$\lambda_q - 1 - \frac{a^2\tau}{h^2}\lambda_q\left(e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}\right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\lambda_q(\alpha_q) = \frac{1}{1 + 4ra^2\sin^2\frac{\alpha_q}{2}}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Спектр $\lambda_q(\alpha_q)$ заполняет отрезок вещественной оси:

$$\frac{1}{1+4ra^2} \leqslant \lambda_q(\alpha_q) \leqslant 1,$$

то есть условие устойчивости (1.6) схемы выполнено при любом r. Следовательно, неявная схема для уравнения теплопроводности является безусловно устойчивой по начальным данным, то есть устойчивой при любом соотношении шагов τ и h сетки.

Пример 2.3. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным схему «крест» для задачи Коши для уравнения колебаний на прямой:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0, T]; \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $a > 0$ — заданное число.

Решение. Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a^2\dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \;\; j = 1, 2, ..., J-1, \\ y_n^0 = \varphi_n, \quad \dfrac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n + \dfrac{\tau a^2}{2}\varphi_n'', \quad n = 0, \pm1, \pm2, ..., \end{cases}$$

где $\varphi_n = \varphi(x_n)$, $\varphi_n'' = \varphi''(x_n)$, $\psi_n = \psi(x_n)$. При этом погрешность δy решения удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - 2\delta y_n^j + \delta y_n^{j-1}}{\tau^2} - a^2\frac{\delta y_{n+1}^j - 2\delta y_n^j + \delta y_{n-1}^j}{h^2} = 0 \tag{2.3}$$

при $n = 0, \pm1, \pm2, ..., \;\; j = 1, 2, ..., J-1$. Так как

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q^j e^{iqx_n}$$

и

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j = \lambda_q C_q^j e^{iqx_n},$$

то, рассматривая уравнение (2.3) для каждой гармоники по отдельности и сокращая на $C_q^j e^{iqx_n} = C_q^j e^{i\alpha_q n}$, где $\alpha_q = qh$, для множителей роста λ_q приходим к квадратному уравнению:

$$\frac{\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1}{\tau^2} - \lambda_q a^2\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_q^2 - 2\left(1 - 2r^2\sin^2\frac{\alpha_q}{2}\right)\lambda_q + 1 = 0, \;\; r = \frac{\tau a}{h}.$$

Произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1. Если его дискриминант

$$D(\alpha_q) = 4\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right)^2 - 4 = 16r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \left(r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - 1\right)$$

отрицателен, то корни $\lambda_q^1(\alpha_q)$ и $\lambda_q^2(\alpha_q)$ комплексно сопряжены и равны 1 по модулю.

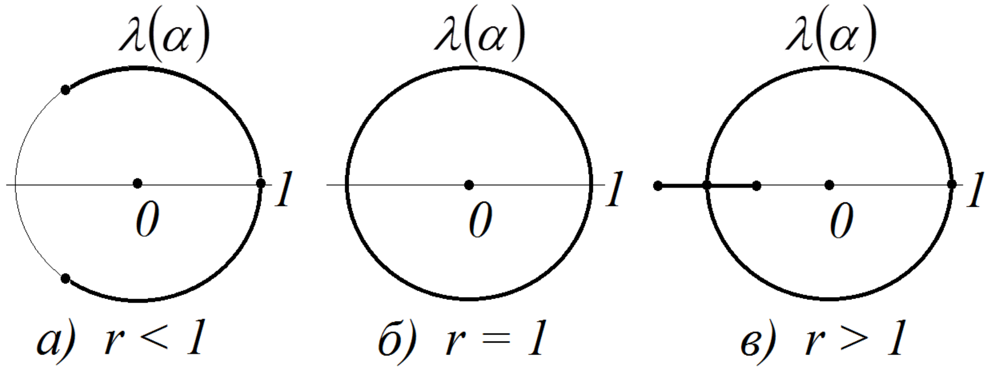

Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме «крест» для уравнения колебаний

При $r < 1$ дискриминант отрицателен при всех α_q, поэтому при изменении α_q комплексно-сопряженные корни $\lambda_q^1(\alpha_q)$ и $\lambda_q^2(\alpha_1)$ пробегают часть окружности радиуса 1 на комплексной плоскости (рис.2 а). При $r = 1$ спектр заполняет всю единичную окружность (рис.2 б). При $r > 1$ по мере изменения α_q корни квадратного уравнения движутся из точки $\lambda_1 = 1$ по единичной окружности, один по часовой стрелке, а другой против часовой стрелки, пока не сойдутся в точке $\lambda_q = -1$. Затем один из корней пойдет по вещественной оси из точки $\lambda_q = -1$ влево, а другой — вправо, причем $\lambda_q^1 \cdot \lambda_q^2 = 1$ (рис.2 в).

Спектральное условие устойчивости схемы по начальным данным выполнено, если спектр оператора перехода со слоя на слой принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости, то есть при $r \leqslant 1$. Следовательно, схема «крест» является условно устойчивой. Она устойчива, если шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau a \leqslant h$.

Пример 2.4. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным неявную схему для задачи Коши для уравнения колебаний на прямой:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \ \ t \in (0, T]; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $a > 0$ — заданное число.

Решение. Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - \sigma a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} - \sigma a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j-1} - 2y_n^{j-1} + y_{n-1}^{j-1}}{h^2} - \\ \qquad -(1-2\sigma)a^2 \dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad j = 1, 2, ..., J-1, \\ y_n^0 = \varphi_n, \qquad \dfrac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n + \dfrac{\tau a^2}{2} \varphi_n''. \end{cases}$$

Для множителей роста λ_q получаем квадратное уравнение:

$$\frac{\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1}{\tau^2} + \sigma \frac{a^2 \lambda_q^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \sigma \frac{a^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + (1-2\sigma) \frac{a^2 \lambda_q}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} = 0.$$

Введем обозначение

$$\beta_q = \frac{a\tau}{h} \sin \frac{\alpha_q}{2}$$

и перепишем уравнение для λ_q в виде:

$$\lambda_q^2 - 2\frac{1 - 2(1-2\sigma)\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \lambda_q + 1 = 0. \tag{2.5}$$

Как и в предыдущем примере, спектр оператора перехода со слоя на слой будет полностью принадлежать единичной окружности на комплексной плоскости (то есть будет выполнено условие устойчивости схемы), если дискриминант

$$D = 4\frac{\left(1 - 2(1-2\sigma)\beta_q^2\right)^2}{(1 + 4\sigma\beta_q^2)^2} - 4 = 16\beta_q^2 \frac{(1-4\sigma)\beta_q^2 - 1}{(1 + 4\sigma\beta_q^2)^2}$$

уравнения (2.5) будет меньше либо равен нулю. Следовательно, схема будет устойчивой, если выполнено условие:

$$\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 (1 - 4\sigma) \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Из неравенства (2.6) видно, что при $\sigma \geqslant \dfrac{1}{4}$ неявная схема для уравнения колебаний безусловно устойчива. Если $\sigma < \dfrac{1}{4}$, то схема оказывается условно устойчивой при

$$a\tau \leqslant \frac{h}{\sqrt{1 - 4\sigma}}.$$

На практике целесообразно выбирать вес σ в пределах $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, так как при $\sigma > \dfrac{1}{2}$ центральный слой схемы имеет отрицательный вес $(1 - 2\sigma)$.