МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Конспект лекций по курсу «Параболические уравнения» для студентов кафедры математики

Москва
Физический факультет МГУ
2015

К о р п у с о в М. О.
Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. — М.: Физический факультет МГУ, 2014. 364 с.
ISBN

В книге рассматриваются актуальные аспекты такого важного явления как разрушение решений с приложениями к нелинейным задачам современной математической физики. Материал книги частично используется в курсе «Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики», который авторы читают на кафедре математики физического факультета МГУ.

Данный курс входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и представляет значительный интерес для широкого круга студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области нелинейной математической физики и нелинейного функционального анализа.

Библиогр. 165 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
академик РАН *В. А. Ильин,*
член-корреспондент РАН *С. И. Похожаев*

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Оператор теплопроводности

II. Теория функций Грина и тепловых потенциалов

III. Принцип максимума

Тематическая лекция I

ОПЕРАТОР ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Лекция 1

ЗАДАЧА КОШИ

В этой лекции мы рассмотрим уравнение теплопроводности. Для него докажем слабый принцип максимума, рассмотрим задачу Коши и введем класс А. Н. Тихонова, в котором имеет место единственность решения задачи Коши.

§ 0. План лекции

1. Построение фундаментального решения.
2. Сферическая система координат.
3. Теорема о решении задачи Коши для однородного уравнения.
4. Нелинейное уравнение Бюргерса.
5. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием.
6. Решение общей задачи Коши.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как известно из курса ММФ к параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

в котором $u(x,t) \geqslant 0$ — это температура в точке x и в момент времени $t > 0$. Для исследования уравнения теплопроводности (1.1) необходимо построить так называемое *фундаментальное решение,* которое в терминах *обобщенных функций* определяется как решение следующего уравнения в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\delta(x,t)$ — это дельта–функция Дирака, а равенство в уравнении (1.2) не является поточечным равенством и его точный смысл будет нам в дальнейшем понятен из курса «Функциональный анализ», который мы только начали изучать. Решение уравнения (1.2) может быть получено при помощи так называемого преобразования Фурье и оно имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{1.3}$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, определенная равенством

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Однако, построить фундаментальное решение можно используя симметрию уравнения (1.1) относительно преобразования

$$(x,t) \to (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Итак, будем искать *частное решение* уравнения теплопроводности (1.1) в следующем автомодельном виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v(y), \quad y = \frac{x}{t^\beta}. \tag{1.4}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.1) мы получим следующее уравнение:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} (y, D_y) v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta_y v(y) = 0, \tag{1.5}$$

где $D_y = (\partial_{y_1}, ..., \partial_{y_N})$.

□ Действительно, имеем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}v(y) + \frac{1}{t^{\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial v(y)}{\partial y_j}\frac{y_j(t)}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}v(y) - \frac{\beta}{t^{\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial v(y)}{\partial y_j}\frac{x_j}{t^{\beta+1}} =$$

$$= -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}v(y) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial v(y)}{\partial y_j}y_j = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}v(y) - \frac{\beta}{t^{\alpha+1}}\left(y, D_y\right)v(y),$$

$$-\Delta_x u(x,t) = -\frac{1}{t^{\alpha}}\Delta_x v(y) = -\frac{1}{t^{\alpha+2\beta}}\Delta_y v(y). \quad \boxtimes$$

Положим в этом уравнении $\beta = 1/2$, тогда получим

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2}(y, D_y)v(y) + \Delta_y v(y) = 0. \tag{1.6}$$

Упростим это уравнение предположив, что функция $v(y)$ радиальна, т. е.

$$v = w(|y|) \Rightarrow \alpha w + \frac{1}{2}rw' + w'' + \frac{N-1}{r}w' = 0, \quad r = |y|. \tag{1.7}$$

□ Действительно, имеем

$$(y, D_y v(y)) = \sum_{j=1}^{N} y_j\frac{\partial w(|y|)}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{N} y_j\frac{\partial w(r)}{\partial r}\frac{y_j}{|y|} = \frac{\partial w(r)}{\partial r}\sum_{j=1}^{N}\frac{y_j^2}{|y|} = r\frac{\partial w(r)}{\partial r},$$

$$\Delta_y w(|y|) = \frac{1}{r^{N-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{N-1}\frac{dw(r)}{dr}\right) = \frac{N-1}{r}\frac{dw(r)}{dr} + \frac{d^2w(r)}{dr^2}. \quad \boxtimes$$

Положив в этом уравнении $\alpha = N/2$, получим более простое уравнение

$$(r^{N-1}w')' + \frac{1}{2}(r^N w)' = 0. \tag{1.8}$$

□ Действительно, имеем

$$0 = \frac{N}{2}r^{N-1}w(r) + \frac{1}{2}r^N w'(r) + r^{N-1}w''(r) + \frac{N-1}{r}r^{N-1}w'(r) =$$

$$= \frac{1}{2}(r^N w(r))' + (r^{N-1}w'(r))'. \quad \boxtimes$$

Таким образом,

$$r^{N-1}w'(r) + \frac{1}{2}r^N w(r) = a,$$

где a — константа. Положим $a = 0$, тогда

$$w'(r) = -\frac{1}{2} r w(r) \Rightarrow w(r) = b e^{-r^2/4} \Rightarrow u(x,t) = \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Константу $b > 0$ выберем так, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Итак, с учетом того, что $t \geqslant 0$ мы приходим к фундаментальному решению (1.3).

§ 2. Сферическая система координат

В дальнейшем мы будем пользоваться переходом к сферической системе координат в $\mathbb{R}^N$. При $N = 2$ она имеет вид

$$(x_1, x_2) \to (r, \varphi_1), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1, \end{cases}$$

$$J_2 = \left|\frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \varphi_1)}\right| = r, \quad dx_1 dx_2 = J_2 dr\, d\varphi_1.$$

При $N = 3$ она имеет вид

$$(x_1, x_2, x_3) \to (r, \varphi_1, \varphi_2), \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \end{cases}$$

$$J_3 = \left|\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2)}\right| = r^2\sin\varphi_1, \quad dx_1 dx_2 dx_3 = J_3 dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2.$$

При $N > 3$ сферическая система координат имеет следующий вид:

$$(x_1, x_2, ..., x_N) \to (r, \varphi_1, ..., \varphi_{N-1}),$$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{N-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\cos\varphi_{N-1}, \\ x_N = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2}\sin\varphi_{N-1}, \end{cases}$$

$$J_N = \left|\frac{D(x_1, x_2, x_3, ..., x_{N-1}, x_N)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{N-2}, \varphi_{N-1})}\right| =$$

$$= r^{N-1}\sin^{N-2}\varphi_1\sin^{N-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-2},$$

$$dx_1 dx_2 \cdots dx_{N-1} dx_N = J_N dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \cdots d\varphi_{N-2}\, d\varphi_{N-1}.$$

§ 3. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Докажем, что при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ классическое решение задачи (3.1), (3.2) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy. \tag{3.3}$$

Замечание 1. Заметим, что мы ниже используем следующее обозначение:

$$\mathbb{C}_b(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u(z) \in \mathbb{C}(\Omega) :\ |u(z)| \leqslant B < +\infty\},$$

где $B = B(u) > 0$ — это постоянная своя для каждого $u(z)$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ — это область и $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *и* $u(x,t)$ *определено формулой* (3.3). *Тогда*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)),$$

$u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *и выполнено предельное свойство*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\ x\in\mathbb{R}^N,\ t>0} u(x,t) = u_0(x_0) \quad \textit{для любого} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку функция

$$\frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$

бесконечное число раз дифференцируема и интегралы от производных в (3.3) равномерно сходятся на любом множестве $K \otimes [\delta,+\infty) \subset \subset \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)$ для любого $\delta > 0$ и для любого замкнутого, ограниченного множества $K \subset \mathbb{R}^N$, имеем $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Шаг 2. Кроме того,

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [\mathcal{E}_t(x-y,t) - \Delta_x \mathcal{E}(x-y,t)]\, u_0(y)\,dy = 0 \tag{3.5}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$ согласно определению фундаментального решения.

Шаг 3. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^N. \tag{3.6}$$

Пусть $|x - x_0| < \delta/2$, то с учетом равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\Big(-|y|^2/(4t)\Big)\, dy = 1, \quad t > 0$$

справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} |u(x,t) - u_0(x_0)| &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t)[u_0(y) - u_0(x_0)]\, dy \right| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy + \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|\, dy =: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Прежде всего справедливы неравенства

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t) \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t) = \varepsilon. \tag{3.8}$$

Кроме того, если

$$\begin{aligned} &|x - x_0| \leqslant \delta/2, \ |y - x_0| \geqslant \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow |y - x_0| \leqslant |y - x| + |x - x_0| \leqslant |y - x| + \delta/2 \leqslant |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}|y - x_0| \leqslant |y - x|. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)\, dy \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|y-x_0|^2}{16t}\right) dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{c_2}{t^{N/2}} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{N-1}\, dr = c_2 \int\limits_{\delta/\sqrt{t}}^{+\infty} \exp(-z^2/16) z^{N-1}\, dz \to +0$$

при $t \to +0$. Здесь мы сделали замену переменных $z = y - x_0$ и перешли к сферической системе координат. После чего сделали замену переменных

$$z = \frac{r}{\sqrt{t}}.$$

Таким образом, если

$$|x - x_0| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad t > 0 \quad \text{достаточно мало,}$$

то

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Нелинейное уравнение Бюргерса [6]. Существует важная связь между уравнением теплопроводности

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad u(x,t) \geqslant 0 \tag{3.9}$$

и уравнением Бюргерса

$$v_t + v v_x = \mu v_{xx}, \tag{3.10}$$

устанавливаемая следующей заменой *Коула–Хопфа*

$$v(x,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x,t). \tag{3.11}$$

Действительно, учитывая замену (3.11), получим

$$v_t + v v_x - \mu v_{xx} = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} (u_t - \mu u_{xx})\right] = 0 \tag{3.12}$$

в силу уравнения (3.9). Преобразование Коула–Хопфа позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Действительно, пусть в начальный момент времени

$$v(x,0) = \varphi(x), \tag{3.13}$$

тогда из (3.11) получаем

$$u(x,0) = \Psi(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^x \varphi(y)\, dy\right]. \tag{3.14}$$

Решение задачи Коши (3.9), (3.14) как мы уже показали ниже дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4\mu t}\right] dz. \tag{3.15}$$

Используя (3.15), получаем решение задачи Коши (3.10), (3.13) для уравнения Бюргерса в следующем виде:

$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-z}{t} \exp\left\{-\frac{G(z,x,t)}{2\mu}\right\} dz \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{G(z,x,t)}{2\mu}\right\} dz, \tag{3.16}$$

где

$$G(z,x,t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int\limits_0^z \varphi(y)\, dy. \tag{3.17}$$

§ 4. Неоднородная задача Коши

Теперь мы рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{4.1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.2}$$

Решение неоднородной задачи Коши (4.1), (4.2) будем искать в виде *интеграла Дюамеля*:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y, t-s) f(y,s)\, dy\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds \tag{4.3}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Замечание 2. Заметим, что ниже мы используем следующие пространства:

$$\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)),$$

которое является пространством функций $u(x,t)$ таких, что

$$u(x,t),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j},\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)), \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Кроме того, определим носитель функции $u(x,t)$

$$\operatorname{supp}(u(x,t)) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{(x,t) \in D : \ u(x,t) \neq 0\}}.$$

Символом $\mathbb{C}_0(D)$ мы обозначаем пространство функций $u(x,t) \in \mathbb{C}(D)$, у которых компактен носитель $\operatorname{supp}(u(x,t)) \subset D \subset \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть функция* $u(x,t)$ *определена формулой* (4.3) *и функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$. *Тогда* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$, $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (4.1) *и*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\ x\in\mathbb{R}^N,\ t>0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждой точки} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{4.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего сделаем замену переменных в (4.3):

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f(x-y,t-s)\,dy\,ds. \tag{4.5}$$

Поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$ и финитна, а функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y,s)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, получаем

$$u_t(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f_t(x-y,t-s)\,dy\,ds + \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad j = \overline{1,N},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Таким образом, u, u_t, $D_x u$ и $D^2_x u$ [1] принадлежат $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$. Следовательно,

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)).$$

[1] Символами $D_x u$ и $D^2_x u$ мы обозначили любую частную производную первого порядка и любую частную производную второго порядка соответственно.

Шаг 2. Заметим, что

$$\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s},$$

$$\Delta_x f(x-y,t-s) = \Delta_y f(x-y,t-s).$$

С учётом (4.6) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = \\
&= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&+ \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy =: I_1 + I_2 + J.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Прежде всего имеем

$$|I_2| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} [|f_t(x,t)| + |\Delta_x f(x,t)|] \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds \leqslant c_1\varepsilon. \tag{4.8}$$

Имеет место цепочка равенств

$$\int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s}\,dy\,ds = \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\left(\mathcal{E}(y,s) f(x-y,t-s)\right)}{\partial s}\,dy\,ds -$$

$$-\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s)\frac{\partial\mathcal{E}(y,s)}{\partial s}\,dy\,ds = \int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy-$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy-\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s)\frac{\partial\mathcal{E}(y,s)}{\partial s}\,dy\,ds.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1=\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)f(x-y,t-s)\right]dy\,ds=$$
$$=\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s)\right]dy\,ds+$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy-\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy-J, \quad (4.9)$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}-\Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s)=0 \quad \text{для всех} \quad s>0, \quad y\in\mathbb{R}^N.$$

Кроме того, в силу выкладок шага 3 теоремы 1

$$\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy\to f(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0.$$

Заметим, что с учетом выражения (4.9) из (4.7) мы видим, что

$$I_1+J=\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy.$$

Следовательно, мы доказали, что функция $u(x,t)$, определенная формулой (4.3), удовлетворяет уравнению (4.1).

Шаг 3. Наконец, имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|u(x,t)|\leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)}|f(x,t)|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds=$$
$$=c_1t\to+0 \quad \text{при} \quad t\to+0.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Комбинируя результаты этих двух теорем, мы получим, что при указанных условиях на $u_0(x)$ и $f(x,t)$ одно из классических решений неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{4.10}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.11}$$

дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy + \\ + \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\,dy\,ds. \tag{4.12}$$

Лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 0. План лекции

1. Обозначения.
2. Параболическая граница.
3. Теореме о решениях уравнения теплопроводности.
4. Теорема о соответствующих дифференциальных неравенствах.
5. Контрпример.
7. Принцип максимума модуля.

Задача 1. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \otimes [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

причем выполнены условия согласования $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Задача 2. Пусть $u(x,t)$ — это регулярное решение в $D=(0,\pi)\otimes(0,+\infty)$ задачи

$$u_t=u_{xx},\quad u|_{x=0}=u_x|_{x=\pi}=0,\quad u|_{t=0}=\varphi(x),\tag{0.1}$$

где $\varphi(0)=\varphi^{'}(\pi)=0$. Проверить, что выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi}|u(x,1)|\leqslant\sup_{0<x<\pi}|\varphi(x)|?\tag{0.2}$$

Задача 4. Существует ли решение $u(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t=u_{xx}+1\quad\text{в}\quad\overline{Q},\quad Q=\left\{(x,t):\ x^2+t^2<1\right\},\tag{0.3}$$

$$xu_x(x,t)=tu(x,t)\quad\text{при}\quad(x,t)\in\partial Q=\left\{(x,t):\ x^2+t^2=1\right\}?\tag{0.4}$$

Задача 7. Пусть $u(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)\cap\mathbb{C}(\overline{D})$ является решением уравнения

$$u_t=\Delta u+f(x),\quad f(x)\geqslant 0\quad\text{при}\quad(x,t)\in D,\tag{0.5}$$

$$u(x,t)=0\quad\text{при}\quad(x,t)\in\partial^{'}D.\tag{0.6}$$

Доказите, что $u_t(x,t)\geqslant 0$ в D.

§ 1. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое ограниченное множество. Тогда положим

$$D := U \otimes (0, T), \quad \partial^{'} D := B \cup S, \quad S := \partial U \otimes [0, T],$$

$$B_T := U \otimes \{t = T\}, \quad B := U \otimes \{t = 0\}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию. От-

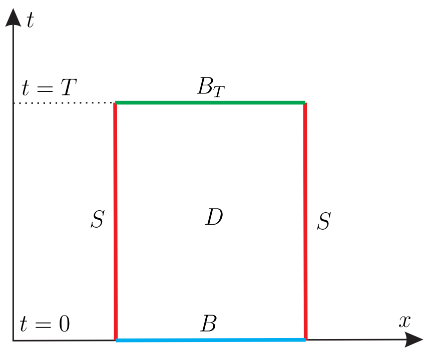

Рис. 1. Область D и множества S, B и B_T.

крытое множество $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ называется *верхней крышкой*, открытое множество $B \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ называется *нижней крышкой*, замкнутое в $\mathbb{R}^{N+1}$ множество S называется *боковой границей* цилиндрической области D. Полная граница ∂D открытого множества D имеет вид

$$\partial D = S \cup B \cup B_T,$$

но в дальнейшем (в принципе максимума) важную роль играет только часть $\partial^{'} D$ полной границы ∂D, имеющая вид

$$\partial^{'} D \stackrel{\text{def}}{=} S \cup B,$$

называемая *параболической границей*. Кроме того, важной является часть параболической границы

$$\partial^{''} D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup (S \backslash \partial B_T) = B \cup (\partial U \otimes [0, T)) \, ,$$

где $\partial B_T = \partial U \otimes \{t = T\}$ — это граница верхней крышки $B_T = U \otimes \{t = = T\} \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$.

Справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *— решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{1.1}$$

тогда

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t), \tag{1.2}$$

$$\min_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t). \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Прежде всего докажем, что *если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *такое решение уравнения теплопроводности, что*

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D, \tag{1.4}$$

то отсюда следует, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D. \tag{1.5}$$

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{1.6}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение [1]). Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to \overline{B}_T = \{x \in \overline{U},\ t = T\}.$$

Поэтому z_γ не может принадлежать замыканию верхней крышке $\overline{B}_T$, т. е.

$$z_\gamma \in D \cup \partial'' D.$$

Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае имеем

$$\Delta v(z_\gamma) \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка выражений:

[1]) Если максимальное значение неположительное, то в силу произвольности $\gamma > 0$ мы предельным переходом $\gamma \to +0$ для каждого фиксированного $(x,t) \in D$ приходим к утверждению теоремы.

$$0 = \Delta u(x,t) - u_t = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \quad \boxtimes$$

Значит, $z_\gamma \in \partial'' D$, но тогда в силу (1.4) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Снова противоречие.

Шаг 2. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Шаг 3. Теперь докажем равенство (1.2). Действительно, пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t), \quad v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M.$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет тоже уравнению теплопроводности

$$\Delta v - v_t = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Следовательно, по доказанному имеем

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = M = \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t).$$

Шаг 4. Теперь докажем равенство (1.3). Определим следующую величину:

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t).$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - m \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Итак, функция $-v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(-v(x,t)) - (-v(x,t))_t = 0 \quad \text{в} \quad D,$$
$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Следовательно, по–доказанному имеем

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Итак,

$$u(x,t) \geqslant m \quad \text{в} \quad D \Rightarrow \min_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = m = \min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что решение $u(x,t) \neq const$ уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

может достигать глобального минимального и глобального максимального значений на $\overline{D}$ во внутренних точках области D. Действительно, рассмотрим следующий пример:

П р и м е р. [9] Рассмотрим область $D = \{|x| < 1\} \otimes (0,T)$, в которой рассматривается уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{1.7}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$, $x_0 = 2$ и введем следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes [0,t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t;x_0,t_0), & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes (t_0,T], \end{cases} \tag{1.8}$$

где

$$\mathcal{E}(x,t;x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left(-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right), \quad x_0 = 2.$$

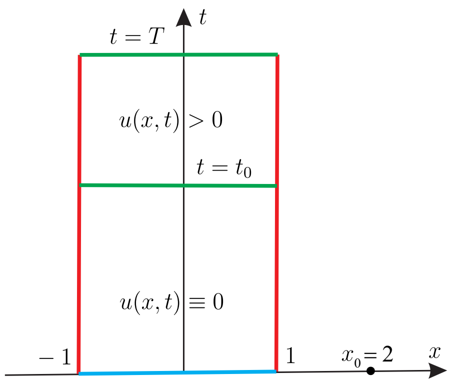

Рис. 2. К примеру.

Ясно, что такая функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (1.8), поскольку сшивка при $t = t_0$ является бесконечное число раз гладкой, так как $x_0 = 2 \notin \{|x| < 1\}$. Минимальным значением функции $u(x,t)$ является 0 и это минимальное значение достигается внутри области D. Заметим, однако, что тем не менее при $t \leqslant t_0$ функция $u(x,t) = 0$. И этот результат может быть получен в общем виде и носит название *сильного принципа максимума*.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что этот пример не означает, что нарушена единственность.

З а м е ч а н и е 6. Заметим, что в случае *эллиптического* оператора минимальное и максимальное значения решение $u(x) \not\equiv const$ уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D$$

не может достигаться внутри области D. В этом серьезное отличие эллиптического случая от параболического.

З а м е ч а н и е 7. Заметим, что мы доказали следующее первое утверждение: *Если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{1.9}$$

$$u \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial^{'} D, \tag{1.10}$$

то $u \leqslant 0$ в D. Применением этого утверждения к функции $-u(x,t)$, получим также следующее второе утверждение: *Если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap$ $\cap\, \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{1.11}$$

$$u \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial^{'} D, \tag{1.12}$$

то $u \geqslant 0$ в D.

П р и н ц и п м а к с и м у м а м о д у л я. Докажем следующее важное утверждение:

Л е м м а 1. *Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{в} \quad D.$$

Тогда справедливо равенство

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| = \max_{(x,t)\in\partial' D} |u(x,t)|. \tag{1.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Обозначим

$$M := \max_{(x,t)\in\partial' D} |u(x,t)|.$$

Сначала рассмотрим функцию

$$v(x,t) := u(x,t) + M, \quad v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D,$$

но тогда в силу замечания 4 имеем

$$v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \geqslant -M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w(x,t) := -u(x,t) + M, \quad w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D.$$

Опять в силу замечания 4 имеем

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

Следовательно,

$$-M \leqslant u(x,t) \leqslant M \Leftrightarrow |u(x,t)| \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

Лемма доказана.

Прежде, чем рассматривать ниже следующие задачи на применение принципа максимума, мы предлагаем следующий рисунок цилиндрической области $D = (a,b) \otimes (0,t_0)$, в котором

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x = a\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cup \{x = b\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = t_0\},$$

причем $\partial D = S \cup B \cup B_{t_0}$, а *нормальная граница* или *параболическая граница* $\partial' D = S \cup B$. Напомним, что область $B \subset \mathbb{R}^1 \otimes \{t = 0\}$ называется *нижней крышкой*, область $B_{t_0} \subset \mathbb{R}^1 \otimes \{t = t_0\}$ называется *верхней крышкой*, а множество S называется *боковой границей*. Множества S, B и B_{t_0} попарно непересекаются.

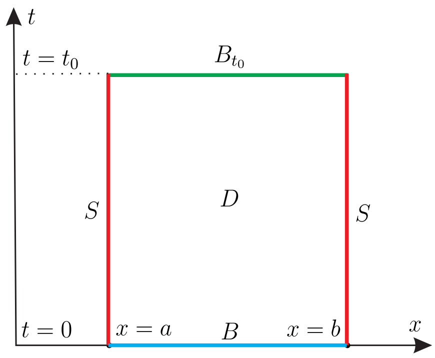

Рис. 3. К задачам.

Замечание 8. Заметим, что множество S является замкнутым и не связным в $\mathbb{R}^2$.

§ 2. Примеры решения задач

Задача 1. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \otimes [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

причем выполнены условия согласования $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Решение. Итак, предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0,1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geqslant 0$ и решение $u(x,t) \not\equiv 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$f^{'}(t_0) = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_t(x,t_0)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_{xx}(x,t_0)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство

$$-\int\limits_0^1 (u_x(x,t_0))^2\,dx = 0 \Rightarrow u_x(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t_0) = const \quad \forall x \in [0,1],$$

из которого опять в силу граничных условий получим $u(x,t_0) = 0$, что в свою очередь означает

$$f(t_0) = \int\limits_0^1 u^2(x,t_0)\,dx = 0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0 \in (0,1)$. Заметим, кроме того, что

$$f^{'}(t) = -2\int\limits_0^1 (u_x(x,t))^2\ dx \leqslant 0,$$

поэтому функция $f(t)$ является убывающей на временном отрезке $[0,1]$.

Задача 2. [2] Пусть $u(x,t)$ — это регулярное решение в $D = (0,\pi) \otimes (0,+\infty)$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2.1}$$

где $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Проверить, что

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{2.2}$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{2.3}$$

Решение. Для того чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нам нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x,t)$ четным образом через точку $x = \pi$ на множество $x \in (\pi, 2\pi)$, т. е. положим

$$\widetilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad x \in [0,\pi]; \\ u(2\pi - x, t), & \text{если} \quad x \in [\pi, 2\pi]; \end{cases} \Rightarrow \widetilde{u}_x(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0.$$

Кроме того,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если} \quad x \in [0,\pi]; \\ \varphi(2\pi - x), & \text{если} \quad x \in [\pi, 2\pi]; \end{cases} \Rightarrow \widetilde{\varphi}_x(\pi) = \varphi_x(\pi) = 0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи

$$\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \tag{2.4}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \widetilde{u}|_{x=2\pi} = 0, \quad \widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \tag{2.5}$$

где функция $\widetilde{\varphi}(x)$ является чётным продолжением на интервал $(\pi, 2\pi)$ функции $\varphi(x)$ и это продолжение возможно в силу условий $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Задачи (2.1) и (2.4), (2.5) эквивалентны. Теперь мы можем применить принцип максимума модуля леммы 1 и получить, что максимум модуля функции $\widetilde{u}(x,t)$ достигается при $t = 0$, поскольку на боковой границе при $x = 0$ и $x = 2\pi$ $\widetilde{u}(x,t) = 0$. Итак,

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{u}(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{\varphi}(x)| = \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|. \tag{2.6}$$

Тем самым утверждение (2.2) доказано.

Неравенство (2.3) неверно. Действительно, возьмем

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которому соответствует решение [1])

$$u(x,t) = e^{-t/4} \sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = e^{-1/4}, \quad \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)| = 1.$$

[1]) Полученное методом разделенных переменных.

Заметим, что
$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$
поскольку $e < 2^4$.

Задача 3. [2] Пусть $D = (0,1) \otimes (0,1)$. Существует ли функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в} \quad D, \tag{2.7}$$

$$u|_{t=0} = 2\sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{2.8}$$

$$u|_{x=0} = \sin \pi t, \quad u|_{x=1} = \sin \pi t + 2\sin \pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \tag{2.9}$$

$$u|_{t=1} = 3\sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1? \tag{2.10}$$

Решение. Эта задача для самостоятельного решения.

Задача 4. [2] Существует ли решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad Q = \Big\{(x,t): \ x^2 + t^2 < 1\Big\}, \tag{2.11}$$

$$xu_x(x,t) = tu(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial Q = \Big\{(x,t): \ x^2 + t^2 = 1\Big\}? \tag{2.12}$$

Решение. Используя формулу Грина в $\mathbb{R}^2$, получим равенства

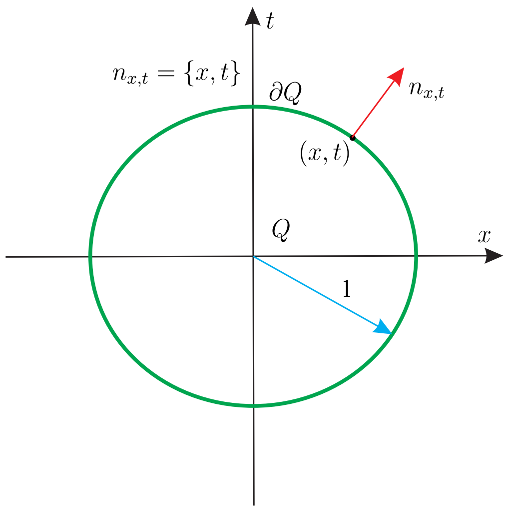

Рис. 4. К задаче 4.

$$\int\limits_Q u_t \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u(x,t) \cos(n_{x,t}, e_t) \, dl, \tag{2.13}$$

$$\int\limits_Q u_{xx}\,dx\,dt = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t)\cos(n_{x,t},e_x)\,dl, \tag{2.14}$$

где $n_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x,t)\in\partial Q$. Легко проверить, что

$$n_{x,t} = (x,t), \quad \cos(n_{x,t},e_t) = t, \quad \cos(n_{x,t},e_x) = x.$$

Поэтому интегрируя обе части уравнения (2.11), мы получим равенство

$$\int\limits_{\partial Q} u(x,t)t\,dl = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t)x\,dl + 2\pi,$$

а с учетом граничного условия (2.12) мы получим противоречивое равенство

$$0 = 2\pi.$$

Задача 5. [2] Пусть функции $u_k(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k)\cap\mathbb{C}(\overline{D}_k)$, $k = 1,2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-k,k)\otimes(0,T)$$

краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x|\leqslant k. \tag{2.15}$$

Здесь $\varphi(x)\in\mathbb{C}^{(1)}([-2,2])$, $\varphi(x)\geqslant 0$ при $|x|\leqslant 1$ и $\varphi(x)=0$ при $1\leqslant|x|\leqslant 2$, $\varphi(x)\not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x,t)\leqslant u_2(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t)\in[-1,1]\otimes(0,T]. \tag{2.16}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума $u_k(x,t)\geqslant 0$ в D_k. Рассмотрим разность

$$v(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{2.17}$$

В силу принципа максимума имеем $v(x,t)\geqslant 0$ в D, т. е. выполнено неравенство (2.16).

Задача 6*. [1] [2] Функция $u(x,t)\not\equiv const$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}$$

в области $D\equiv\{(x,t):\ 0<t<T,\ 0<x\leq 5-\exp(-t)\}$. Доказать, что глобальный максимум этой функции на $\overline{D}$ не может достигаться ни во внутренних точках области D, ни при $t=T$.

[1] Эта задача повышенной сложности.

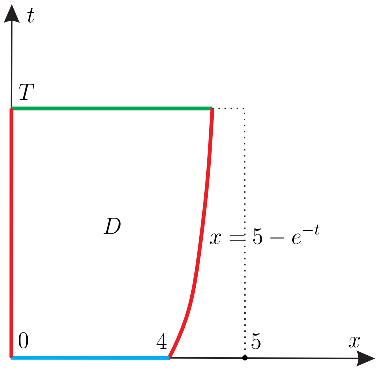

Рис. 5. К задаче 6.

Указание. Проследите доказательство теоремы 1. Можно и в данном случае не цилиндрической области доказать принцип максимума рассматривая функцию

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}.$$

Решение. Эта задача для самостоятельной работы.

Задача 7. [2], [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{2.18}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D. \tag{2.19}$$

Докажите, что $u_t(x,t) \geqslant 0$ в D.

Решение. Итак, в области D выполнено неравенство

$$\Delta u - u_t \leqslant 0,$$

тогда с учетом второго утверждения в замечании 7 и равенства (2.19) получим, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{2.20}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t+\varepsilon) - u(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{2.21}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = \Delta w \quad \text{в} \quad D_\varepsilon = U \otimes (0, T - \varepsilon), \tag{2.22}$$

причем

$$w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D_\varepsilon, \tag{2.23}$$

где
$$\partial' D_\varepsilon := (U \otimes \{t=0\}) \cup (\partial U \otimes [0, T-\varepsilon]),$$
поскольку
$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial' D \supset \partial' D_\varepsilon.$$
Применяя теперь второе утверждение из замечания 7, получим

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow \frac{u(x,t+\varepsilon)-u(x,t)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x,t+\varepsilon)-u(x,t)}{\varepsilon} = u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \qquad (2.24)$$

З а д а ч а 8. А н а л о г н е р а в е н с т в а Ч е б ы ш е в а. [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением дифференциального неравенства
$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T). \qquad (2.25)$$
Предположим, что
$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes [0,T], \qquad (2.26)$$
$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B} = \overline{\Omega} \otimes \{t=0\}. \qquad (2.27)$$
Пусть $v(x) \geqslant 0$ — это гладкая функция в $\overline{\Omega}$ такая, что
$$\Delta v(x) \leqslant -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \qquad (2.28)$$
Доказать, что
$$u(x,t) \leqslant \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \qquad (2.29)$$

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем [1])
$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \qquad (2.30)$$
Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:
$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - \frac{v(x)}{t}. \qquad (2.31)$$
Прежде всего применим к этой функции оператор
$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$
и получим следующее выражение:

---
[1]) Нужно применить утверждение 1 замечания 7 к функции $u(x,t) - 1$.

$$\Delta w - w_t = \Delta u - u_t - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2}\left(t - v(x)\right). \quad (2.32)$$

Разобьем область D на три попарно непересекающиеся части

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$
$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D:\ v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D:\ v(x) < t\},$$
$$D_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D:\ v(x) = t\}.$$

На множестве D_1 выполнено неравенство

$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geqslant u(x,t) \Rightarrow w(x,t) \leqslant 0. \quad (2.33)$$

На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (2.32) выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant t \Rightarrow \Delta w - w_t \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \cup D_3. \quad (2.34)$$

Теперь заметим, что в силу определения (2.31) функции $w(x,t)$ и неравенств (2.26), (2.27) на параболической границе $\partial' D = S \cup \overline{B}$ области D выполнено неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \quad (2.35)$$

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial' D$ принадлежит D_3 и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_3. \quad (2.36)$$

Итак, в силу утверждения 1 из замечания 7 мы из неравенств (2.34), (2.35) и (2.36) получим неравенство

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2. \quad (2.37)$$

Следовательно, объединяя неравенства (2.33), (2.36) и (2.37), получим неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

З а д а ч а 9. [2] Справедлив ли принцип максимума в области $D = \Omega \otimes (0,T)$ для обратно параболического уравнения

$$u_t + \Delta u = 0 \quad (2.38)$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

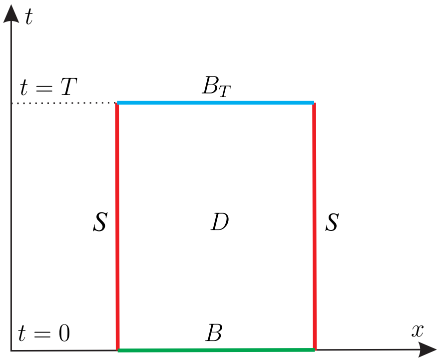

Рис. 6. К задаче 9.

Ответ. Нет.

Решение. Глобальный максимум и минимум функции $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ может достигаться при $(x,t) \in B_T \cup S$. Таким образом, в *принципе максимума* для уравнения (2.38) нужно заменить B на B_T.

Задача для самостоятельного решения 1. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и, кроме того, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Докажите, что имеют место неравенства

$$\min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t) - T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| \leqslant u(x,t) \leqslant \\ \leqslant \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t) + T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$v_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + tK, \quad v_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - tK,$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

Лекция 3

КЛАСС ЕДИНСТВЕННОСТИ А. Н. ТИХОНОВА

§ 0. План лекции

1. Теорема о слабом принципе максимума.
2. Следствие 1 о точной нижней грани.
3. Следствие 2.
4. Единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.
5. Неединственность решения.
6. Задача о гёльдеровости решения задачи Коши в классе Тихонова.

§ 1. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Сейчас мы рассмотрим важный *слабый принцип максимума* для решений задачи Коши для уравнения теплопроводности, который позволит доказать, как его следствие, единственность решения задачи Коши. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ — *это решение задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N), \tag{1.2}$$

удовлетворяющее условию роста

$$u(x,t) \leqslant M e^{\beta|x|^2} \quad \text{\textit{при}} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ — *это константы. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x). \tag{1.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего допустим, что

$$4\beta T < 1 \Rightarrow 4\beta(T+\varepsilon) < 1 \tag{1.5}$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. Фиксируем $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ и определим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \tag{1.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Прямым вычислением можно показать [1], что

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{1.7}$$

Шаг 2. Фиксируем $r > 0$ и положим

$$U \stackrel{\text{def}}{=} O(y,r), \quad D = U \otimes (0,T), \quad O(y,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x-y| < r\right\}.$$

В силу теоремы 1 о принципе максимума в ограниченных областях $D = U \otimes (0,T)$ предыдущей лекции имеем

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} v(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D} v(x,t). \tag{1.8}$$

[1] Поскольку $t \in [0,T]$, а $\varepsilon > 0$, то сингулярности как у фундаментального решения, так и у функции $v(x,t)$ на сегменте $[0,T]$ нет.

Шаг 3. Если $x \in \mathbb{R}^N$ и $t = 0$ то

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right) \leqslant u(x,0) = u_0(x). \quad (1.9)$$

Если $(x,t) \in S$, т. е. $|x-y| = r$ и $t \in [0,T]$, то

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| = r + |y|$$

и имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta|x|^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right). \quad (1.10) \end{aligned}$$

В силу неравенства (1.5) при некотором $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = \beta + \gamma.$$

Пусть

$$c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \in (-\infty, +\infty). \quad (1.11)$$

Продолжим оценивать правую часть неравенства (1.10) при $(x,t) \in S$ и получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} v(x,t) \leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \to -\infty \quad (1.12) \end{aligned}$$

при $r \to +\infty$. Следовательно, при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство

$$M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \leqslant c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Итак, при некотором таком $r > 0$ будем иметь

$$v(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x). \quad (1.13)$$

Шаг 4. Итак, в силу (1.9), (1.13) и (1.8) имеем

$$v(y,t) \leqslant \sup_{(x,t) \in D} v(x,t) = \sup_{(x,t) \in \partial' D} v(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0, T]$, где согласно определению (1.6)

$$v(y,t) = u(y,t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{N/2}}.$$

Переходя к пределу при $\mu \to +0$ для фиксированного $(y,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T - \varepsilon)$ при фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ мы получим утверждение теоремы.

Шаг 5. Если условие (1.5) не выполняется, тогда нужно применить схему доказательства на временных интервалах

$$[0, T_1], \quad [T_1, 2T_1], ..., [(n-1)T_1, nT_1], ...,$$

при $T_1 = 1/(8\beta)$. Тогда на первом шаге получим следующее неравенство:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \quad \text{при} \quad t \in [0, T_1] \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, T_1) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x).$$

При этом на втором шаге начальным условием является функция $u(x, T_1)$. В результате на втором шаге получим неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, T_1) \quad \text{при} \quad t \in [T_1, 2T_1] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, 2T_1) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, T_1).$$

И мы в результате получим следующую цепочку неравенств:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \geqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, T_1) \geqslant \cdots \geqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, nT_1) \geqslant u(x,t)$$

при $t \in [nT_1, (n+1)T_1]$ и $x \in \mathbb{R}^N$.

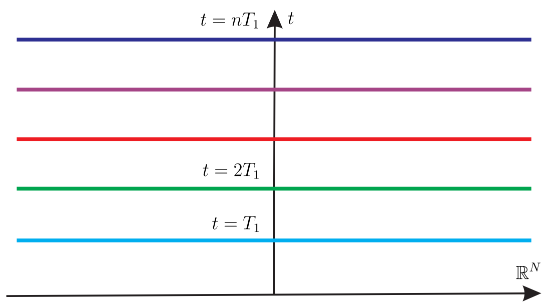

Рис. 7. К шагу 5.

Итак, приходим к выводу о том, что

$$u(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *При условиях теоремы и неравенства*

$$u(x,t) \geqslant -Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T]$$

выполнено следующее равенство:

$$\inf_{(x,t)\in\mathbb{R}^N} u(x,t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть вместо функции $u(x,t)$ функцию $-u(x,t)$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T]$$

при $M > 0$ *и* $\beta > 0$. *Если* $u(x,0) \leqslant 0$, *то* $u(x,t) \leqslant 0$ *для всех* $(x,t) \in \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$. *Если* $u(x,0) \geqslant 0$, *то* $u(x,t) \geqslant 0$ *для всех* $(x,t) \in \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы справедлива следующая цепочка неравенств:

$$u(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T].$$

Аналогично в силу следствия 1 приходим ко второму утверждению.

Следствие доказано.

§ 2. Единственность решения задачи Коши

Теперь мы можем доказать важный результат, доказанный А. Н. Тихоновым [11], о единственности решения задачи Коши при дополнительном условии, которое мы уже ввели, на рост решения при $|x| \to +\infty$, называемым условием А. Н. Тихонова. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$. *Тогда существует не более одного решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ *задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.2}$$

в классе А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ — *константы.*

Доказательство.

Пусть утверждение не выполнено и существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда рассмотрим функцию

$$w_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче Коши и условию

$$w_1(x,t) \leqslant 2M \exp\left(\beta|x|^2\right), \quad w_1(x,0) = 0,$$

причем константа M значения не имеет. Поэтому в силу теоремы 1 имеем

$$w_1(x,t) \leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t) = -w_1(x,t)$$

и точно также получим, что

$$w_2(x,t) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Теорема доказана.

Замечание о классе единственности А. Н. Тихонова. Отметим, что есть результаты, которые говорят о том, что существует бесконечно много решений однородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{2.4}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.5}$$

А. Н. Тихонов предложил пример к теореме единственности о том, что условие роста А. Н. Тихонова нельзя заменить на более слабое вида

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\,dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{2.7}$$

Будем искать решения задачи Коши (2.7) в классе

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\,dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{2.8}$$

В качестве решения возьмем ряд следующего вида:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m}. \tag{2.9}$$

Можно проверить, что формально ряд (2.9) является решением уравнения теплопроводности.

Известно, что для любого $\delta > 0$ существуют бесконечно дифференцируемые функции $f(t)$, тождественно не равные нулю, удовлетворяющие условиям

$$f(t) = 0, \quad \text{если} \quad t < 0 \quad \text{и} \quad t > 1, \quad \left| f^{(m)}(t) \right| \leqslant C^m m^{(1+\delta)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ряд (2.9) и его производные первого порядка по t и второго порядка по x сходится равномерно в любой ограниченной области переменных (x,t) при условии $\delta < 1$. При этом имеет место следующие неравенства:

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_2^m x^{2m}}{m^{2m-(1+\delta)m}} \leqslant C_3 \exp\left[C_4 |x|^{2/(1-\delta)} \right].$$

Каждое такое решение, за исключением $u(x,t) \equiv 0$, растет «очень быстро» при $|x| \to +\infty$.

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. [4] Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ удовлетворяет условию роста (1.3) и является решением задачи Коши

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad D = (0,T) \otimes \mathbb{R}^N, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant a|x-y|^\delta, \quad \delta \in (0,1]. \tag{3.2}$$

Тогда

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leqslant a|x-y|^\delta \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \tag{3.3}$$

Кроме того,

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leqslant b|t-s|^{\delta/2} \quad \text{при} \quad t,s \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего введём функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x+y,t) - u(x,t) \tag{3.5}$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$w_t = \Delta w, \quad w(x,0) = u_0(x+y) - u_0(x), \quad |w(x,0)| \leqslant a|y|^\delta.$$

Введём две функции

$$v_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам

$$v_{kt} = \Delta v_k, \quad k = 1,2,$$

$$v_1(x,0) \leqslant 0, \quad v_2(x,0) \geqslant 0.$$

Применяя слабый принцип максимума (следствие 2), мы получим, что

$$v_1(x,t) \leqslant 0, \quad v_2(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Следовательно,

$$|w(x,t)| \leqslant a|y|^\delta. \tag{3.6}$$

Шаг 2. Теперь мы можем доказать неравенство (3.4). Действительно, введём следующую функцию:

$$w(x,t;y,s) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t+s) - u(y,s). \tag{3.7}$$

При $t = 0$ по–доказанному имеем

$$|w(x,0;y,s)| = |u(x,s) - u(y,s)| \leqslant a|x-y|^\delta. \tag{3.8}$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \frac{1}{q_1} a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2} a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a_1, a_2 \geqslant 0$$

вытекает арифметическое трёхпараметрическое неравенство Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon) a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) := \frac{1}{q_2 (q_1 \varepsilon)^{q_2/q_1}}. \tag{3.9}$$

Применяя неравенство (3.9) при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2-\delta},$$

мы получим следующее неравенство:

$$a|x-y|^\delta \leqslant \varepsilon|x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0,1). \tag{3.10}$$

Используя это неравенство из (3.8), мы получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon|x-y|^2 - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,s) - u(y,s) \leqslant \varepsilon|x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \qquad (3.11)$$

причём выполнено двустороннее неравенство

$$-\varepsilon v(x,0;y) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,0;y,s) \leqslant \varepsilon v(x,0;y) + \mu(\varepsilon), \qquad (3.12)$$

где функция

$$v(x,t;y) := |x-y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности.

□ Действительно, имеем

$$v_t - \Delta_x v = 2N - \Delta_x|x-y|^2 = 2N - 2N = 0. \quad \boxtimes$$

Поэтому в силу принципа максимума [1)] получим, что имеет место неравенство

$$-\varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,t;y,s) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \qquad (3.13)$$

Шаг 3. Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим неравенства

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,t+s) - u(x,s) \leqslant \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \qquad (3.14)$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \qquad (3.15)$$

в котором мы положим

$$1 - \alpha = \alpha\frac{\delta}{2-\delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2-\delta}{2}.$$

В результате выражение (3.15) примет следующий вид:

$$(2N + c_1)t^{\delta/2}. \qquad (3.16)$$

Итак, неравенства (3.14) примут следующий вид:

$$|u(x,t+s) - u(x,s)| \leqslant bt^{\delta/2}, \quad b = 2N + c_1. \qquad (3.17)$$

[1)] Нужно опять рассмотреть две функции: $w_1 = w - \varepsilon v - \mu(\varepsilon)$ и $w_2 = w + \varepsilon v + \mu(\varepsilon)$, и воспользоваться следствием 2.

Замечание 9. Комбинируя неравенства (3.3) и (3.4) мы приходим к следующему неравенству:

$$|u(x,t) - u(y,s)| \leqslant c_2 \left(|x-y|^{\delta} + |t-s|^{\delta/2}\right). \tag{3.18}$$

И это итоговое неравенство является следствием лишь условия (3.2) на начальную функцию $u_0(x)$ и принципа максимума!

Задача 2. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \otimes (0,T)) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1 \otimes [0,T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \otimes (0,T), \tag{3.19}$$

причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,T). \tag{3.20}$$

Доказать, что $u(x,t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \otimes (0,T)$.

Решение. Это задача для самостоятельного решения.

Тематическая лекция II

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ТЕПЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Лекция 4

ФОРМУЛЫ ГРИНА

В этой лекции мы выведем важные формулы Грина, которые также называют второй и третьей формулами Грина. С учётом вида третьей формулы Грина мы введём объёмный тепловой потенциал, а также тепловые потенциалы простого и двойного слоя.

§ 1. Вторая формула Грина

Введём следующие обозначения:

$$L_{x,t}u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u, \quad L^*_{x,t}v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta_x v.$$

Оператор $L_{x,t}$ — это уже рассмотренный нами оператор теплопроводности, а оператор $L^*_{x,t}$ — это формально сопряжённый к оператору теплопроводности $L_{x,t}$. Кроме того, пусть

$$D_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t): \ x \in \Omega, \ 0 < t < T\} \subset \mathbb{R}^{N+1}_{x,t}, \quad x = (x_1, \ldots, x_N),$$

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N$$

— это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$,

$$S_T \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega \times [0,T],$$

$$B_T \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t = T\}, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t): \ x \in \Omega, \ t = 0\}.$$

Для вывода первой формулы Грина возьмём две произвольные функции

$$u(x,t), \ v(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_T).$$

Справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) &= v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} - v(\xi,\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau}(v(\xi,\tau)u(\xi,\tau)) - u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial \tau} - \\ &\quad - \operatorname{div}_\xi(v(\xi,\tau)\nabla_\xi u(\xi,\tau)) + (\nabla_\xi v(\xi,\tau), \nabla_\xi u(\xi,\tau)). \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части этого равенства по $(\xi,\tau)\in D_T$. Тогда получим равенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{D_T} v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau &= \\ =\int\limits_{D_T}\left((\nabla_\xi v(\xi,\tau),\nabla_\xi u(\xi,\tau)) - u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial\tau}\right)d\xi\,d\tau&- \\ -\int\limits_{S_T} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\,ds_\xi\,d\tau+\int\limits_{B_T} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi&- \\ -\int\limits_{B} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi&, \quad (1.1)\end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой

$$\int\limits_{D_T}\mathrm{div}_\xi(v(\xi,\tau)\nabla_\xi u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau=\int\limits_{S_T} v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\,ds_\xi\,d\tau,$$

где $n_{\xi,\tau}=(n_{\xi_1},\ldots,n_{\xi_N},0)$ — это вектор внешней нормали к боковой границе S_T цилиндра D_T, ds_ξ — это элемент площади поверхности $\partial\Omega$ в точке $\xi\in\partial\Omega$. Заметим, что

$$\int\limits_{B_T} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi=\int\limits_{\Omega} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi,$$

$$\int\limits_{B} v(\xi,t)u(\xi,t)\,d\xi=\int\limits_{\Omega} v(\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi.$$

Кроме того, справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned}-\int\limits_{D_T} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau &= \\ =\int\limits_{D_T}(\nabla_\xi u(\xi,\tau),\nabla_\xi v(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau&-\int\limits_{S_T} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\,ds_\xi\,d\tau.\end{aligned}$$

Откуда вытекает

$$\int\limits_{D_T}(\nabla_\xi u(\xi,\tau),\nabla_\xi v(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau=$$

$$= -\int\limits_{D_T} u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int\limits_{S_T} u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\,ds_\xi\,d\tau. \quad (1.2)$$

Подставим выражение (1.2) в равенство (1.1) и получим формулу

$$\int\limits_{D_T} v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= -\int\limits_{D_T}\left(u(\xi,\tau)\Delta_\xi v(\xi,\tau) + u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial\tau}\right)d\xi\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{S_T}\left(u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} - v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right)ds_\xi\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi - \int\limits_{\Omega} v(\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi. \quad (1.3)$$

С учётом наших обозначений мы приходим ко второй формуле Грина

$$\int\limits_{D_T}\left(v(\xi,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)L^*_{\xi,\tau}v(\xi,\tau)\right)d\xi\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{S_T}\left(u(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} - v(\xi,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right)ds_\xi\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} v(\xi,T)u(\xi,T)\,d\xi - \int\limits_{\Omega} v(\xi,0)u(\xi,0)\,d\xi. \quad (1.4)$$

§ 2. Третья формула Грина

Введём следующую функцию

$$f(x,t) := L_{x,t}u(x,t), \quad (x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T). \quad (2.1)$$

В классе функций $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_T)$ функция $f(x,t) \in \mathbb{C}_b(D_T)$. [1)]

Пусть точка $(x,t) \in D_T$. Заметим, что следующая функция

$$v(x,\xi,t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{\left(4\pi(t-\tau)\right)^{N/2}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)$$

удовлетворяет следующим свойствам:

$$L_{x,t}v(x,\xi,t,\tau) = 0, \quad L^*_{\xi,\tau}v(x,\xi,t,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad t \neq \tau.$$

[1)] т. е. непрерывная и ограниченная в D_T функция.

Применим теперь вторую формулу Грина в цилиндре $D_{t-\varepsilon} = \Omega \times (0, t - \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < t$ и к функциям $u(x,t)$, $v(x,\xi,t,\tau)$. В результате получим равенство

$$\int\limits_{D_{t-\varepsilon}} \bigl(v(x,\xi,t,\tau)L_{\xi,\tau}u(\xi,\tau) - u(\xi,\tau)L^*_{\xi,\tau}v(x,\xi,t,\tau)\bigr)\,d\xi\,d\tau = \\ = \int\limits_{S_{t-\varepsilon}} \left(u(\xi,\tau)\frac{\partial v(x,\xi,t,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} - v(x,\xi,t,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right) ds_\xi\,d\tau + \\ + \int\limits_{\Omega} v(x,\xi,t,t-\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi - \int\limits_{\Omega} v(x,\xi,t,0)u(\xi,0)\,d\xi, \quad (2.2)$$

где напомним $S_{t-\varepsilon} = \partial\Omega \times [0, t-\varepsilon]$. Заметим, что

$$L^*_{\xi,\tau}v(\xi,\tau) = 0 \quad \text{в} \quad (\xi,\tau) \in D_{t-\varepsilon}.$$

Точно также как в первой лекции можно доказать, что

$$\int\limits_{\Omega} v(x,\xi,t,t-\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi \to u(x,t)$$

при $\varepsilon \to +0$.

$\square$ Действительно, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_T) \subset \mathbb{C}(\overline{D_T})$. Пусть $x \in \Omega$, тогда найдётся такое $r > 0$, что $O(x,r) \subset \Omega$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi = \\ = \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi + \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)u(\xi,t-\varepsilon)\,d\xi = \\ = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon).$$

С одной стороны, при фиксированном $x \in \Omega$ интеграл $I_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Это следствие того, что при $|x-\xi| \geqslant r > 0$ имеем

$$\mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{N/2}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4\varepsilon}\right) \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0$$

и в данном случае можно воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе к пределу под знаком интеграла Лебега. С другой стороны, имеем

$$I_1(\varepsilon) = \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)[u(\xi,t-\varepsilon) - u(x,t-\varepsilon)\, d\xi + \\ + u(x,t-\varepsilon) \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)\, d\xi = I_{11}(\varepsilon) + I_{12}(\varepsilon).$$

Для оценки интегралов нужно рассмотреть следующий интеграл:

$$J := \int\limits_{O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon)\, d\xi = \frac{\omega_N}{(4\pi\varepsilon)^{N/2}} \int\limits_0^r \rho^{N-1} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\varepsilon}\right) d\rho = \\ = \frac{2^N \omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_0^{r/(2\sqrt{\varepsilon})} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2)\, d\rho \to \\ \to \frac{2^N \omega_N}{(4\pi)^{N/2}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{N-1} \exp(-\rho^2)\, d\rho = 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Итак, для любого $\gamma > 0$ найдутся такие достаточно малые $\varepsilon > 0$ и $r > > 0$, имеют место следующие оценки:

$$|I_{11}| \leqslant \sup_{\xi \in O(x,r)} |u(\xi,t-\varepsilon) - u(x,t-\varepsilon)| < \frac{\gamma}{3};$$

$$|I_{12}(\varepsilon) - u(x,t)| < \frac{\gamma}{3}; \quad |I_2(\varepsilon)| < \frac{\gamma}{3}.$$

Стало быть,

$$\left| \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi,\varepsilon) u(\xi,t-\varepsilon)\, d\xi - u(x,t) \right| < \gamma. \quad \boxtimes$$

Таким образом, в пределе при $\varepsilon \to +0$ мы из (2.2) приходим к следующей <u>третьей формуле Грина</u>:

$$u(x,t) = \int\limits_{D_t} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \\ + \int\limits_{S_t} \left(\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) \frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - u(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \right) ds_\xi\, d\tau + \\ + \int\limits_\Omega u(\xi,0) \mathcal{E}(x-\xi,t)\, d\xi. \quad (2.3)$$

В этой формуле интеграл

$$\int\limits_{D_t} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

называется тепловым объёмным потенциалом, интегралы вида

$$\int\limits_{S_t} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \rho(\xi, \tau)\, ds_\xi\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \rho(\xi, \tau)\, ds_\xi\, d\tau,$$

$$\int\limits_{S_t} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_\xi} \rho(\xi, \tau)\, ds_\xi\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_\xi} \rho(\xi, \tau)\, ds_\xi\, d\tau$$

называются тепловыми потенциалами простого и двойного слоя соответственно.

Лекция 5

ОБЪЁМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В этой лекции мы изучим основные свойства объемного потенциала.

§ 1. Объёмный тепловой потенциал

Теперь мы изучим свойства объёмного потенциала ($N \geqslant 3$), который имеет следующий вид:

$$V(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{1.1}$$

Для фундаментального решения

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)$$

справедлива следующая оценка:

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) \leqslant c_1 \frac{\vartheta(t-\tau)}{|t-\tau|^\mu |x-\xi|^{N-2\mu}}, \quad \mu \in (0,1), \tag{1.2}$$

а $c_1 > 0$ — это некоторая постоянная.

$\square$ Действительно, имеет место следующее равенство:

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}} (t-\tau)^{-\mu} \left(|x-\xi|^2\right)^{\mu - \frac{N}{2}} \times \\ \times \left[\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]^{\frac{N}{2}-\mu} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Осталось заметить, что

$$y^\lambda \exp(-y^2) \leqslant c_2(\lambda) < +\infty \quad \text{для всех} \quad \lambda > 0, \quad y \geqslant 0. \quad \boxtimes$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 1. *Если* $f(x,t) \in L^\infty(D_T)$, *то объёмный потенциал* $V(x,t)$ *является непрерывной функцией в* D_T.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Сначала введём следующие обозначения:

$$O((x_0,t_0);\delta) := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |(x,t) - (x_0,t_0)| < \delta\right\}, \quad \delta > 0,$$

где

$$|(x,t) - (x_0,t_0)| := \Big(|x-x_0|^2 + |t-t_0|^2\Big)^{1/2};$$

$$\text{Ц}^r_{x_0,t_0} := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ x \in O(x_0,r), \ t \in O(t_0,r)\right\}, \quad r > 0,$$

где

$$O(x_0,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x-x_0| < r\right\}, \quad O(t_0,r) := \left\{t \in \mathbb{R}^1 : \ |t-t_0| < r\right\}.$$

Итак, пусть $(x_0,t_0) \in D_T$ — это произвольная точка. Тогда найдётся такое число $r > 0$, что $\text{Ц}^r_{x_0,t_0} \subset D_T$. Представим объёмный потенциал $V(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t), \tag{1.3}$$

$$V_1(x,t) = \int\limits_{\text{Ц}^r_{x_0,t_0}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{1.4}$$

$$V_2(x,t) = \int\limits_{D_T \setminus \text{Ц}^r_{x_0,t_0}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{1.5}$$

Рассмотрим сначала выражение для $V_1(x_0,t_0)$. Для этой величины справедлива цепочка выражений:

$$|V_1(x_0,t_0)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\text{Ц}^r_{x_0,t_0}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\, d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \int\limits_{t_0-r}^{t_0+r} \int\limits_{O(x_0,r)} \frac{\vartheta(t_0-r)}{(t_0-\tau)^\mu |x_0-\xi|^{N-2\mu}}\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \omega_N \int\limits_{t_0-r}^{t_0} \frac{d\tau}{|t_0-\tau|^\mu} \int\limits_0^r \frac{d\rho}{\rho^{1-2\mu}} =$$

$$= \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1 \omega_N \frac{r^{1+\mu}}{2\mu(1-\mu)} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.6}$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $r > 0$. Предположим, что $(x,t) \in Ц^{r/2}_{x_0,t_0}$, тогда справедливы следующие оценки сверху:

$$|x-\xi| \leqslant |x-x_0| + |x_0-\xi| \leqslant \frac{3}{2}r, \quad |t-\tau| \leqslant |t-t_0| + |t_0-\tau| \leqslant \frac{3}{2}r$$

для всех $(\xi,\tau) \in Ц^r_{x_0,t_0}$. Поэтому для всех $(x,t) \in Ц^r_{x_0,t_0}$ имеет место вложение $Ц^r_{x_0,t_0} \subset Ц^{3r/2}_{x,t}$ и справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}|V_1(x,t)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{Ц^r_{x_0,t_0}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{Ц^{3r/2}_{x,t}} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,d\xi\,d\tau \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} c_1\omega_N \frac{(3r/2)^{1+\mu}}{2\mu(1-\mu)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (1.7)\end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малом $r > 0$. Заметим, что у подынтегральной функции в выражении для $V_2(x_0,t_0)$ нет особенности. Кроме того, в выражении для $V_2(x,t)$ тоже нет особенности, если потребовать, чтобы $(x,t) \in Ц^{r/2}_{x_0,t_0}$.

$\square$ Действительно, имеют место следующие неравенства при $(\xi,\tau) \in \in D_T \backslash Ц^r_{x_0,t_0}$ и при $(x,t) \in Ц^{r/2}_{x_0,t_0}$:

$$|x-\xi| \geqslant |\xi-x_0| - |x-x_0| \geqslant r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0,$$

$$|t-\tau| \geqslant |\tau-t_0| - |t-t_0| \geqslant r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0. \quad \boxtimes$$

Из явного вида подынтегральной функции вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое достаточно малое $\delta(r,\varepsilon) > 0$, что

$$|V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in O((x_0,t_0);\delta). \qquad (1.8)$$

Итак, из выражений (1.3)–(1.8) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое малое $r > 0$ и такое малое $\delta = \delta(r,\varepsilon) > 0$, что имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}|V(x,t) - V(x_0,t_0)| \leqslant \\ \leqslant |V_2(x,t) - V_2(x_0,t_0)| + |V_1(x,t)| + |V_1(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

для всех $(x,t) \in O((x_0,t_0);\delta)$.

Л е м м а д о к а з а н а.

Для доказательства следующего результата нам нужно доказать справедливость следующей оценки для производной фундаментального решения:

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_2\frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N+1-2\mu}} \quad \text{при} \quad \mu\in\left(\frac{1}{2},1\right). \tag{1.9}$$

□ Действительно, имеем

$$\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i} = -\frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi)^{N/2}}\frac{1}{(t-\tau)^{N/2}}\frac{x_i-\xi_i}{2(t-\tau)}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right);$$

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\vartheta(t-\tau)}{2(4\pi)^{N/2}}(t-\tau)^{-\mu}\left(|x-\xi|^2\right)^{\mu-(N+1)/2}\left[\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]^{(N+1)/2-\mu}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \leqslant c_2\frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{N+1-2\mu}}.$$

Осталось потребовать интегрируемость этой оценки в области $\Omega\subset\mathbb{R}^N$:

$$N+1-2\mu-N+1\in(0,1)\Rightarrow\mu\in\left(\frac{1}{2},1\right). \quad \boxtimes$$

Справедливо следующее утверждение:
Лемма 2. *Если $f(x,t)\in\mathbb{C}(D_T)\cap L^{\infty}(D_T)$, то объёмный потенциал $V(x,t)$ имеет непрерывные первые производные по $x\in\Omega$ для всех $t\in(0,T]$ и справедливо следующее равенство*:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \tag{1.10}$$

для всех $i\in\overline{1,N}$.

Доказательство.

Шаг 1. В силу оценки (1.9) точно также как и при доказательстве леммы 1 можно доказать, что правая часть равенства (1.10) является непрерывной функцией в D_T.

Шаг 2. Докажем, что справедливо само равенство (1.10). Пусть

$$J(x,t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega}\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{1.11}$$

Тогда
$$V(x,t) = \int\limits_0^t J(x,t,\tau)\,d\tau.$$
Если мы доопределим функцию $J(x,t,\tau)$ при $\tau = t$ следующим образом:
$$J(x,t,t) := f(x,t),$$
то, поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}(D_T)$, можно доказать, что функция $J(x,t,\tau)$ является непрерывной при $x \in \Omega$ и $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$.

Шаг 3. При $t > \tau$ имеем
$$\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i} = \int\limits_\Omega \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i} f(\xi,\tau)\,d\xi.$$
В силу оценки (1.9) справедлива следующая цепочка неравенств:
$$\left|\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_3 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu} \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu}}\,d\xi \leqslant$$
$$\leqslant c_4 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu} \quad \text{для всех} \quad \mu \in (1/2, 1). \qquad (1.12)$$
Из этой оценки следует, что интеграл
$$\overline{V}_i(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\,d\tau \qquad (1.13)$$
абсолютно и равномерно сходится.

Шаг 4. Положим
$$I_h(x,t) := \frac{V(x^h,t) - V(x,t)}{h} - \overline{V}_i(x,t),$$
$$x^h := (x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_N) \in \Omega, \quad x \in \Omega.$$
Справедливо следующие равенства:
$$I_h(x,t) = \int\limits_0^t \left[\frac{J(x^h,t,\tau) - J(x,t,\tau)}{h} - \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau =$$
$$= \int\limits_0^t \left[\frac{\partial J(x^*,t,\tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau, \qquad (1.14)$$

где $x^* \in [x^h, x]$ — это отрезок прямой, соединяющий точки x^h и x.

С одной стороны, lля любого $\varepsilon > 0$ в силу оценки (1.12) найдётся такое $t_\varepsilon \in (0, t)$, что будут иметь место следующие оценки:

$$\left|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial J(x^*,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.15}$$

С другой стороны, при этом фиксированном $t_\varepsilon \in (0, t)$ рассмотрим следующее выражение:

$$\int\limits_{0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial J(x^*,t,\tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau, \tag{1.16}$$

в котором $\tau \in (), t_\varepsilon)$ и $t_\varepsilon < t$, и поэтому в подынтегральном выражении нет особенности. Следовательно, при фиксированном $t_\varepsilon \in (0, t)$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_\varepsilon) > 0$, что

$$\left|\int\limits_{0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial J(x^*,t,\tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.17}$$

для всех $|h| < \delta$. Итак, в силу (1.14)–(1.17) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $t_\varepsilon \in (0, t)$ и $\delta = \delta(t_\varepsilon, \varepsilon) > 0$, что имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{gathered} |I_h(x,t)| < \left|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau\right| + \left|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial J(x^*,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau\right| + \\ + \left|\int\limits_{0}^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial J(x^*,t,\tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\right] d\tau\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{gathered} \tag{1.18}$$

для всех $|h| < \delta$.

Шаг 5. Стало быть, имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_{0}^{t} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau \in \mathbb{C}(D_T).$$

Поэтому, с одной стороны, имеем для каждой фиксированной точки $(x,t) \in D_T$ имеем

$$\int\limits_{0}^{t-\gamma} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\, d\tau \to \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad \gamma \to +0.$$

С другой стороны, имеем

$$\int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\,d\tau = \int\limits_0^{t-\gamma}\int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \to$$
$$\to \int\limits_0^{t}\int\limits_\Omega \frac{\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \quad \text{при} \quad \gamma \to +0.$$

Последнее предельное равенство имеет место в силу оценки (1.9) и того, что $f(x,t) \in L^\infty(D_T)$. Итак, имеет место равенство (1.10).

Лемма доказана.

Докажем теперь следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть $f(x,t) \in \mathbb{C}(D_T) \cap L^\infty(D_T)$ и $f(x,t) \in \mathbb{C}_x^\beta(\overline{\Omega})$ равномерно по $t \in [0,T]$. Тогда объёмный потенциал $V(x,t)$ имеет непрерывные вторые производные по x и при $x \in \Omega$ и $t \in (0,T]$ справедливы следующие равенства*:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{1.19}$$

где в выражении рассматривается повторный несобственный интеграл, который понимается в следующем смысле:

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\,d\xi =$$
$$= \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{1.20}$$

Замечание 10. Точно также, как и ранее, можно получить следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant c_5 \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^\mu |x-\xi|^{N+2-2\mu}}. \tag{1.21}$$

Но эта оценка уже не гарантирует интегрируемость подынтегральной функции в выражении (1.19).

Доказательство.

Шаг 1. Согласно результату леммы 2 имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int\limits_0^t \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}\,d\tau,$$

где

$$J(x,t,\tau) = \int\limits_{\Omega} \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Пусть пока $y \in \Omega$ — это некоторая фиксированная точка. Справедливо следующее представление:

$$\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i} = f(y,\tau) \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\, d\xi + \\ + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i} \left[f(\xi,\tau) - f(y,\tau) \right] d\xi =: I_1 + I_2. \quad (1.22)$$

Пусть $x \in \Omega$, тогда найдётся такой шар $O(x,r) \subset \Omega$ при $r > 0$. Справедливо следующее представление для первого слагаемого I_1 :

$$I_1 = f(y,\tau) \int\limits_{O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\, d\xi + \\ + f(y,\tau) \int\limits_{\Omega \setminus O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\, d\xi = \\ = f(y,\tau) \int\limits_{\partial O(x,r)} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) \cos(n_\xi, e_i)\, ds_\xi + \\ + f(y,\tau) \int\limits_{\Omega \setminus O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i}\, d\xi. \quad (1.23)$$

Подставляя равенство (1.23) в равенство (1.22) и дифференцируя по x_j, мы получим следующее равенство при $t > \tau$:

$$\frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i} = f(y,\tau) \int\limits_{\partial O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_\xi, e_i)\, ds_\xi + \\ + f(y,\tau) \int\limits_{\Omega \setminus O(x,r)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\, d\xi + \\ + \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i} \left[f(\xi,\tau) - f(y,\tau) \right] d\xi := J_1(y) + J_2(y) + J_3(y). \quad (1.24)$$

Теперь положим в последней цепочке равенств $y = x$. Для первых двух интегралов справедливы следующие равномерные оценки:

$$|J_1(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\partial O(x,r)} \left|\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial x_j}\right| ds_\xi \leqslant c_6(r) < +\infty; \quad (1.25)$$

$$|J_2(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(D_T)} \int\limits_{\Omega \setminus O(x,r)} \left|\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\right| d\xi \leqslant c_7(r) < +\infty. \quad (1.26)$$

Для интеграла $J_3(x)$ в силу оценки (1.21), а также того, что $f(x,t) \in \in \mathbb{C}^\beta_x(\overline{\Omega})$ при $\beta \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$, справедлива следующая цепочка выражений:

$$|J_3(x)| \leqslant \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\right| |f(\xi,\tau) - f(x,\tau)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_8}{(t-\tau)^\mu} \int\limits_{\Omega} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{N+2-2\mu-\beta}} \leqslant \frac{c_9}{(t-\tau)^\mu}, \quad (1.27)$$

при условиях, что ($\beta \in (0,1]$)

$$0 < \mu < 1, \quad 2 - 2\mu - \beta < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\beta}{2} < \mu < 1.$$

Итак, в силу (1.24)–(1.27) при $y = x$ вытекает искомая оценка

$$\left|\frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_{10}}{(t-\tau)^\mu} \quad \text{при} \quad \mu \in \left(1 - \frac{\beta}{2}, 1\right).$$

Далее в точности повторяем рассуждения леммы 2. Именно положим

$$\overline{V}_{ij}(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i}\, d\tau$$

и докажем, что справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \overline{V}_{ij}(x,t).$$

Шаг 2. Докажем, что

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(D_T).$$

Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi =$$

$$= \lim_{\gamma\to+0} \int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t f(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_\xi, e_i)\, ds_\xi\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t f(x,\tau) \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \left[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)\right] d\xi\, d\tau := H_1 + H_2 + H_3.$$

Интегралы $H_1(x,t)$, $H_2(x,t) \in \mathbb{C}(D_T)$. Для доказательства того, что $H_3(x,t) \in \mathbb{C}(D_T)$ нужно воспользоваться техникой как и при доказательстве леммы 1.

Лемма доказана.

Замечание 11. Теперь мы можем показать, что, действительно, существует несобственный интеграл в смысле (1.21).

□ Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} f(\xi,\tau)\, d\xi = \int\limits_0^{t-\gamma} \frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t-\gamma} f(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x,r)} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j} \cos(n_\xi, e_i)\, ds_\xi\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{t-\gamma} f(x,\tau) \int\limits_{\Omega\setminus O(x,r)} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j}\, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{t-\gamma} \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \left[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)\right] d\xi\, d\tau \to \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}$$

при $\gamma \to +0$.

Наконец, мы можем доказать основную теорему этой лекции.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,t) \in \mathbb{C}(D_T) \cap L^{\infty}(D_T)$ *и* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\beta}_x(\overline{\Omega})$ *при* $\beta \in (0,1]$ *равномерно по* $t \in [0,T]$. *Тогда существует производная*

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$$

и справедливо следующее равенство:

$$L_{x,t}V(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D_T \cup B_T. \tag{1.28}$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)$ — это фундаментальное решение, то при $t > \tau$ имеет место следующее равенство:

$$\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial t} f(\xi,\tau)\,d\xi =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j^2} f(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{1.29}$$

Как и при доказательстве леммы 3 можно доказать следующую оценку [1]:

$$\left| \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_j^2} f(\xi,\tau)\,d\xi \right| \leqslant c_{11} \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} \tag{1.30}$$

для всех

$$1 - \frac{\beta}{2} < \mu < 1, \quad \beta \in (0,1].$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t} \right| \leqslant c_{12} \frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}} \tag{1.31}$$

при указанном выше μ.

Шаг 2. Докажем теперь, что существует

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T)$$

и имеет место следующее равенство

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = J(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau. \tag{1.32}$$

---

[1] Фактически она там и получена.

С этой целью возьмём $h > 0$ и рассмотрим конечно–разностное отношение:

$$\frac{V(x,t+h)-V(x,t)}{h} = \\ = \frac{1}{h}\int\limits_0^{t+h} J(x,t+h,\tau)\,d\tau - \frac{1}{h}\int\limits_0^{t} J(x,t,\tau)\,d\tau = \\ = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} J(x,t+h,\tau)\,d\tau + \frac{1}{h}\int\limits_0^{t} \left[J(x,t+h,\tau) - J(x,t,\tau)\right]\,d\tau = \\ = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} J(x,t+h,\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t} \frac{\partial J(x,t^*,\tau)}{\partial t}\,d\tau := K_1(h)+K_2(h), \quad (1.33)$$

где $t^* \in (t, t+h)$. Заметим, что после доопределения функции $J(x,t,\tau)$ при $t = \tau$ эта функция является непрерывной при $x \in \Omega$ и при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$. Поэтому стандартным образом можно доказать, что

$$K_1(h) = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} J(x,t+h,\tau)\,d\tau \to J(x,t,t) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Докажем теперь, что

$$K_2(h) := \int\limits_0^{t} \frac{\partial J(x,t^*,\tau)}{\partial t}\,d\tau \to \int\limits_0^{t} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau \quad \text{при} \quad h \to 0. \quad (1.34)$$

□ Действительно, рассмотрим соответствующую разность, для которой справедливо следующее представление:

$$\left|\int\limits_0^{t} \frac{\partial J(x,t^*,\tau)}{\partial t}\,d\tau - \int\limits_0^{t} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial J(x,t^*,\tau)}{\partial t}\,d\tau\right| + \left|\int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t}\,d\tau\right| + \\ + \left|\int\limits_0^{t_\varepsilon} \left[\frac{\partial J(x,t^*,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t}\right]\,d\tau\right| =: L_1 + L_2 + L_3.$$

Заметим, что в силу оценки (1.31) имеет место следующие оценки:

$$L_1 \leqslant c_{12} \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\vartheta(t^* - \tau)}{(t^* - \tau)^\mu}\, d\tau < \frac{\varepsilon}{3}, \quad L_2 \leqslant c_{12} \int\limits_{t_\varepsilon}^{t} \frac{\vartheta(t - \tau)}{(t - \tau)^\mu}\, d\tau < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (1.35)$$

для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно близком t_ε к t. Имеет место следующее неравенство $0 < t_\varepsilon < t < t^* < t + h$ и поэтому при выбранном $t_\varepsilon \in (0, t)$ выберем $h < \delta(t_\varepsilon, \varepsilon)$ настолько малым, чтобы

$$L_3 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1.36)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $t_\varepsilon \in (0, t)$, близкое к t, и такое $\delta = \delta(t_\varepsilon, \varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство

$$L_1 + L_2 + L_3 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Аналогичным образом рассматривается и случай $h > 0$. Следовательно, в силу (1.29) и леммы 3 имеет место равенство [1)]

$$\frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial t} = J(x,t,t) + \int\limits_0^t \frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial t}\, d\tau =$$
$$= f(x,t) + \lim_{\gamma \to +0} \int\limits_0^{t-\gamma} d\tau \int\limits_\Omega \Delta_x \mathcal{E}(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi =$$
$$= f(x,t) + \Delta_x V(x,t). \qquad (1.37)$$

Из равенств (1.37) вытекает [2)], что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D_T \cup B_T).$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

[1)] Здесь нужно снова воспользоваться рассуждениями на шаге 5 леммы 2.

[2)] Во втором равенстве повторный интеграл понимается в несобственном смысле.

Лекция 6

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ТЕПЛОВОЙ ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ

§ 1. Функция Грина

Дадим определение функции Грина для уравнения

$$L_{x,t}u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T). \tag{1.1}$$

Определение 1. *Функция $G(x,t;\xi,\tau)$, определённая и непрерывная при $(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}_T \times (D_T \cup B)$ и $t > \tau$, называется функцией Грина для уравнения (1.1) в области D_T, если для любого $\tau \in [0,T]$ и для любой функции $u_\tau(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$ и $u_\tau(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ функция*

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,\tau) u_\tau(\xi)\, d\xi \tag{1.2}$$

является решением уравнения

$$L_{x,t}u(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D_T \cap \{\tau < t \leqslant T\} \tag{1.3}$$

и удовлетворяет начальным и граничным условиям

$$\lim_{t \downarrow \tau} u(x,t) = u_\tau(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S_T \cap \{\tau < t \leqslant T\}. \tag{1.5}$$

Справедлива следующая теорема [12]:

Теорема 1. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет достаточно гладкую границу $\partial\Omega$. Тогда существует единственная функция Грина $G(x,t;\xi,\tau)$. Кроме того,*

$$G(x,t;\xi,\tau), \quad D_x G(x,t;\xi,\tau), \quad D_x^2 G(x,t;\xi,\tau), \quad D_t G(x,t;\xi,\tau) \ ^{1)}$$

— это непрерывные функции по совокупности переменных $(x,t;\xi,\tau) \in (D_T \cup B_T) \times (D_T \cup B)$ при $t > \tau$.

---

[1]) Символами D_x и D_x^2 мы обозначили произвольные частные поизводные $\partial/\partial x_k$ и $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$.

Доказательство. Заметим, что функция

$$\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) = \frac{\vartheta(t-\tau)}{(4\pi(t-\tau))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)$$

удовлетворяет следующим свойствам:

$$\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau), \quad D_x\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau), \quad D_x^2\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau), \quad D_t\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)$$

— это непрерывные функции аргумента $(x,t;\xi,\tau)$ при $t>\tau$. Рассмотрим корректирующую функцию $V(x,t;\xi,\tau) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_T \cap \{\tau < t \leqslant T\})$ как единственное решение следующей задачи для всякой фиксированной точки $(\xi,\tau) \in D_T$:

$$L_{x,t}V(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{в} \quad D_T \cap \{\tau < t \leqslant T\}, \tag{1.6}$$

$$V(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B}_\tau = \overline{\Omega} \times \{t=\tau\}, \tag{1.7}$$

$$V(x,t;\xi,\tau) = -\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) \quad \text{на} \quad (x,t) \in S_T \cap \{\tau < t \leqslant T\}. \tag{1.8}$$

Заметим, что для всякой $(\xi,\tau) \in D_T$ и $(x,t) \in S_T$ имеем $x \neq \xi$. Поэтому

$$\frac{\partial^\alpha \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to \tau$$

для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$. Следовательно, граничная функция для решения $V(x,t;\xi,\tau)$ задачи (1.6)–(1.8) на параболической границе $\partial' D_T \cap$ $\cap \{\tau \leqslant t \leqslant T\}$ является бесконечное число раз дифференцируемой. Таким образом, задача (1.6)–(1.8) действительно имеет единственное решение класса $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D_T \cap \{\tau < t < T\})$, что следует из теории шаудеровских оценок, но это выходит за рамки нашего курса.

Рассмотрим следующую функцию:

$$G(x,t;\xi,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) + V(x,t;\xi,\tau). \tag{1.9}$$

Покажем, что эта функция является функцией Грина.

□ Действительно, рассмотрим функцию

$$g(x,t) = g_1(x,t) + g_2(x,t), \tag{1.10}$$

где

$$g_1(x,t) = \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)u_\tau(\xi)\,d\xi, \quad g_2(x,t) = \int\limits_\Omega V(x,t;\xi,\tau)u_\tau(\xi)\,d\xi. \tag{1.11}$$

Очевидно, что

$$L_{x,t}g_1(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad D_T \cap \{\tau < t \leqslant T\},$$

поскольку $\mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)$ — это фундаментальное решение. В силу равенства (1.6) получаем, что

$$L_{x,t} g_2(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad D_T \cap \{\tau < t \leqslant T\}.$$

Из равенства (1.7) вытекает, что

$$\lim_{t \downarrow \tau} g_2(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Поэтому имеем

$$\lim_{t \downarrow \tau} g(x,t) = \lim_{t \downarrow \tau} g_1(x,t) = u_\tau(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Наконец, поскольку справедливо равенство (1.8), то

$$g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S \cap \{\tau < t \leqslant T\}. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

Отметим, что единственное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_T)$ задачи

$$L_{x,t} u(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T) \cap \mathbb{C}^{\beta}_x(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.12}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.13}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \tag{1.14}$$

где $\beta \in (0,1]$, даётся явной формулой

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,0) u_0(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{1.15}$$

где $G(x,t;\xi,\tau) = \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) + V(x,t;\xi,\tau)$.

□ Действительно, введём следующие обозначения:

$$u_1(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,0) u_0(\xi)\, d\xi, \quad u_2(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

По доказанному (теорема 1) функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет задаче

$$L_{x,t} u_1(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} u_1(x,t) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$u_1(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T.$$

Представим функцию $u_2(x,t)$ в свою очередь в виде следующей суммы:

$$u_2(x,t) = u_{21}(x,t) + u_{22}(x,t),$$

где

$$u_{21}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

$$u_{22}(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega V(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

С одной стороны, точно также как и в предыдущей лекции можно доказать, что [1]

$$L_{x,t} u_{21}(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T.$$

С другой стороны, по построению корректирующей функции $V(x,t;\xi,\tau)$ (смотри (1.6)–(1.8)) справедливы следующие равенства:

$$L_{x,t} u_{22}(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T,$$

поскольку по построению функции $V(x,t;\xi,\tau)$ имеем

$$V(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times \{t=\tau\}.$$

□ Действительно, справедливо следующее равенство:

$$L_{x,t} u_{22}(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) \int\limits_0^t \int\limits_\Omega V(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int\limits_\Omega V(x,t;\xi,t) f(\xi,\tau)\, d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega L_{x,t} V(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = 0. \quad \boxtimes$$

Наконец, справедливы следующие равенства:

$$\lim_{t\downarrow 0} u_2(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$

$$u_2(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T.$$

В силу линейности задачи приходим к формуле (1.15) для единственного решения задачи (1.12)–(1.14). ⊠

---

[1] Поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ и $f(x,t) \in \mathbb{C}^\beta_x(\overline{\Omega})$ равномерно по $t \in [0,T]$.

Теперь мы укажем схематично как строится функция Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ следующей второй смешанной краевой задачи:

$$L_{x,t}u(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}_0(\overline{D}_T) \cap \mathbb{C}^{\beta}_x(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T, \tag{1.16}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T, \tag{1.18}$$

где $n_{x,t} = (n_{x_1},\dots,n_{x_N},0)$ — это внешняя нормаль к $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Функция Грина имеет следующий вид:

$$G(x,t;\xi,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) + W(x,t;\xi,\tau), \tag{1.19}$$

где

$$L_{x,t}W(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{в} \quad D_T \cap \{\tau < t \leqslant T\}, \tag{1.20}$$

$$W(x,t;\xi,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B}_\tau = \overline{\Omega} \times \{t = \tau\}, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial W(x,t;\xi,\tau)}{\partial n_{x,t}} = -\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{x,t}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T \cap \{\tau < t \leqslant T\}. \tag{1.22}$$

С учётом построенной функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ классическое решение второй смешанной краевой задачи (1.16)–(1.18) даётся формулой

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{1.23}$$

§ 2. Тепловой потенциал двойного слоя

Как нами уже было отмечено, в третью формулу Грина входят потенциалы двойного и простого слоя. Для изучения разрешимости первой смешанной краевой задачи нам нужно изучить свойства потенциала двойного слоя. Потенциал двойного слоя в цилиндре $D_T = \Omega \times \times (0,T)$ имеет следующий вид:

$$W[\rho](x,t) = W(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau)\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\,ds_\xi\,d\tau, \tag{2.1}$$

где $t \in [0,T]$, $n_{\xi,\tau} = (n_{\xi_1},\dots,n_{\xi_N},0)$ — это вектор внешней нормали к боковой границе $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ цилиндра $D_T = \Omega \times [0,T]$. Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Тепловой потенциал двойного слоя $W(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{x,t} \setminus S_T$.*

Доказательство. Действительно, при $(x,t) \neq (\xi,\tau)$ функция

$$\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}$$

является бесконечное число раз дифференцируемой и справедлива формула о дифференцировании под знаком интеграла. Поэтому при $(x,t) \notin S_T$ имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} - \Delta_x W(x,t) =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau) \frac{\partial}{\partial n_{\xi,\tau}} \left(\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial t} - \Delta_x \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau) \right) ds_\xi \, d\tau = 0.$$

Лемма доказана.

Сделаем ряд предположений и введём ряд обозначений. Будем считать, что плотность $\rho(x,t)$ потенциала двойного слоя $W[\rho](x,t)$ можно продолжить нулём при $t<0$ так, чтобы функция

$$\rho(x,t) \in \mathbb{C}_{x,t}(\partial\Omega \times (-\infty,T]), \quad T>0.$$

Пусть $(x_0,t_0) \in S_T$. При условии существования введём следующие пределы:

$$W_i(x_0,t_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0),\ x\in\Omega} W(x,t), \tag{2.2}$$

$$W_e(x_0,t_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0),\ x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}} W(x,t) \tag{2.3}$$

при $t \in (0,T]$. Справедлива следующая основная теорема:

Теорема 2. *Тепловой потенциал двойного слоя $W(x,t)$ определён всюду в $\mathbb{R}^{N+1}_{x,t}$ и терпит скачок при переходе через боковую границу S_T цилиндра D_T. Пределы* (2.2) *и* (2.3) *существуют, причём имеют место следующие предельные свойства*:

$$W_i(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) - \sigma\rho(x_0,t_0), \tag{2.4}$$

$$W_e(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) + \sigma\rho(x_0,t_0), \tag{2.5}$$

где

$$W(x_0,t_0) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\tau,\xi) \frac{\partial \mathcal{E}(x_0-\xi,t_0-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} ds_\xi \, d\tau, \tag{2.6}$$

а постоянная $\sigma > 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что

$$\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} =$$
$$= -\frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)\cos(\xi-x,n_{\xi,\tau}). \quad (2.7)$$

□ Действительно, имеем

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial n_{\xi,\tau}} = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\xi_k}\cos(n_{\xi,\tau},\xi_k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\xi_k}\cos(n_{\xi,\tau},\xi_k) =$$
$$= -\frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k-x_k}{r}\cos(n_{\xi,\tau},\xi_k) =$$
$$= -\frac{\vartheta(t-\tau)}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)\cos(\xi-x,n_{\xi,\tau}). \quad \boxtimes$$

Для дальнейших вычислений удобно ввести следующее обозначение:

$$d\omega_\xi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}}\cos(\xi-x,n_{\xi,\tau})\,ds_\xi\ ^{1)}. \quad (2.8)$$

Поэтому с учётом формул (2.7) и (2.8) из выражения (2.1) получим равенство

$$W(x,t) =$$
$$= -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_0^t \rho(\xi,\tau)\frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau\right)d\omega_\xi. \quad (2.9)$$

Шаг 2. Рассмотрим сначала следующую функцию:

$$W_0(x,t) = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_{-\infty}^t \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau\right)d\omega_\xi. \quad (2.10)$$

Сделаем в этом интеграле замену переменных

$$\eta = \frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}}, \quad d\eta = \frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)^{3/2}}\,d\tau.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

1) $d\omega_\xi$ — это телесный угол, под которым виден элемент площади ds_ξ в точке $\xi\in\partial\Omega$ из точки $x\in\mathbb{R}^N$.

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau =$$

$$= 2^{N+1} \int\limits_{-\infty}^{t} \left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t-\tau}}\right)^{N-1} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{|x-\xi|}{4(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau =$$

$$= 2^{N+1} \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta = 2^{N+1} a > 0,$$

где мы ввели обозначение

$$a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{0}^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta.$$

Таким образом, приходим к равенству

$$W_0(x,t) = -\frac{a}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\partial\Omega} d\omega_\xi. \tag{2.11}$$

Последний интеграл был фактически нами вычислен в курсе «Эллиптические уравнения» [1]:

$$\int\limits_{\partial\Omega} d\omega_\xi = \begin{cases} \omega_N, & \text{если} \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T); \\ \omega_N/2, & \text{если} \quad x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T); \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega},\ t \in (0,T), \end{cases} \tag{2.12}$$

где ω_N — это площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^N$. Для удобства обозначим

$$2\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{a}{\pi^{N/2}} \omega_N,$$

тогда получим равенство

$$W_0(x,t) = \begin{cases} -2\sigma, & \text{если} \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T); \\ -\sigma, & \text{если} \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T); \\ 0, & \text{если} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \overline{\Omega},\ t \in (0,T). \end{cases} \tag{2.13}$$

Шаг 3. Нам нужно доказать, что при $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times [0,T]$ разность

$$W_1(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} W(x,t) - \rho(x_0,t_0) W_0(x,t)$$

[1] Интеграл Гаусса.

является функцией, определённой всюду и непрерывной в точке (x_0, t_0). Имеем

$$W_1(x,t) = -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_0^t (\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right) d\omega_\xi +$$
$$+ \frac{\rho(x_0,t_0)}{2^{N+1}\pi^{N/2}} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_{-\infty}^0 \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau \right) d\omega_\xi. \quad (2.14)$$

Второй интеграл в этом выражении непрерывен в окрестности точки $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$, поскольку для $t_0 \in (0,T)$ подынтегральное выражение во втором интеграле не имеет особенности и этот интеграл сходится равномерно в малой окрестности точки $(x_0,t_0) \in \partial\Omega \times (0,T)$. Заметим, что мы рассматриваем плотность $\rho(x,t)$ в классе $\rho(x,t) \in \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty,T])$ и $\rho(x,t) = 0$ при $t < 0$. Поэтому с необходимостью $\rho(x_0,0) = 0$. Поэтому и в точке $(x_0,0) \in S_T = \partial\Omega \times [0,T]$ второе слагаемое есть непрерывная в окрестности точки $(x_0,0) \in S_T$ функция, поскольку это слагаемое равно нулю.

Рассмотрим теперь функцию

$$W_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{S_T} \vartheta(t-\tau)\,(\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)) \times$$
$$\times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, d\omega_\xi.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$|\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3ac_1} \quad \text{для всех} \quad (\xi,\tau) \in \gamma := S_T \cap O((x_0,t_0);\eta),$$

где $O((x_0,t_0);\eta) = \left\{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1} : |(\xi,\tau) - (x_0,t_0)| < \eta\right\}$ [1] и

$$\int\limits_{\partial\Omega} |d\omega_\xi| \leqslant c_1 < +\infty, \ ^{2)} \quad a := \int\limits_0^{+\infty} \eta^{N-1} e^{-\eta^2}\, d\eta.$$

[1] Здесь $|(\xi,\tau) - (x_0,t_0)| = \sqrt{(\tau-t_0)^2 + |\xi - x_0|^2}$ — это стандартное эвклидово расстояние.

[2] Этот результат доказан в курсе «Эллиптические уравнения».

Представим теперь функцию $W_2(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$W_2(x,t) = W_{21}(x,t) + W_{22}(x,t),$$

где

$$W_{21}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\gamma} \vartheta(t-\tau)\left(\rho(\xi,\tau)-\rho(x_0,t_0)\right) \times \\ \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, d\omega_\xi,$$

$$W_{22}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{S_T\setminus\gamma} \vartheta(t-\tau)\left(\rho(\xi,\tau)-\rho(x_0,t_0)\right) \times \\ \times \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, d\omega_\xi.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|W_2(x,t) - W_2(x_0,t_0)| \leqslant \\ \leqslant |W_{21}(x,t)| + |W_{21}(x_0,t_0)| + |W_{22}(x,t) - W_{22}(x_0,t_0)|. \quad (2.15)$$

Справедливы следующие оценки:

$$|W_{21}(x,t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3ac_1} \int\limits_{\gamma} \vartheta(t-\tau) \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, |d\omega_\xi| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{3c_1} \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau\, |d\omega_\xi| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{3ac_1} ac_1 = \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.16)$$

В частности,

$$|W_{21}(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.17)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$|W_{22}(x,t) - W_{22}(x_0,t_0)|.$$

У подынтегральной функции в $W_{22}(x_0,t_0)$ особенности нет. Потребуем теперь, чтобы

$$|(x,t)-(x_0,t_0)| < \frac{\eta}{2}.$$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств при $|(\xi,\tau) - - (x_0,t_0)| \geqslant \eta$:

$$|(x,t)-(\xi,\tau)| \geqslant |(x_0,t_0)-(\xi,\tau)| - |(x,t)-(x_0,t_0)| \geqslant \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}.$$

Поэтому у подынтегральной функции в $W_{22}(x,t)$ тоже нет особенности при условии, что

$$|(x,t)-(x_0,t_0)| < \frac{\eta}{2}.$$

Поэтому найдётся такое достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon,\eta) > 0$, что

$$|W_{22}(x,t) - W_{22}(x_0,t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad |(x,t)-(x_0,t_0)| < \delta. \tag{2.18}$$

Итак, в силу неравенств (2.15)–(2.18) функция $W_2(x,t)$ непрерывна в каждой точке $(x_0,t_0) \in S_T$. Таким образом, функция $W_1(x,t)$ непрерывна в каждой точке $(x_0,t_0) \in S_T$.

Шаг 4. Теперь мы приступим к выводу предельных равенств (2.4) и (2.5). С этой целью воспользуемся тем, что $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty,T])$ и $\rho(x,t) = 0$ при $t < 0$. [1]) В этом случае справедлива следующая формула:

$$W(x,t) = W_1(x,t) + \rho(x_0,t_0)W_0(x,t), \tag{2.19}$$

где

$$W_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} W[\rho(\xi,\tau) - \rho(x_0,t_0)](x,t). \tag{2.20}$$

По доказанному функция $W_1(x,t)$ непрерывна в точке $(x_0,t_0) \in S_T$. Поэтому, во–первых, существуют пределы (2.2) и (2.3). Во–вторых, в силу свойств (2.13) функции $W_0(x,t)$ имеют место следующие равенства:

$$W_i(x_0,t_0) = W_1(x_0,t_0) - 2\sigma\rho(x_0,t_0), \quad W_e(x_0,t_0) = W_1(x_0,t_0). \tag{2.21}$$

В третьих, справедливо равенство

$$W_1(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) - \rho(x_0,t_0)W_0(x_0,t_0) = \\ = W(x_0,t_0) + \sigma\rho(x_0,t_0). \tag{2.22}$$

Итак, из формул (2.21) и (2.22) вытекают искомые предельные равенства

$$W_i(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) - \sigma\rho(x_0,t_0),$$
$$W_e(x_0,t_0) = W(x_0,t_0) + \sigma\rho(x_0,t_0).$$

Теорема доказана.

[1]) Мы ранее предположили, что функцию $\rho(x,t)$ можно продолжить нулём при $t < 0$ так, чтобы она осталась непрерывной на $\partial\Omega \times (-\infty,T]$ при $T > 0$.

Лекция 7

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ И РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Тепловой потенциал простого слоя

Потенциал простого слоя в цилиндре $D_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$, определяется следующей формулой

$$V[\rho](x,t) = V(x,t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau)\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,ds_\xi\,d\tau, \tag{1.1}$$

где функция $\rho(x,t) = 0$ при $t < 0$ и $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty,T])$, $T > 0$.

Введём следующие обозначения:

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,i}}(x_0,t_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0),\ x\in\Omega} \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x,t), \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,e}}(x_0,t_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,t)\to(x_0,t_0),\ x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{\Omega}} \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x,t), \tag{1.3}$$

где $t \in (0,T)$, $n_{x_0,t_0} = (n_{x_{01}},\ldots,n_{x_{0N}},0)$ — это внешняя нормаль в точке $(x_0,t_0) \in S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. Прежде всего заметим, что справедлива следующая очевидная лемма:

Лемма 2. *Потенциал простого слоя $V(x,t)$ удовлетворяет всюду в $\mathbb{R}^{N+1}\setminus S_T$ уравнению теплопроводности.*

Наконец, справедлива следующая основная теорема:

Теорема 3. *Нормальная производная потенциала простого слоя определена всюду в $\mathbb{R}^{N+1}_{x,t}$ и терпит скачок при переходе через S_T, причём справедливы следующие предельные свойства*:

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,i}}(x_0,t_0) = \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) + \sigma\rho(x_0,t_0), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,e}}(x_0,t_0) = \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) - \sigma\rho(x_0,t_0), \tag{1.5}$$

где постоянная $\sigma > 0$ *та же, что и в теореме* 2, *а*

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau)\frac{\partial \mathcal{E}(x_0-\xi,t_0-\tau)}{\partial n_{x_0,t_0}}\,ds_\xi\,d\tau. \tag{1.6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} + \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{x_0,t_0}} &= \\ = \frac{1}{(N-2)2^{N+1}\pi^{N/2}}\frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)&\times \\ \times\left[\frac{\partial}{\partial n_{\xi,\tau}}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} + \frac{\partial}{\partial n_{x_0,t_0}}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\right]&. \end{aligned}\tag{1.7}$$

$\square$ Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n_{\xi,\tau}}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} &= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \xi_k}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}\cos(n_{\xi,\tau},e_k) = \\ &= -\frac{(N-2)}{|x-\xi|^{N-1}}\sum_{k=1}^N \frac{\xi_k-x_k}{|x-\xi|}\cos(n_{\xi,\tau},e_k) = -(N-2)\frac{\cos(n_{\xi,\tau},\xi-x)}{|x-\xi|^{N-1}}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial n_{x_0,t_0}}\frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} = (N-2)\frac{\cos(n_{x_0,t_0},\xi-x)}{|x-\xi|^{N-1}}.$$

Далее после подстановки этих выражений в формулу (1.7) убеждаемся в справедливости равенства (1.7). $\boxtimes$

Прежде всего заметим, что сходится следующий интеграл:

$$0 < \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau < +\infty,$$

что нами было доказано на прошлой лекции. Выражение же в квадратных скобках имеет «слабую» особенность в интеграле по ds_ξ при

$$(x,t) \quad \text{и} \quad (\xi,\tau) \to (x_0,t_0) \in S_T.$$

В частности, это тоже выражение, которое возникает при рассмотрении потенциала простого слоя для оператора Лапласа. В соответствующем месте курса «Эллиптические уравнения» получены оценки для случая замкнутых ляпуновских поверхностей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{1,\alpha}$. Эти оценки применительно к свойствам нормальной производной потенциала простого слоя $V(x,t)$ позволяют сделать вывод о непрерывности в точке $(x_0,t_0) \in S_T$ следующего выражения:

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x,t) + W[\rho](x,t) = \\ = \int_0^t \int_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau) \left[\frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} + \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{x_0,t_0}} \right] ds_\xi \, d\tau. \quad (1.8)$$

Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,i}}(x_0,t_0) + W_i(x_0,t_0) = \\ = \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,e}}(x_0,t_0) + W_e(x_0,t_0) = \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) + W(x_0,t_0).$$

Используя доказанные предельные свойства (2.4) и (2.5) лекции 6 потенциала двойного слоя $W[\rho](x,t)$, получим следующие равенства:

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,i}}(x_0,t_0) = \\ = W(x_0,t_0) - W_i(x_0,t_0) + \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) = \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) + \sigma\rho(x_0,t_0),$$

$$\frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0,e}}(x_0,t_0) = \\ = W(x_0,t_0) - W_e(x_0,t_0) + \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) = \frac{\partial V[\rho]}{\partial n_{x_0,t_0}}(x_0,t_0) - \sigma\rho(x_0,t_0).$$

Теорема доказана.

§ 2. Решение первой смешанной краевой задачи

Рассмотрим следующую первую смешанную краевую задачу:

$$L_{x,t}u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T), \quad (2.1)$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T = \partial\Omega \times [0,T], \quad (2.2)$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (2.3)$$

причём $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{S}_T)$ и для силу согласования начального и граничного условий требуем, чтобы

$$\psi(x,t) \rightrightarrows 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{при} \quad t \downarrow 0. \tag{2.4}$$

В частности, отсюда следует, что функцию $\psi(x,t)$ можно продолжить нулём при $t < 0$ так, чтобы

$$\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty, T]).$$

Будем искать решение задачи (2.1)–(2.3) в виде теплового потенциала двойного слоя

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\, ds_\xi\, d\tau, \tag{2.5}$$

где плотность $\rho(x,t)$ потенциала двойного слоя ищется в классе $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty, T])$ и $\rho(x,t) = 0$ при $t < 0$.

В силу предельного свойства (2.4) лекции 6 приходим к следующему интегральному уравнению относительно $\rho(x,t)$:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\, ds_\xi\, d\tau - \frac{1}{\sigma}\psi(x,t) \tag{2.6}$$

для всех $(x,t) \in S_T$. Заметим, что это уравнение является фредгольмовым по $x \in \partial\Omega$ и вольтерровым по $t \in (0,T]$. Поэтому в отличие от чисто фредгольмова случая интегральных уравнений теории потенциала, рассмотренных нами в курсе «Эллиптические уравнения», это уравнение «проще» в исследовании однозначной разрешимости. В частности, для интегрального уравнения (2.6) работает метод сжимающих отображений.

Введём линейное отображение:

$$Az(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sigma} \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} z(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\, ds_\xi\, d\tau - \frac{1}{\sigma}\psi(x,t). \tag{2.7}$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма:

Лемма 3. *Для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{x,t}$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^t \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} \right| ds_\xi\, d\tau \leqslant c_1 < +\infty, \tag{2.8}$$

где $c_1 > 0$ — это постоянная, не зависящая от $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{x,t}$.

Доказательство.

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right| ds_\xi\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{|x-\xi|^N}{(t-\tau)^{N/2+1}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau\right)|d\omega_\xi| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^{N/2}}aK = c_1 < +\infty, \quad a = \int\limits_0^{+\infty}\eta^{N-1}e^{-\eta^2}\,d\eta, \tag{2.9}$$

где

$$d\omega_\xi = \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}}\cos(\xi-x, n_{\xi,\tau})ds_\xi,$$

и в курсе «Эллиптические уравнения» было доказано, что

$$\int\limits_{\partial\Omega}|d\omega_\xi| \leqslant K < +\infty, \tag{2.10}$$

$K > 0$ — это постоянная, не зависящая от $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма доказана.

Пусть $S_\delta = \partial\Omega\times[0,\delta]$ при некотором $\delta > 0$. Прежде всего можно доказать, что ядро интегрального оператора (2.7) является слабо полярным и поэтому

$$A\colon\ \mathbb{C}(S_T)\to\mathbb{C}(S_T), \quad S_T = \partial\Omega\times[0,T] \tag{2.11}$$

для любого произвольного $T > 0$.

□ Действительно, достаточно доказать, что функция

$$f(x,t) = \int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}z(\xi,\tau)\,ds_\xi\,d\tau \in \mathbb{C}(S_T) \quad \text{при} \quad z(x,t)\in\mathbb{C}(S_T).$$

Сначала докажем, что ядро этой функции имеет слабую особенность при $(\xi,\tau) = (x,t) \in \partial\Omega$. Итак, с этой целью напомним, что

$$\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} =$$

$$= -\frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}}\frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{1+N/2}}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right)\cos(n_{\xi,\tau},\xi-x).$$

Из курса «Эллиптические уравнения» известна оценка

$$|\cos(n_{\xi,\tau}, \xi - x)| \leqslant a|x-\xi|^{\alpha}, \quad x, \xi \in \partial\Omega \in \mathbb{C}^{1,\alpha}, \quad \alpha \in (0,1].$$

Поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{N+1}\pi^{N/2}}(t-\tau)^{-\mu}\left[\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right]^{N/2+1-\mu}\frac{|x-\xi|^{1+\alpha}}{|x-\xi|^{N+2-2\mu}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) \leqslant c_1\frac{\vartheta(t-\tau)}{(t-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{N+1-2\mu-\alpha}}, \quad \mu \in \left(1-\frac{\alpha}{2}, 1\right).$$

Можно проверить, что правая часть последней оценки интегрируемая функция на S_T при $(x,t) \in S_T$. [1] ⊠

Для произвольных $z_1(x,t)$, $z_2(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta)$ справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{(x,t)\in S_\delta}|Az_1(x,t) - Az_2(x,t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sigma}\sup_{(x,t)\in S_\delta}|z_1(x,t) - z_2(x,t)| \times$$
$$\times \sup_{(x,t)\in S_\delta}\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right| ds_\xi\, d\tau. \qquad (2.12)$$

Из сходимости интеграла (2.8) и абсолютной непрерывности интеграла Лебега вытекает неравенство

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right| ds_\xi\, d\tau \leqslant c_2(\delta) \to +0 \qquad (2.13)$$

при $\delta \to +0$ для всякого $t \in (t_1, t_1+\delta)$ и $t_1 \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^N$.

□ Если сделать замены переменных

$$\widetilde{\tau} = \tau - t_1, \quad \widetilde{t} = t - t_1,$$

то получим следующее равенство:

$$\int\limits_{t_1}^{t_1+\delta}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\right| ds_\xi\, d\tau =$$

---

[1] За деталями отсылаю читателя к курсу «Эллиптические уравнения».

$$= \int\limits_0^\delta \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, \widetilde{t}-\widetilde{\tau})}{\partial n_{\xi,\widetilde{\tau}}} \right| ds_\xi \, d\widetilde{\tau} \leqslant c_2(\delta) \to +0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0$$

для всех $\widetilde{t} \in (0, \delta)$. ⊠

Из оценки (2.13) и из (2.12) мы приходим к неравенству

$$\sup_{(x,t)\in S_\delta} |Az_1(x,t) - Az_2(x,t)| \leqslant c_3(\delta) \sup_{(x,t)\in S_\delta} |z_1(x,t) - z_2(x,t)|, \quad (2.14)$$

где $c_3(\delta) = c_2(\delta)/\sigma$, и при достаточно малом $\delta > 0$ имеем

$$c_3(\delta) \in (0, 1/2].$$

Итак, оператор $A : \mathbb{C}(S_\delta) \to \mathbb{C}(S_\delta)$ является сжимающим при достаточно малом $\delta > 0$ по норме банахова пространства $\mathbb{C}(S_\delta)$. Итак, существует единственное решение $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta)$ интегрального уравнения (2.6) при $t \in [0, \delta]$.

Рассмотрим теперь на $S_{2\delta} = \partial\Omega \times [0, 2\delta]$ класс функций

$$z(x,t) \in \mathbb{C}_\rho(S_{2\delta}) \stackrel{\text{def}}{=} \{z(x,t) \in \mathbb{C}(S_{2\delta}),\ z(x,t) = \rho(x,t),\ t \in [0,\delta]\}, \text{ [1]}$$

таких, что они совпадают с решением $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(S_\delta)$ при $t \in [0, \delta]$.

Для произвольных функций $z_1(x,t)$ и $z_2(x,t)$ из этого класса функций $\mathbb{C}_\rho(S_{2\delta})$ справедливы следующие равенства:

$$Az_1(x,t) - Az_2(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, \delta], \quad (2.15)$$

$$Az_1(x,t) - Az_2(x,t) = \\ = \frac{1}{\sigma} \int\limits_\delta^t \int\limits_{\partial\Omega} (z_1(\xi,\tau) - z_2(\xi,\tau)) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} \, ds_\xi \, d\tau \quad (2.16)$$

при $t \in (\delta, 2\delta]$. Поэтому в силу (2.13) имеем следующую оценку:

$$\sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |A(z_1)(x,t) - A(z_2)(x,t)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\sigma} \sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |z_1(z,t) - z_2(x,t)| \times \\ \times \sup_{x\in\partial\Omega,\ t\in[\delta,2\delta]} \int\limits_\delta^{2\delta} \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}} \right| ds_\xi \, d\tau \leqslant$$

[1] Этот класс функций не является, очевидно, даже линейным пространством.

$$\leqslant c_3(\delta) \sup_{(x,t)\in S_{2\delta}} |z_1(z,t) - z_2(x,t)|, \quad c_3(\delta) = \frac{c_2(\delta)}{\sigma}.$$

Далее снова докажем сжимаемость оператора A на этом классе функций с той же постоянной $c_3(\delta)$, но уже на более широком сегменте $[0, 2\delta]$. Следовательно, повторяя этот процесс мы за конечное число шагов докажем существование единственного решения $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(S_T)$ интегрального уравнения (2.6).

Осталось заметить, что в силу свойства (2.4) функции $\psi(x,t)$ из интегрального уравнения (2.6) вытекает, что

$$\rho(x,t) \rightrightarrows 0 \quad \text{равномерно по} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{при} \quad t \downarrow 0. \tag{2.17}$$

Поэтому можно продолжить функцию $\rho(x,t)$ нулём при $t < 0$ таким образом, чтобы при этом $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty, T])$.

Рассмотрим теперь общую первую смешанную краевую задачу.

$$L_{x,t}u(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T), \tag{2.18}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T = \partial\Omega \times [0,T], \tag{2.19}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2.20}$$

где $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}_T) \cap \mathbb{C}^{\beta}_x(\overline{\Omega})$, $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{S}_T)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ при $\beta \in \in (0,1]$ и выполнено свойство (2.4). Тогда с учётом формулы (1.15) лекции 6 и (2.5) решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_T)$ задачи (2.18)–(2.20) представимо в следующем виде:

$$u(x,t) = \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau) \frac{\partial \mathcal{E}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_{\xi,\tau}}\,ds_\xi\,d\tau, \tag{2.21}$$

где $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(S_T)$ — это единственное решение интегрального уравнения (2.6), а $G(x,t;\xi,\tau)$ — это функция Грина первой смешанной краевой задачи.

§ 3. Решение второй смешанной краевой задачи

Рассмотрим следующую вторую смешанную краевую задачу:

$$L_{x,t}u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}} = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T = \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3.3}$$

причём $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(S_T)$ и в силу согласования начального и граничного условий выполнено свойство (2.4). Решение этой задачи ищем в виде потенциала простого слоя

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau)\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,ds_\xi\,d\tau, \tag{3.4}$$

где плотность $\rho(x,t)$ потенциала простого слоя опять ищется в классе $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(\partial\Omega \times (-\infty,T])$ и $\rho(x,t) = 0$ при $t < 0$. В силу предельного свойства (1.4) мы приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\rho(x,t) = -\frac{1}{\sigma}\int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau)\frac{\partial\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_{x,t}}\,ds_\xi\,d\tau + \frac{1}{\sigma}\psi(x,t). \tag{3.5}$$

Это интегральное уравнение исследуется точно также как и интегральное уравнение (2.6) и справедлив результат о существовании единственного его решения $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(S_T)$.

Тогда единственное решение общей второй смешанной краевой задачи

$$L_{x,t}u(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_T = \Omega \times (0,T), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}} = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S_T = \partial\Omega \times [0,T], \tag{3.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega} \tag{3.8}$$

при некоторых условиях на исходные данные задачи даётся следующей формулой:

$$u(x,t) = \int\limits_\Omega G(x,t;\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\tau)\mathcal{E}(x-\xi,t-\tau)\,ds_\xi\,d\tau, \tag{3.9}$$

где $G(x,t;\xi,\tau)$ — это функция Грина второй смешанной краевой задачи, построенная ранее, а функция $\rho(x,t) \in \mathbb{C}(S_T)$ — это единственное решение интегрального уравнения (3.5).

Тематическая лекция III

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Лекция 8

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В этой лекции мы сформулируем основные типы задач для параболических уравнений общего вида.

§ 1. Области. Верхняя и нижняя крышки

Давайте сформулируем некоторые понятия и определения, связанные с рассмотрением областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, где изучаются решения параболических уравнений.

Итак, ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на следующем рисунке имеет границу ∂D, состоящую из следующих частей: из

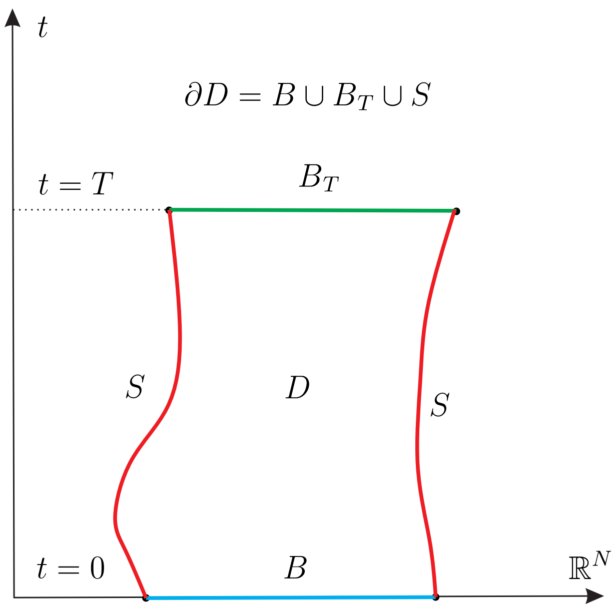

Рис. 8. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

основания B при $t = 0$, называемого нижней крышкой

$$\overline{B} = B \cup \partial B, \quad \overline{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial D \cap \{t = 0\},$$

из верхней крышки B_T

$$\overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T, \quad \overline{B}_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial D \cap \{t = T\}$$

и из боковой границы

$$S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial D \backslash (B \cup B_T) = (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T \cup \partial B.$$

При этом мы в основном рассматриваем такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества

$$B \quad \text{и} \quad B_T$$

являются областями в соответствующих гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Символом $\overline{B}$ мы обозначили замыкание в $\mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ области B, $\overline{B}_T$ — замыкание в $\mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ области B_T, а символами ∂B и ∂B_T мы обозначили границы областей $B \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ и $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$, соответственно.

Отметим, что граничные условия для решений параболического уравнения задаются не на всей границе ∂D области D, а только на её части

$$\partial' D \stackrel{\mathrm{def}}{=} B \cup S,$$

называемой нормальной границей или параболической границей. И это связано со слабым принципом максимума, в силу которого задание граничных условий только на параболической границе достаточно для единственности решения соответствующей краевой задачи.

На практике довольно часто область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ может быть представлена в виде цилиндра $D = \Omega \otimes (0, T)$ или в более общем случае $D = \Omega \otimes (T_0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Такую область называют цилиндрической. Пример цилиндрической области приведён на рисунке 9. С другой стороны, много практических примеров, так называемых областей с подвижной границей, когда область D является нецилиндрической. Пример нецилиндрической области изображён на рисунке 10.

Введём следующие обозначения (см. рисунок 11):

$$B_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad D_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

для любого $\tau \in (0, T)$. Мы будем в дальнейшем рассматривать в основном такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества B_τ для всех $\tau \in$ $\in [0, T]$ являются областями (связными и открытыми множествами) на соответствующих гиперплоскостях $t = \tau$. Хотя принцип максимума будет доказан для достаточно общих областей D.

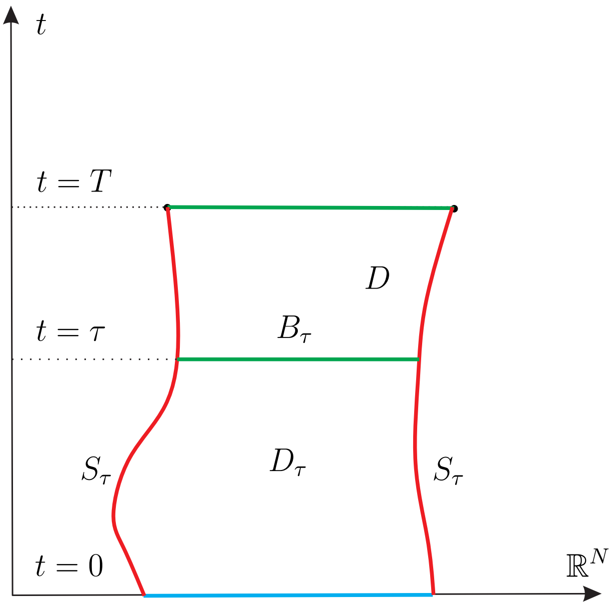

Рис. 9. Множества D_τ, B_τ и S_τ.

Теперь мы введём строго математически определения верхней и нижней крышек. И убедимся, что некоторые связные части нижней крышки могут располагаться «выше» некоторых связных частей верхних крышек.

Пусть

$$Ц_{x_0,R}^{t_1,t_2} \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - x_0| < R, \ t_1 < t < t_2\bigr\}$$

— это цилиндр (область) в $\mathbb{R}^{N+1}$. Дадим определения.

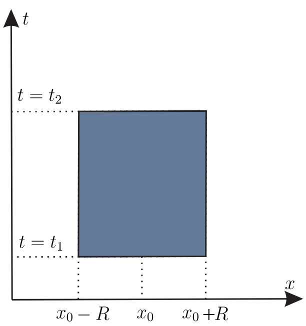

Рис. 10. Цилиндр $Ц_{x_0,R}^{t_1,t_2}$.

Определение 1. *Верхней крышкой* $\gamma(D)$ *области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *называется подмножество граничных точек* $M = (x,t) \in \partial D$ *таких, что для любой точки* $M = (x,t) \in \gamma(D)$ *найдётся такое* $h > 0$, *что выполнены следующие свойства*

$$Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset D \quad \text{и} \quad Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash \overline{D}.$$

Определение 2. *Нижней крышкой* $\gamma_0(D)$ *области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *называется подмножество граничных точек* $M = (x,t) \in \partial D$ *таких, что для любой точки* $M = (x,t) \in \gamma_0(D)$ *найдётся такое* $h > 0$, *что выполнены следующие свойства*

$$Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset D \quad \text{и} \quad Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash \overline{D}.$$

Определение 3. *Множество граничных точек* $S(D) := = \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ *называется боковой границей* [1]) *области* D. *Множество* $\partial' D := \partial D \backslash \gamma(D)$ *называется параболической границей области* D.

На следующем рисунке мы изобразили область D ограниченную границей ∂D, состоящую согласно определениям 1–3 из непересекающихся частей — из нижней крышки $\gamma_0(D)$, изображённой на рисунке отрезками [1-6] и [7-8] синего цвета, из верхней крышки $\gamma(D)$, изображённой на рисунке отрезками [2-3], [4-5] и [9-10] зелёного цвета. Наконец, линиями красного цвета на рисунке изображена боковая граница $S(D)$.

Как мы обещали, мы привели пример части нижней крышки [7 — — 8], расположенной выше двух связных частей верхней крышки [2-3] и [9-10]. Кроме того, для корректной постановки, например, первой краевой задачи (см. следующий параграф) нужно знать значение решения $u(x,t)$ параболического уравнения только в точках параболической границы $\partial' D$. В частности, мы должны задать значение функции $u(x,t)$ на отрезке [7-8] — связном отрезке нижней крышки $\gamma_0(D)$.

Отметим, что можно привести пример области D, для которой верхняя крышка $\gamma(D) = \varnothing$ и нижняя крышка $\gamma_0(D) = \varnothing$. Аналитически такая область может быть задана следующим образом:

$$D = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} |x_j - a_j|^2 + |t - t_0|^2 < 1 \right\}.$$

Очевидно, что для этой области D граница области ∂D совпадает с боковой границей $S(D)$.

[1]) Если понятно для какой области D множество $S(D)$ является боковой границей, мы будем использовать обозначение S.

$$\partial D = \gamma(D) \cup \gamma_0(D) \cup S(D)$$

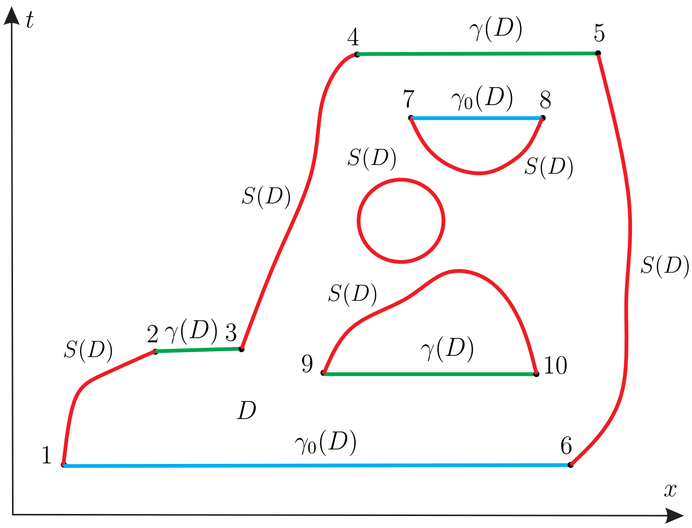

Рис. 11. Граница ∂D области D и ее части — верхняя крышка $\gamma(D)$, нижняя крышка $\gamma_0(D)$ и боковая граница $S(D)$.

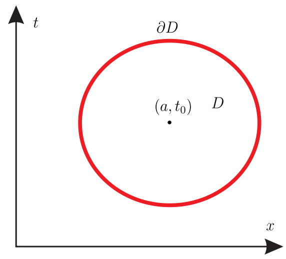

Рис. 12. Область D, для которой и нижняя и верхняя крышки — пустые множества.

Заметим, что в основном мы рассматриваем области D, которые имеют более привычный вид, изображённый на рисунке 11.

Сделаем ряд замечаний относительно обозначений. В случае областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, для которых верхняя крышка $\gamma(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = T > 0$ мы будем использовать обозначение B_T вместо $\gamma(D)$. Аналогично в том случае, если нижняя крышка $\gamma_0(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, мы будем использовать обозначение B вместо $\gamma_0(D)$.

Кроме того, связные компоненты верхней крышки $\gamma(D)$ будем обозначать символом B_t, а связные компоненты нижней крышки $\gamma_0(D)$ будем обозначать символом B^t.

§ 2. Постановка задач для параболических операторов

В курсе лекций мы будем рассматривать не только задачу Коши и первую краевую задачу, а также вторую и третью краевые задачи. Прежде всего дадим определение параболического оператора в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Оператор L, определённый равенством [1]

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1)$$

называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \quad (2.2)$$

Иначе говоря, оператор L называется параболическим в области D, если его часть

$$L_0 u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \quad (2.3)$$

для всех $(x,t) \in D$ является эллиптическим оператором по переменным x_i, $i = \overline{1,N}$ с параметром t. Дадим определение локально равномерно параболического оператора.

Определение локально равномерно параболического оператора. *Оператор L называется локально равномерно параболическим, если для всех $(x,t) \in Q$ из компактного множества $Q \subset D$ найдутся такие постоянные $m = m(Q) > 0$ и $\Lambda = \Lambda(Q) > 0$, что выполнены неравенства*

$$m|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2 \quad \textit{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (x,t) \in Q. \quad (2.4)$$

Замечание 1. Это определение означает, что эллиптический оператор L_0 является локально равномерно эллиптическим с параметром t. Нетрудно убедиться, что *всякий параболический оператор в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ является локально равномерно параболическим оператором в этой области.*

---

[1] Без ограничения общности можно считать, что $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$.

Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям:

(A) Оператор L — параболический в D;

(B) коэффициенты оператора L — непрерывные функции в D;

(C) $c(x,t) \leqslant 0$ в D.

Определение классического решения параболического уравнения. *Функция $u = u(x,t)$ называется классическим решением параболического уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)),$$

если

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)), \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Замечание 2. Отметим, что в расшифровке нуждается условие, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)).$$

Действительно, пусть $B_{t_1} \subset \gamma(D)$ — это произвольная связная компонента верхней крышки. Известно, что это область на N–мерном пространстве $\mathbb{R}^N \otimes \{t = t_1\}$. Тогда для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$ запись

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$$

означает, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D) \quad \text{и} \quad \exists \lim_{t \to t_1 - 0,\ (x,t) \in \text{Ц}_{x_0,h}^{t_1-h,t_1}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^- u(x,t_1),$$

где D_t^- — это левая односторонняя производная по t функции $u(x,t)$. Положим по определению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D_t^- u(x,t), & \text{если} \quad (x,t_1) \in B_{t_1}. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1}).$$

Дадим постановку задачи Коши.

Задача Коши. *Найти классическое решение*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,+\infty)) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$$

уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t)\ ^{1)} \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{+} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{2.5}$$

удовлетворяющее начальному (граничному при $t = 0$) условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Замечание 3. Сразу же заметим, что задача Коши имеет, вообще говоря, неединственное решение. Для того чтобы классическое решение задачи Коши было единственным достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right), \quad |f(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) \tag{2.7}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M > 0$ и $\beta > 0$.

Дадим постановку первой краевой задачи в предположении, что рассматривается такая область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_{+}$, для которой

$$\gamma(D) = B_T \quad \text{и} \quad \gamma_0(D) = B\ ^{2)},$$

и область D расположена между гиперплоскостями $t = 0$ и $t = T$.

Первая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$, удовлетворяющее уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.8}$$

начальному условию на замыкании нижней крышки

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B}, \tag{2.9}$$

а также граничному условию на боковой границе S

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \backslash (B \cup B_T). \tag{2.10}$$

Замечание 4. Отметим, что граничные условия (2.9) и (2.10) можно объединить в одно граничное условие

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D \tag{2.11}$$

на параболической границе $\partial' D = B \cup S$ полной границы ∂D. При этом граничная функция $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\partial' D)$. Как мы видим, специфика первой краевой задачи для параболического оператора L — это отсутствие граничного условия на верхней крышке B_T области D.

---

[1] Мы с необходимостью предполагаем, что $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$ и $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$.

[2] Строго говоря, B^0.

Вторую и третью краевые задачи для параболического оператора L мы будем формулировать для случая цилиндрической области $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Для этого нам нужно ввести *производную по внутренней нормали* $\partial/\partial n_{x,t}$ и *производную по внутренней конормали* $\partial/\partial \nu_{x,t}$ к боковой границе $S := \partial D \backslash (B \cup B_T)$.

В каждой точке $(x,t) \in S$ определено непрерывное векторное поле внутренних нормалей $n_{x,t}$, лежащее для любого $t = \tau \in [0,T]$ на гиперплоскости $t = \tau$ и определённое своими направляющими косинусами:

$$(\cos(n_{x,t}, e_1), \cdots, \cos(n_{x,t}, e_N), 0).$$

Тогда вектор внутренней конормали $\nu_{x,t}$ определён следующим образом:

$$\nu_{x,t} = \frac{1}{a(x,t)} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{1j}(x,t) \cos(n_{x,t}, e_j), \cdots, \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}(x,t) \cos(n_{x,t}, e_j), 0 \right),$$

где

$$a(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t) \cos(n_{x,t}, e_j) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Граничным оператором нормальной производной называется следую-

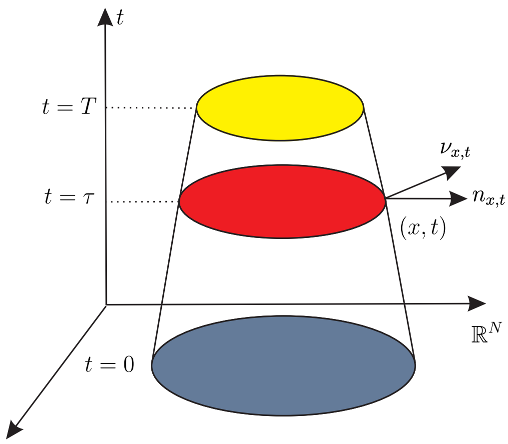

Рис. 13. Векторы внешней нормали $n_{x,t}$ и внешней конормали $\nu_{x,t}$.

щее выражение:

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}} \right|_S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \cos(n_{x,t}, e_i) \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_S, \tag{2.12}$$

а оператором конормальной производной в случае оператора L с матрицей $(a_{ij}(x,t))$ называется величина

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}}\right|_S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a(x,t)} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_j)\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_S. \tag{2.13}$$

Вторая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.14}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.15}$$

и граничному условию для конормальной производной

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.16}$$

Третья краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.17}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.18}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.19}$$

Ясно, чтобы классическое решение второй и третьей краевых задач существовало с необходимостью нужно требовать выполнимости условий согласования начального и граничного условия на границе ∂B нижней крышки B.

Замечание 5. Отметим, что можно задать на боковой границе S также общее граничное условие следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial l_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{2.20}$$

где векторное внутреннее поле $l_{x,t}$ является непрерывным векторным полем на S, нигде не совпадающее с касательным направлением к поверхности S.

Помимо перечисленных задач можно рассматривать также задачу Стефана со свободной границей (см. подробное рассмотрение этой задачи в книге [12]), когда заранее граница области D полностью неизвестна. Однако, эту задачу мы рассматривать не будем и поэтому не формулируем.

В постановках второй и третьей краевых задач мы предполагаем, что область D цилиндрическая и поэтому $\gamma(D) = B_T$ и $\gamma_0(D) = B^0 = B$.

Лекция 9

СЛАБЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Слабый принцип максимума

Пусть параболический оператор L удовлетворяет условиям (B) и (C). Справедливо важное утверждение в произвольной области $D \subset \subset \mathbb{R}^{N+1}$, в частности, неограниченной, называемое *слабым принципом максимума*.

Лемма 1. *Предположим, что либо* $Lu > 0$ *всюду в* $D \cup \gamma(D)$, *либо* $Lu \geqslant 0$ *и* $c(x,t) < 0$ *всюду в* $D \cup \gamma(D)$. *Тогда* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *не может иметь положительного локального максимума в* $D \cup \gamma(D)$.

Доказательство.

Пусть $u = u(x,t)$ имеет положительный локальный максимум в точке $P_0 = z_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$. Докажем, что

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \tag{1.1}$$

□ В самом деле, сделаем линейную замену переменных

$$y = xC, \quad C^T = C^{-1}, \quad x = (x_1, ..., x_N), \quad y = (y_1, ..., y_N), \quad C = (c_{jk})_N^N.$$

область D преобразуется в некотрую область D^* и справедливы равенства

$$y_l = xC_l, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{l=1}^{n} c_{il} \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l,k=1,1}^{N,N} c_{il} c_{jk} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}.$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1,1}^{N,N} b_{kl}(y_0,t_0) \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_k \partial y_l}, \tag{1.2}$$

где

$$v(y,t) := u(yC^{-1}, t), \quad y_0 := x_0 C,$$

$$b_{kl}(y_0,t_0) := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} c_{ik}c_{jl}a_{ij}(x_0,t_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} c_{ik} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_0,t_0)c_{jl} = \sum_{i=1}^{N} c_{ik} \left\{A(x_0,t_0)\cdot C\right\}_{il} =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{C^T\right\}_{ki} \left\{A(x_0,t_0)\cdot C\right\}_{il} = \left\{C^T \cdot A(x_0,t_0)\cdot C\right\}_{kl}.$$

Существует такая ортогональная матрица C, что

$$b_{kl}(y_0,t_0) = \lambda_k\delta_{kl}, \quad \lambda_k > 0 \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1,N}.$$

Функция $v(y,t)$ имеет в точке $(y_0,t_0) \in D^* \cup \gamma(D^*)$ тоже положительный максимум. Следовательно, выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}(y_0,t_0)\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0.$$

□□ Напомним откуда возникает неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0.$$

Действительно, имеет место следующее необходимое условие:

$$d^2 v(y_0,t_0) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} dy_i dy_j \leqslant 0.$$

Пусть $dy_j = \lambda_j \delta_{ij}$, тогда получим неравенство

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_j^2}\lambda_j^2 \leqslant 0.$$

Теперь в этом неравенстве положим

$$\lambda_j = (0,...0,1,0...,0),$$

где 1 находится на j–ом месте. В результате получим неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_j^2} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,N}. \quad \boxtimes\boxtimes$$

Таким образом, отсюда в силу (1.2) выполнено неравенство (1.1). ⊠

Наконец, в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ выполнены необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство требует пояснений.

Если $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, т. е. является внутренней точкой области D, то в точке локального экстремума (максимума) выполнено необходимое условие

$$\frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial t} = 0.$$

Предположим теперь, что $(x_0, t_0) \in \gamma(D)$, т. е. найдется связная компонента $B_{t_0} \in \gamma(D)$, которой принадлежит точка (x_0, t_0). Докажем, что в наших обозначениях выполнено неравенство

$$D_t^- u(x_0, t_0) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

$\square$ Действительно, поскольку в точке $(x_0, t_0) \in B_{t_0}$ достигается локальный максимум, то согласно определению верхней крышки имеет место неравенство

$$\frac{u(x_0, t_0) - u(x_0, t)}{t_0 - t} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0, t) \in \text{Ц}_{x_0, h}^{t_0 - h, t_0}$$

при некотором достаточно малом $h > 0$. Отсюда в пределе при $\text{Ц}_{x_0, h}^{t_0 - h, t_0} \ni (x_0, t) \to (x_0, t_0)$ получим неравенство (1.3). $\boxtimes$

Таким образом, в точке локального положительного максимума имеет место следующее неравенство:

$$Lu(x_0, t_0) \leqslant c(x_0, t_0) u(x_0, t_0). \tag{1.4}$$

Поскольку $u(x_0, t_0) > 0$, то мы приходим к противоречию в неравенстве (1.4) в каждом из двух случаев

$$Lu > 0 \quad \text{и} \quad c(x, t) \leqslant 0 \quad \text{либо} \quad Lu(x, t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x, t) < 0.$$

Лемма доказана.

Приложение слабого принципа максимума. В качестве приложения слабого принципа максимума рассмотрим вопрос о *единственности решения* $u(x, t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *следующей нелинейной первой краевой задачи*:

$$Lu(x, t) = f(x, t, u, D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{1.5}$$

$$u(x, t) = \psi(x, t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{1.6}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. Будем предполагать, что функция $f = f(x, t, p, p_1, ..., p_N)$ определена на множестве $(D \cup B_T) \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$. Область D ограниченная.

Справедлива следующая теорема единственности:

Т е о р е м а 1. *Пусть L — это параболический оператор с коэффициентами $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и пусть $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ является неубывающей по переменной $p \in \mathbb{R}^1$ функцией. Тогда существует не более одного решения задачи* (1.5), (1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Сначала мы рассмотрим случай $c(x,t) \leqslant 0$ и функция $f = f(x,t,p,p_1,....,p_N)$ является строго возрастающей по $p \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — это два решения задачи (1.5) и (1.6) класса $\mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$. Если

$$u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t),$$

то без ограничения общности можно предположить, что

$$u_1(x,t) > u_2(x,t) \quad \text{в некоторых точках} \quad D \cup B_T\ ^{1)},$$

поскольку по исходному предположению $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Поэтому функция

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$$

будет иметь положительный максимум в $\overline{D}$.

Предположим, что $P_0 = (x_0,t_0) \in D \cup B_T$ — это точка, где достигается локальный положительный максимум. Ясно, что

$$D_x u_1(P_0) = D_x u_2(P_0), \quad u_1(P_0) > u_2(P_0).$$

Поэтому мы получаем, что

$$Lu(P_0) = f(x_0,t_0,u_1(x_0,t_0), D_x u_1(x_0,t_0)) - \\ - f(x_0,t_0,u_2(x_0,t_0), D_x u_2(x_0,t_0)) > 0.$$

С другой стороны, при доказательстве слабого принципа максимума мы доказали, что

$$Lu(P_0) \leqslant 0$$

в каждой точке $P_0 = (x_0,t_0) \in D \cup B_T$, в которой $u(x,t)$ имеет локальный положительный максимум. Пришли к противоречию. А на параболической границе $\partial' D = B \cup S$ имеет место равенство

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Итак, $u(x,t) = 0$ всюду в $\overline{D}$.

[1)] Заметим, что в точках $(x,t) \in \partial' D = S \cup B$ имеют место равенства $u_1(x,t) = \psi(x,t) = u_2(x,t)$.

Шаг 2. Чтобы доказать теорему в общем случае, сделаем преобразование

$$v(x,t) = e^{-\lambda t}u(x,t) \Rightarrow Lu(x,t) = e^{\lambda t}Lv(x,t) - \lambda e^{\lambda t}v(x,t),$$

которое переводит уравнение (1.5) в следующее:

$$(L - c(x,t)I)v(x,t) = \widehat{f}(x,t,v,D_x v) \overset{\text{def}}{=}$$
$$= f(x,t,ve^{\lambda t}, e^{\lambda t}D_x v)e^{-\lambda t} + (\lambda - c(x,t))v.$$

Выберем

$$\lambda > \sup_{(x,t)\in D} c(x,t),$$

тогда функция $\widehat{f}(x,t,v,D_x v)$ будет строго возрастающей по v, а коэффициент при $v(x,t)$ в выражении

$$(L - c(x,t)I)v(x,t)$$

равен нулю. Таким образом, осталось применить результат, полученный на первом шаге.

Теорема доказана.

Обратно параболическое уравнение. Интересным представляется результат о принципе максимума для решений обратно параболического уравнения следующего вида:

$$L_p u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad D \cup \gamma_0(D)\ ^{1)}, \tag{1.7}$$

где

$$L_p u(x,t) \overset{\text{def}}{=}$$
$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.8}$$

Заметим, что по аналогии с пространством $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ нам нужно определить пространство $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$. В этом случае

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma_0(D))$$

в том случае, если $(x,t) \in \gamma_0(D)$, где мы положили по определению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D_t^+ u(x,t), & \text{если} \quad (x,t) \in \gamma_0(D). \end{cases}$$

[1] Напомним, что $\gamma_0(D)$ — это нижняя крышка области D, а $\gamma(D)$ — это верхняя крышка.

Заметим, что справедлив следующий слабый принцип максимума для решений $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ обратно параболического уравнения (1.8).

Л е м м а 2. *Предположим, что либо $L_p u(x,t) > 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$, либо $L_p u(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$. Тогда $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ не может иметь положительного локального максимума в $D \cup \gamma_0(D)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Доказательство этого утверждения в целом повторяет доказательство леммы 1. Одно важное изменение относится к случаю, когда локальный положительный максимум $M > 0$ решения дифференциального неравенства достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$. В этом случае нужно доказать, что

$$D^+_t u(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

$\square$ Действительно, если $(x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$, то найдется связная часть B^{t_0} нижней крышки $\gamma_0(D)$ такая, что $(x_0, t_0) \in B^{t_0}$. Поскольку в этой точке достигается локальный максимум, то найдется такое $h > 0$, что имеет место неравенство

$$\frac{u(x_0, t_0) - u(x_0, t)}{t_0 - t} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0, t) \in \text{Ц}^{t_0, t_0+h}_{x_0, h},$$

поскольку $t > t_0$, а $u(x_0, t_0) \geqslant u(x_0, t)$ при $(x_0, t) \in \text{Ц}^{t_0, t_0+h}_{x_0, h}$.

Отсюда в пределе при $\text{Ц}^{t_0, t_0+h}_{x_0, h} \ni (x_0, t) \to (x_0, t_0)$ мы получим неравенство

$$D^+_t u(x_0, t_0) \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

Дальнейшие рассуждения в точности повторяются.

Л е м м а д о к а з а н а.

§ 2. Слабый принцип максимума в цилиндрической области

Рассмотрим частный случай цилиндрической ограниченной области $D = \Omega \otimes (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Справедлив следующий принцип максимума: [1])

Т е о р е м а 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, выполнены условия* (B) *и* (C) *относительно коэффициентов параболического оператора L в области D и $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D, \tag{2.1}$$

[1]) В этой теореме есть усиление по сравнению с леммой 1, поскольку в теореме выполнены условия $Lu(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) \leqslant 0$.

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\Omega} \otimes \{t=0\} \cup \partial\Omega \otimes (0,T)\ ^{1)}. \quad (2.2)$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство.

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \quad (2.3)$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение. [2] Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}.$$

Поэтому $z_\gamma \notin \overline{B}_T$ и $z_\gamma \in D \cup \partial'' D$.

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае (как и ранее при доказательстве слабого принципа максимума в лемме 1) имеем

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma) \frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = v_{x_i}(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Заметим, что имеет место равенство

$$-u_t = -v_t - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma}{T-t} = -v_t - \frac{\gamma}{(T-t)^2}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant Lu(z_\gamma) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma) \frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(z_\gamma) \frac{\partial v(z_\gamma)}{\partial x_i} + \\ + c(z_\gamma)u(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} \leqslant c(z_\gamma)u(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} \leqslant \\ \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} + c(z_\gamma)v(z_\gamma) + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t_\gamma} \leqslant \\ \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t_\gamma)^2} + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t_\gamma} < 0. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

[1] Граница $\partial'' D \subset \partial' D$.

[2] Если максимальное значение неположительно, то предельным переходом при $\gamma \to +0$ мы получим сразу же требуемое утверждение.

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что $v(x,t) \leqslant 0$ в D. Кроме того, в силу условия (2.2) имеем $v(x,t) \leqslant 0$ на $\partial'' D$ Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \cup \partial'' D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D \cup \partial'' D.$$

Поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D \cup \partial'' D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D \cup \partial'' D.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим обобщение этой теоремы на случай неограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C) *и* $u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ [1]. *Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D, \tag{2.4}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \overline{\Omega},\ t = 0\} \cup \{x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}. \tag{2.5}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$v_0(x,t) = \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t), \quad \lambda > 0. \tag{2.6}$$

Непосредственно можно проверить, что выполнено неравенство

$$Lv_0(x,t) \leqslant 0 \tag{2.7}$$

для достаточно большой константе $\lambda > 0$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i} = \operatorname{sh}(|x|)\frac{x_i}{|x|}\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\operatorname{ch}(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\delta_{ij} - \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \lambda \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t).$$

---

[1] Т. е. функция $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ и ограничена в D. Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ является неограниченной.

Теперь нужно отдельно рассмотреть случаи $|x| \leqslant \delta$ и $\delta \leqslant |x|$, где $\delta \in (0, 1)$ достаточно мало. Предположим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M, \quad |c(x,t)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Рассмотрим случай $|x| \leqslant \delta$. Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\frac{|\operatorname{sh}(|x|)|}{|x|} \leqslant 2, \quad 1 \leqslant \operatorname{ch}(|x|) \leqslant 2 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \delta.$$

Поэтому имеют место следующие оценки:

$$\left| \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leqslant 6MN^2 \exp(\lambda t), \tag{2.8}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i} \right| \leqslant MN2\delta \exp(\lambda t), \tag{2.9}$$

$$|c(x,t) v_0(x,t)| \leqslant 2M \exp(\lambda t), \tag{2.10}$$

$$-\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{ch}(|x|) \exp(\lambda t) \leqslant -\lambda \exp(\lambda t). \tag{2.11}$$

В силу (2.8)–(2.11) мы приходим к следующему неравенству:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \Big[6MN^2 + 2MN\delta + 2M - \lambda\Big] \exp(\lambda t) \leqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D \cap \{|x| \leqslant \delta\}$ при условии, что $\lambda > 0$ достаточно велико.

Рассмотрим теперь случай $|x| \geqslant \delta$. Тогда справедливы оценки

$$|\operatorname{sh}(|x|)| \leqslant e^{|x|}, \quad \frac{e^{|x|}}{2} \leqslant \operatorname{ch}(|x|) \leqslant e^{|x|}, \quad \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

С учетом этих неравенств приходим к следующему выражению:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \left[e^{|x|} MN^2 \left(1 + \frac{2}{\delta}\right) + e^{|x|} MN + e^{|x|} M - \frac{1}{2} e^{|x|} \lambda\right] \exp(\lambda t) \leqslant 0$$

при условии, что $\lambda > 0$ достаточно велико. Итак, неравенство (2.7) доказано. ⊠

Шаг 2. Положим

$$m := \sup_{(x,t) \in D} |u(x,t)|, \quad D_{T,R} \stackrel{\text{def}}{=} [\Omega \cap B_R] \otimes (0,T), \tag{2.12}$$

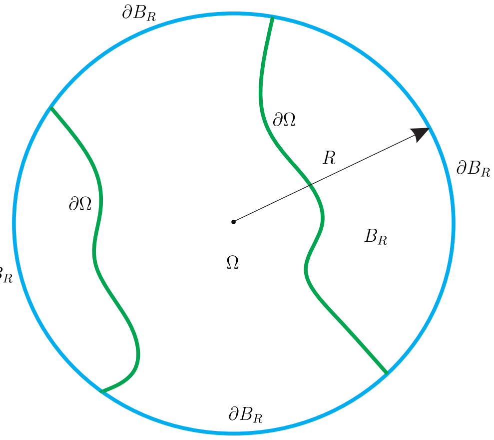

Рис. 14. Множество $\Omega \cap B_R$.

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\}$. Тогда функция

$$w_R(x,t) := u(x,t) - v_0(x,t)\frac{m}{\mathrm{ch}(R)} \tag{2.13}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \partial^{'} D_{T,R}. \tag{2.14}$$

□ Действительно, в силу условия (2.5) $u(x,t) \leqslant 0$ на $\partial^{'} D$ и поэтому $w_R(x,t) \leqslant 0$ на $\partial^{'} D \cap B_R$, а при $x \in \partial B_R$ имеем

$$w_R(x,t)\Big|_{|x|=R} = (u(x,t) - me^{\lambda t})\Big|_{|x|=R} \leqslant (u(x,t) - m)\Big|_{|x|=R} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, из неравенств (2.4) и (2.7) имеем

$$Lw_R(x,t) \geqslant 0. \tag{2.15}$$

В силу ограниченности области $D_{T,R}$ выполнен результат теоремы 2

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T,R} \Rightarrow u(x,t) \leqslant v_0(x,t)\frac{m}{\mathrm{ch}\, R}.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ получим результат теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что в формулировке теорем 2 и 3 мы используем понятие ограниченного решения, а именно условие, что решение $u(x,t)$ ограничено в рассматриваемой цилиндрической области.

Лекция 10

СИЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

§ 1. Сильный принцип максимума

Доказательство основного утверждения этого параграфа — сильного принципа максимума, мы будем проводить для произвольной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Нам потребуются новые понятия.

Обозначения. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x, t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим связную компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$. Отметим, что может быть так, что $D \cap \{t = t_0\} \notin S(P_0)$. Приведите сами пример!

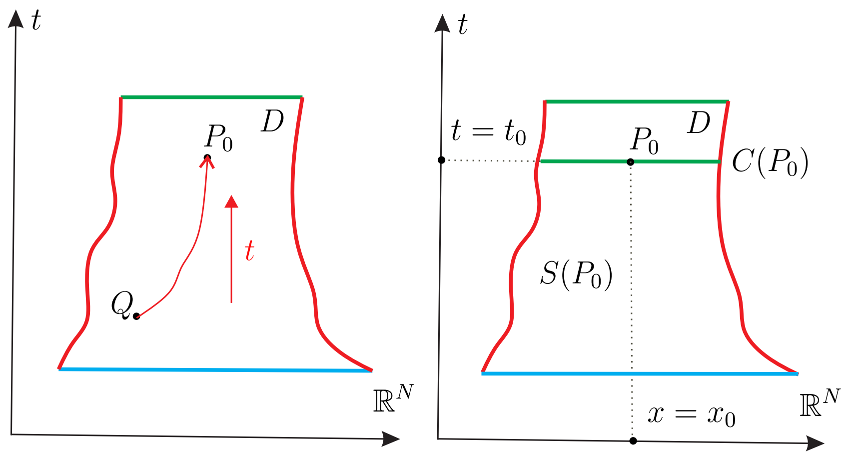

Рис. 15. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этой лекции, называемое сильным принципом максимума.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ *имеет в* D *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *ко-*

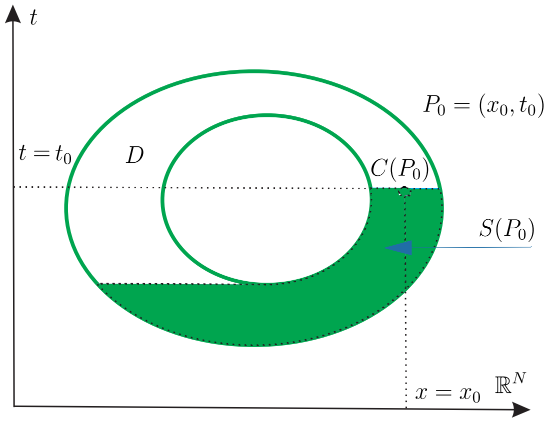

Рис. 16. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

торый достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(x,t) = u(P_0)$ *для всех* $(x,t) \in S(P_0)$.

Доказательство теоремы. Докажем эту теорему в случае, если функция $u(x,t)$ имеет глобальный положительный максимум M в D. Для того чтобы доказать эту важную теорему нам нужно доказать ряд вспомогательных лемм.

Этап I. Докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D *и* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ *имеет положительный глобальный максимум* M *в точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in D$. *Предположим, что* D *содержит замкнутый эллипсоид* E :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2,$$

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad R > 0, \quad i = \overline{1, N}$$

и что $u(x,t) < M$ *во внутренних точках* $(x,t) \in E$ *и* $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$ *в точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ *на границе* ∂E *эллипсоида* E. *Тогда* $\overline{x} = x^*$, *где* $x^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ — это единственная точка на ∂E, в которой $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$, так как в противном случае [1] мы можем взять меньший замкнутый эллипсоид e, лежащий в E и имеющий единственную общую точку $\overline{P}$ с ∂E (см. рисунок 18).

[1] Заметим, что $u(x,t) < M$ во всех внутренних точках эллипсоида E.

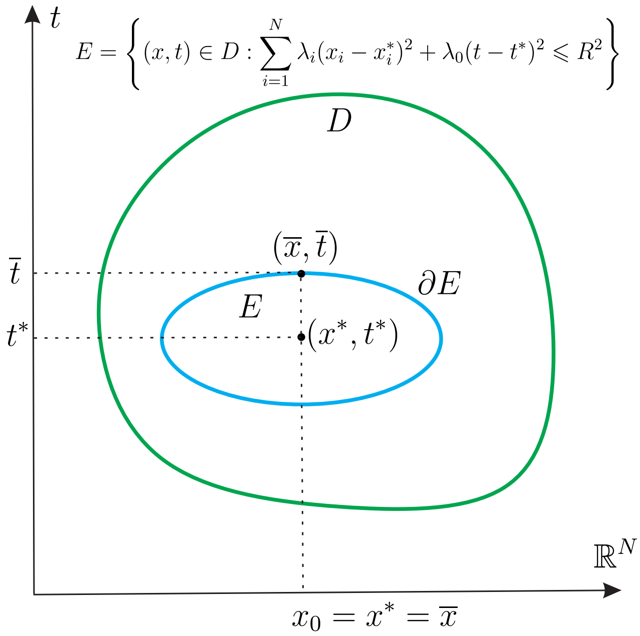

Рис. 17. Эллипсоид E в формулировке леммы 1.

Шаг 2. Предположим, что $\overline{x} \neq x^*$, и пусть C — это $(N+1)$–мерный шар, замыкание которого $\overline{C}$ содержится в D, с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ и радиусом $r > 0$ меньшим, чем $|\overline{x} - x^*|$. Тогда

$$|x - x^*| \geqslant \beta > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{C}. \tag{1.1}$$

Граница шара C состоит из части $\partial C_1 \subset E$, и части ∂C_2, лежащей вне эллипсоида E (см. рисунок 19). Очевидно, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$u(x,t) \leqslant M - \delta \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial C_1, \tag{1.2}$$

поскольку по построению эллипсоида $E \subset D$ максимум M функции $u(x,t)$ достигается только в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E$ (см. шаг 1).

Шаг 3. Введём следующую функцию:

$$h(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{ -\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0 \left(t - t^*\right)^2 \right] \right\} - \\ - \exp\left[-\alpha R^2 \right], \quad \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что по построению функция $h = h(x,t) > 0$ внутри E, равна нулю на границе ∂E и меньше нуля при $(x,t) \in D \backslash E$, т. е. вне замкнутого эллипсоида E. Кроме того, заметим, что

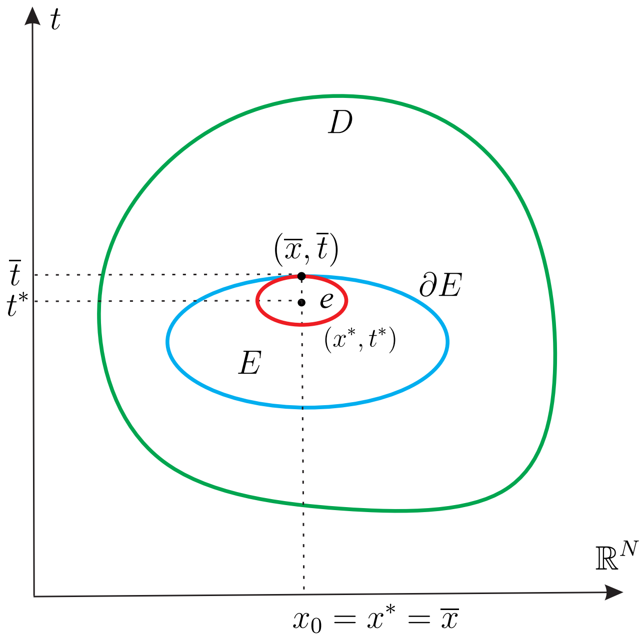

Рис. 18. Вложенный эллипсоид e.

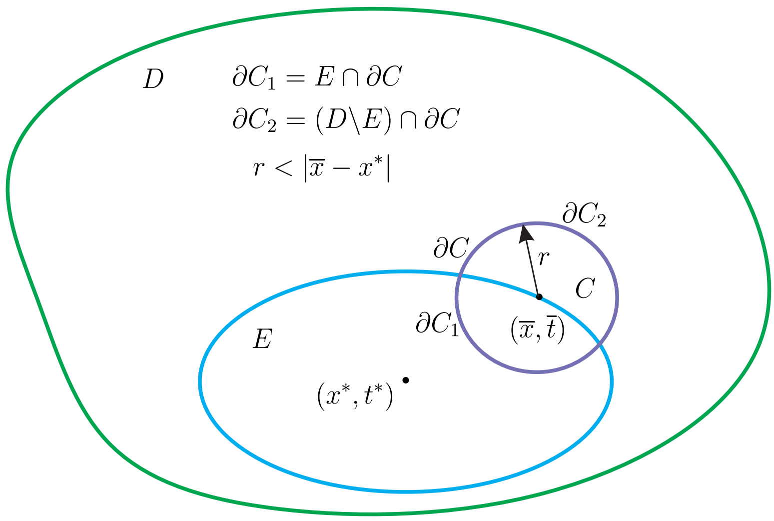

Рис. 19. Шар C.

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\} Lh(x,t) =$$

$$= \left\{ 4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) - \right.$$

$$\left. - 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i \left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0 \left(t - t^*\right) \right] + c(x,t) \right\} -$$

$$- c(x,t) \exp\left[-\alpha R^2\right] \exp\left\{ \alpha \left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0 \left(t - t^*\right)^2 \right] \right\}. \quad (1.4)$$

Поскольку в шаре C выполнено неравенство (1.1), то *слагаемые в первых фигурных скобках в равенстве* (1.4) *будет больше нуля при достаточно большом* $\alpha > 0$.

□ Действительно, поскольку выполнено условие (A), то имеет место неравенство (2.4), из которого вытекает цепочка оценок снизу

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) \geqslant$$

$$\geqslant m \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 |x_j - x_j^*|^2 \geqslant m\lambda^2 \sum_{i=1}^{N} |x_j - x_j^*|^2 = m\lambda^2 |x - x^*|^2 \geqslant$$

$$\geqslant m\lambda^2\beta^2 =: d > 0, \quad \lambda := \min_{i=\overline{1,N}} \lambda_i > 0, \quad m = m(\overline{C}) > 0 \quad (1.5)$$

для всех $(x,t) \in \overline{C} \subset D$ [1]. Кроме того, поскольку выполнено условие (B), то найдётся такая постоянная $K_1 > 0$, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{C}} |a_{ij}(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}} |b_i(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}} |c(x,t)| \leqslant K_1.$$

Поэтому имеет место следующая оценка:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i \left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0 \left(t - t^*\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant K_1 N \overline{\lambda} + K_1 N \overline{\lambda} \sup_{(x,t)\in\overline{C}} |x - x^*| +$$

$$+ \lambda_0 \sup_{(x,t)\in\overline{C}} |t - t^*| =: K_2 < +\infty, \quad \overline{\lambda} := \max_{i=\overline{1,N}} \lambda_i. \quad (1.6)$$

В силу неравенств (1.5) и (1.6) вытекает следующая оценка снизу:

$$4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) -$$

---

[1] Очевидно, $\overline{C}$ компактное множество в $\mathbb{R}^{N+1}$.

$$- 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\,(x_i - x_i^*) - \lambda_0\,(t - t^*) \right] + \\ + c(x,t) \geqslant 4\alpha^2 d - 2\alpha K_2 - K_1 > 0 \quad (1.7)$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ☒

Последний член больше или равен нуля, так как $c(x,t) \leqslant 0$. Итак,

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C \tag{1.8}$$

для достаточно большого $\alpha > 0$.

Шаг 4. Рассмотрим теперь в шаре C функцию

$$v(x,t) \overset{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.9}$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое (по сравнению с $\delta > 0$ из неравенства (1.2)), то $v(x,t) < M$ на ∂C_1 в силу (1.2). На ∂C_2 функция $u(x,t) \leqslant M$ и $h(x,t) < 0$, поэтому $v(x,t) < M$. Таким образом,

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad \partial C \tag{1.10}$$

при малом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$h(\overline{P}) = 0 \Rightarrow v(\overline{P}) = u(\overline{P}) = M. \tag{1.11}$$

Отсюда заключаем, что $v(x,t) < M$ на границе шара C и принимает максимальное положительное значение M в центре шара $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$. При этом выполнено неравенство (1.8), в силу которого имеем

$$Lv(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C.$$

Следовательно, мы пришли в противоречие со слабым принципом максимума (см. лемму 1). Значит, имеет место равенство $\overline{x} = x^*$.

Лемма доказана.

Этап II. Теперь мы докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Если $Lu \geqslant 0$ в области D и если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ имеет положительный глобальный максимум в D, который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in C(P_0)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда в $C(P_0)$ найдется точка $P_1 = (x_1, t_0)$, в которой $u(P_1) < u(P_0)$. Соединим P_1 с P_0 простой непрерывной кривой $\gamma \subset C(P_0)$. На γ существует точка $P^* = (x^*, t_0)$, в которой $u(P^*) = u(P_0)$, и такая, что $u(\overline{P}) < u(P_0)$ для всех $\overline{P} = (\overline{x}, t)$, лежащих на γ между P_1 и P^*.

Возьмем точку $\overline{P}$ на γ между P_1 и P^* так [1], чтобы расстояние $d(\overline{P}, \partial C(P_0))$ до границы $\partial C(P_0)$ удовлетворяло неравенству

$$d(\overline{P}, \partial C(P_0)) \geqslant 2d(\overline{P}, P^*). \tag{1.12}$$

[1] Просто нужно взять точку $\overline{P}$ достаточно близкой к точке P^*.

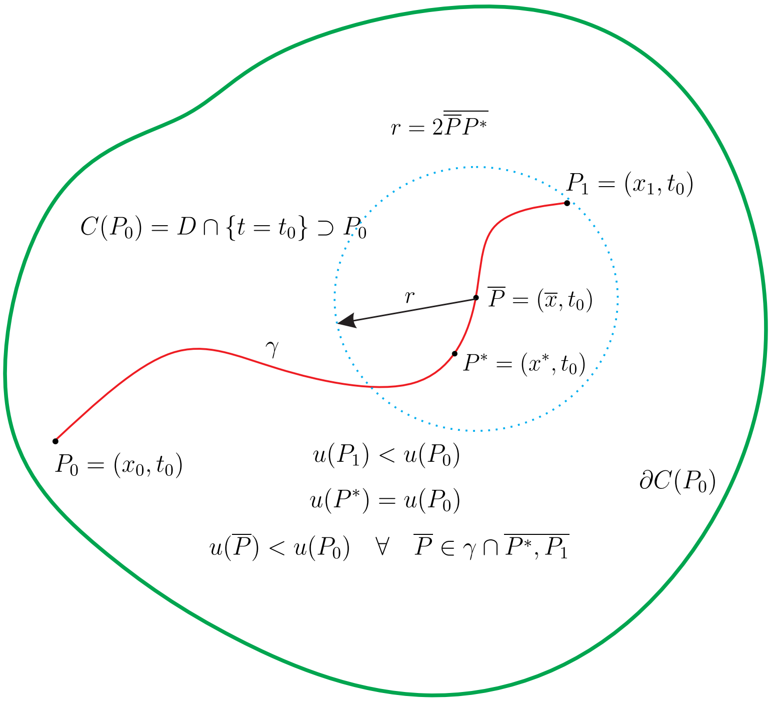

Рис. 20. Кривая $\gamma \in C(P_0)$.

Шаг 2. Поскольку $u(\overline{P}) < u(P^*) = u(P_0)$, существует достаточно малый отрезок σ_0, определяемый соотношениями

$$\overline{P} = (\overline{x}, t_0) \in \sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \overline{x}, \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon\}, \tag{1.13}$$

для всех точек $P = (\overline{x}, t) \in \sigma_0$ которого

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0). \tag{1.14}$$

Фиксируем это $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим семейство эллипсоидов $E_\lambda \subset D$:

$$E_\lambda := \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - \overline{x}|^2 + \lambda(t - t_0)^2 \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}. \tag{1.15}$$

Прежде всего заметим, что концы интервала σ_0 будут лежать на границе эллипсоида E_λ.

$\square$ Действительно, положим $x = \overline{x}$ в уравнении эллипсоида E_λ и получим неравенство

$$|t - t_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (x = \overline{x}, t) \in \sigma_0. \quad \boxtimes$$

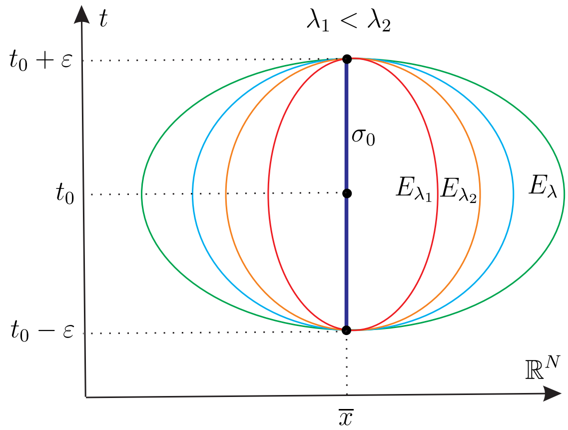

Рис. 21. Семейство E_λ и интервал σ_0.

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что справедливо предельное свойство (см. рисунок 21)

$$E_\lambda \to \sigma_0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{1.16}$$

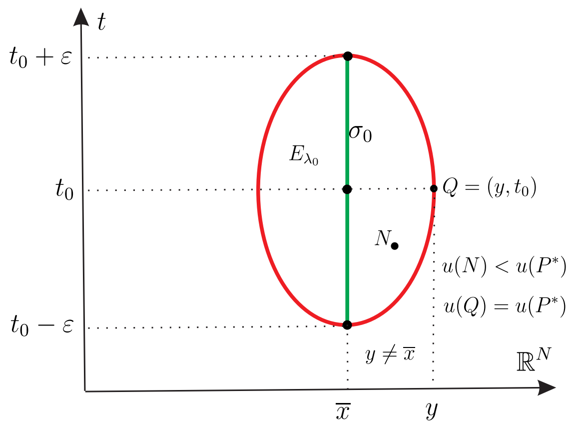

Рис. 22. Минимальный эллипсоид E_{λ_0}.

С другой стороны, при $t = t_0$ имеем

$$E_\lambda \cap \{t = t_0\} = \Big\{(x, t_0) : \ x \in \mathbb{R}^N, \quad |x - \overline{x}| \leqslant \lambda \varepsilon^2\Big\}.$$

Поэтому при возрастании $\lambda > 0$ пересечение $E_\lambda \cap \{t = t_0\}$ неограниченно возрастает.

Следовательно, в силу неравенства (1.14) существует такое минимальное $\lambda = \lambda_0 > 0$, что $u(x, t) < u(P^*) = u(P_0)$ внутри E_{λ_0} и $u(y, t_0) = u(P^*) = u(P_0)$ в некоторой точке $Q = (y, t_0) \in \partial E_{\lambda_0}$.

В силу (1.14) точка Q не может принадлежать интервалу σ_0 (см. рисунок 22), поскольку для всех $P \in \sigma_0$ имеем

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0)$$

и поэтому $y \neq \overline{x}$, но это противоречит результату леммы 1.

Лемма доказана.

Этап III. Докажем теперь следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть R — это параллелепипед*

$$x_{0i} - a_i \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a_i, \quad t_0 - a_0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i = 1, 2, ..., N, \qquad (1.17)$$

достаточно малого размера, содержащийся в D, [1] *и пусть $Lu \geqslant 0$ в D. Если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ достигает в точке $P_0 = (x_0, t_0)$* [2] *положительный глобальный максимум на D, тогда $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in R$.*

Доказательство.

Шаг 1. Предположим, что лемма неверна. Тогда в параллелепипеде R должна найтись точка $Q \in R$, такая, что $u(Q) < u(P_0)$. Поскольку $u(x,t) < u(P_0)$ также и в некоторой окрестности Q, можно предполагать, что точка Q не лежит на гиперплоскости $t = t_0$. В противном случае просто нужно взять параллелепипед с верхним основанием на гиперплоскости $t = t_0$, но меньших размеров.

На отрезке γ_{Q,P_1} кривой γ, соединяющей Q с P_0 и целиком лежащей в R, существует точка P_1, такая, что $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1}$$

Без ограничения общности, можно считать, что $P_1 = P_0$ и точка Q лежит на гиперплоскости $t = t_0 - a_0$, поскольку в противном случае можно взять параллелепипед, меньших размеров (см. рисунок 23).

Шаг 2. Обозначим через R_0 параллелепипед R без верхней грани $t = t_0$. Для каждой точки $Q^{'} \in R_0$ компонента $C(Q^{'})$ содержит некоторую точку из γ, но $u(x,t) < u(P_0)$ в точках $(x,t) \in \gamma$. Поэтому если в некоторой точке $Q^{'}$ будет выполнено равенство $u(Q^{'}) = u(P_0)$, то в силу предыдущей леммы мы бы имели, что $u(Q^{'}) = u(P_0)$ для всех $Q^{'} \in C(Q^{'})$ и, значит, и в точках кривой γ.

Следовательно, в каждой точке $Q^{'} \in R_0$ выполнено следующее неравенство:

$$u(Q^{'}) < u(P_0) \quad \text{для всех} \quad Q^{'} \in R_0. \qquad (1.18)$$

Шаг 3. Введем функцию

$$h(x,t) := t_0 - t - K|x - x_0|^2, \quad K > 0. \qquad (1.19)$$

---

[1] Для этого достаточно взять числа $a_i > 0$ и $a_0 > 0$ достаточно малыми, поскольку точка P_0 внутренняя в D.

[2] $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0N})$.

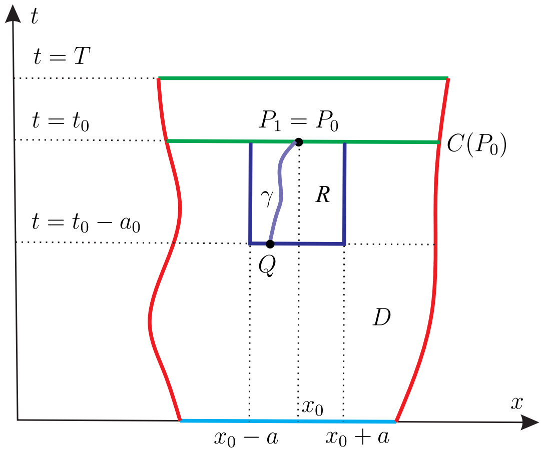

Рис. 23. Кривая γ и точка Q.

На параболоиде

$$M: \quad t_0 - t = K|x - x_0|^2$$

имеем $h(x,t) = 0$; выше параболоида M функция $h(x,t) < 0$, а ниже параболоида M имеем $h(x,t) > 0$. Кроме того, непосредственным вы-

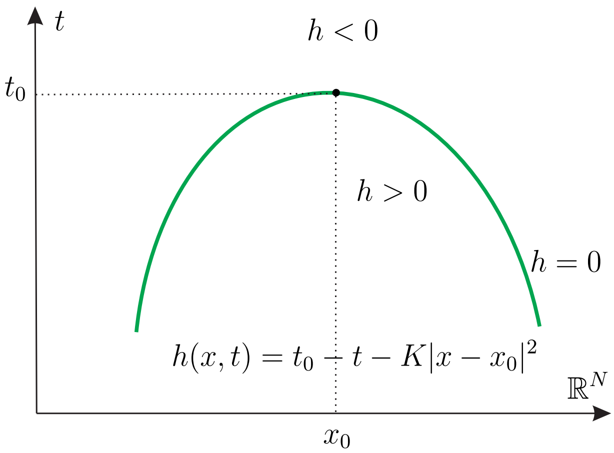

Рис. 24. Параболоид $h(x,t) = 0$.

числением получим, что

$$Lh(x,t) = -2K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - 2K\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - x_{0i}) + \\ + c(x,t)\left[t_0 - t - K|x - x_0|^2\right] + 1 > 0 \quad \text{в} \quad R, \tag{1.20}$$

если потребовать, чтобы $K > 0$ было мало настолько, что

$$4K \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 1 \quad \text{в} \quad R$$

и размеры параллелепипеда R достаточно малы. [1])

Шаг 4. Параболоид M разбивает параллелепипед R на две части. Обозначим часть, лежащую ниже параболоида M $(h > 0)$ через $R^{'}$. Верхняя граница $B^{'}$ множества $R^{'}$ касается гиперплоскости $t = t_0$ только в точке $P_0 = (x_0, t_0)$. Поэтому на остальной части $B^{''}$ границы

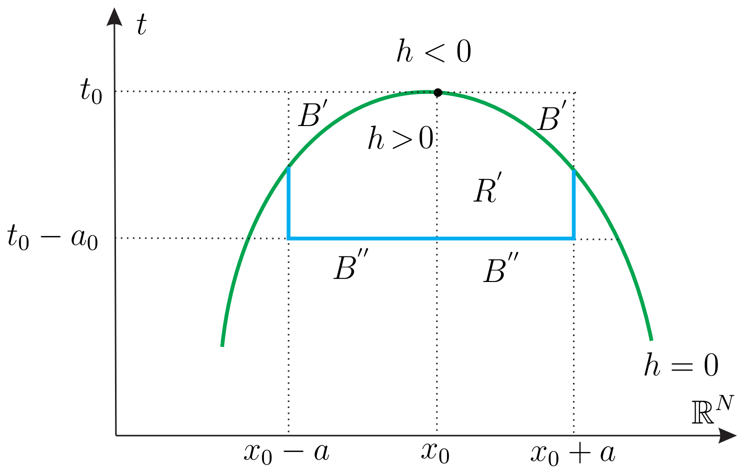

Рис. 25. Множество $R^{'}$.

$R^{'}$ получим

$$u(x,t) \leqslant u(P_0) - \delta \quad \text{для некоторого} \quad \delta > 0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \tag{1.21}$$

имеем

$$v(x,t) < u(P_0) \quad \text{при} \quad (x,t) \in B^{''} \tag{1.22}$$

для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Далее во всех точках верхней границы $B^{'}$ за исключением точки P_0, имеем

$$v(x,t) = u(x,t) < u(P_0), \quad v(P_0) = u(P_0), \tag{1.23}$$

[1]) Тогда выражения $|t_0 - t|$ и $|x - x_0|$ тоже будут малы.

потому что на $B^{'}$ имеем $h(x,t)=0$. Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in R^{'},$$

то в силу леммы 1 заключаем, что положительный строгий максимум функции $v(x,t)$ достигается на границе $\partial R^{'}$, точнее в точке P_0. Следовательно [1],

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} = D_t^{-} v(P_0) \geqslant 0, \quad \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} = -1 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = D_t^{-} v(P_0) - \varepsilon \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} > 0. \tag{1.24}$$

Замечание 1. Докажем неравенство

$$D_t^{-} v(P_0) \geqslant 0.$$

□ Действительно, поскольку функция $v(x,t)$ дифференцируема в окрестности точки P_0 и в этой точке у функции $v(x,t)$ строгий максимум, то при $t < t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{v(x_0,t_0) - v(x_0,t)}{t_0 - t} > 0 \Rightarrow D_t^{-} v(P_0) \geqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, из предположения, что $u(x,t)$ достигает положительного максимума в точке P_0 и условия $c(x,t) \leqslant 0$ находим, что

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0, \quad c(P_0)u(P_0) \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant Lu(P_0) \leqslant -\frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству (1.24).

Лемма доказана.

Этап IV. Теперь мы можем доказать утверждение теоремы 1.

Шаг 1. Предположим, что

$$u(x,t) \not\equiv u(P_0) \quad \text{в} \quad S(P_0).$$

Тогда найдется такая точка $Q \in S(P_0)$, что $u(Q) < u(P_0)$. Соединим точки Q и P_0 простой непрерывной кривой γ, расположенной в $S(P_0)$

[1] Неравенство $\partial v(P_0)/\partial t \geqslant 0$ выполнено, поскольку производная берется по времени в сторону возрастания времени, а в точке P_0 у функции $v(x,t)$ максимум.

так, чтобы t–координата не убывала от точки Q к точке P_0 (такая кривая существует согласно определению $S(P_0)$). На кривой γ существует точка P_1, в которой $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех точек} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1},$$

где мы обозначили через γ_{Q,P_1} часть кривой γ между Q и P_1.

Шаг 2. Теперь построим параллелепипед

$$x_{1i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{1i} + a, \quad t_1 - a \leqslant t \leqslant t_1, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1N}, t_1)$ и постоянная $a > 0$ настолько мала, что параллелепипед лежит в D. Из леммы 3 вытекает, что $u \equiv u(P_1)$ в этом параллелепипеде, а поэтому и на части кривой γ_{Q,P_1}, попадающей в параллелепипед. Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Справедливо следующее важное усиление этой теоремы:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* $D \cup \gamma(D)$ *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$, *где* $S(P_0)$ *определяется точно также как и ранее, но относительно* $D \cup \gamma(D)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из утверждения леммы 3 с учетом определения

$$D^-_t u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma(D).$$

Теорема доказана.

§ 2. Следствия из принципа максимума

Можно доказать, что для любой точки $P_0 \in D \cup \gamma(D)$ имеем $\overline{S(P_0)} \cap \cap\, \partial' D \neq \varnothing$. Справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область, справедливы свойства* (A), (B) *и* (C) *и выполнено равенство* $Lu(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in D \cup \gamma(D)$, *тогда для решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \cap\, \mathbb{C}(\overline{D})$ *справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| = \max_{(x,t)\in\partial' D} |u(x,t)| \tag{2.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Введём следующее обозначение:

$$M := \max_{(x,t)\in\partial' D} |u(x,t)|. \tag{2.2}$$

Тогда для новой функции

$$v(x,t) := u(x,t) - M$$

имеем

$$Lv(x,t) = -c(x,t)M \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$
$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D.$$

Если в некоторой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$ достигается положительный глобальный максимум

$$v(P_0) = M_1 > 0,$$

то это в сильного принципа максимума теоремы 2 означает, что

$$v(x,t) = M_1 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Поскольку $\overline{S(P_0)} \cap \partial^{'} D \neq \varnothing$ и $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, мы приходим к противоречию, поскольку $v(x,t) \leqslant 0$ на $\partial^{'} D$. Полученное противоречие означает, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D) \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D).$$

Шаг 2. Поскольку функция $-u(x,t)$ является решением уравнения $L(-u) = 0$, то применяя результат шага 1 для функции $-u(x,t)$ мы получим оценку

$$-u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial^{'} D.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* $D \cup \gamma(D)$, *то для решения* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *выполнено неравенство*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \sup_{(x,t)\in\partial^{'} D} |u(x,t)|. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Достаточно применить результат следствия 1 к функции

$$v(x,t) = u(x,t)e^{-c_0 t} \Rightarrow (L - c_0)v(x,t) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} |v(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial^{'} D} |v(x,t)| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial^{'} D} |u(x,t)|$$

и получить неравенство.

Следствие доказано.

Замечание 2. Важно отметить, что утверждение сильного принципа максимума относится не к локальному максимуму или минимуму в области D, а к глобальному максимуму или минимуму.

Замечание 3. Заметим, что если в операторе L коэффициент $c(x,t) = 0$, то слова положительный максимум и отрицательный минимум можно заменить на максимум и минимум соответственно.

Замечание 4. В утверждении теоремы 2 участвуют только точки $D \cup \gamma(D)$. А для точек множества $\partial\gamma(D)$ (граница $\gamma(D)$) результат теоремы может не иметь место. Рассмотрим следующий пример [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in (0,L) \otimes (0,T).$$

Рассмотрим его решение $u(x,t) = x^2 + 2t$, которое, очевидно, достигает строго максимума в точке $(L,T) \in \partial B_T$. Однако, решение не является константой в рассматриваемой цилиндрической области D.

Обратно параболическое уравнение. Пусть $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$. Определим $S_p(P_0)$ как такое множество точек $Q \in \in D \cup \gamma_0(D)$, которые можно соединить некоторой простой непрерывной кривой $\gamma_{Q,P_0} \in D \cup \gamma_0(D)$ с точкой P_0 таким образом, чтобы вдоль нее координата t не возрастала. Для обратно параболического оператора

$$L_p u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

справедлив сильный принцип максимума.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $L_p u \geqslant 0$ ($L_p u \leqslant 0$) *в* $D \cup \gamma_0(D)$ *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma_0(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S_p(P_0)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из утверждения леммы 3 с учетом определения

$$D_t^+ u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma_0(D).$$

Теорема доказана.

§ 3. Первая краевая задача

Напомним ряд обозначений, используемых в этом параграфе. Пусть D — ограниченная $(N+1)$–мерная область в $\mathbb{R}^{N+1}$, и пусть $(x,t) = = (x_1, ..., x_N, t)$ — переменная точка в $\mathbb{R}^{N+1}$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из связной нижней крышки B, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, из связной верхней крышки B_T, лежащей на гиперплоскости $t = T > 0$, и боковой границы $S := \partial D \backslash (B \cup B_T)$ (возможно, не связной), лежащей в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$. Напомним, что множество $\partial' D := S \cup B$ называется нормальной или параболической границей области D.

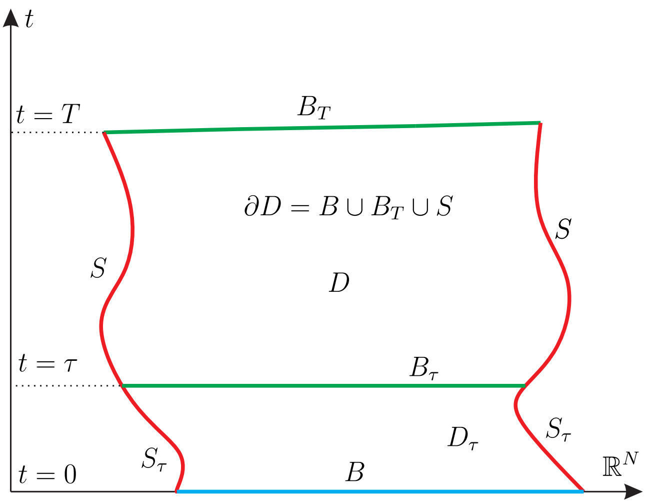

Рис. 26. Область D и ее подмножества.

Введем обозначения

$$D_\tau := D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau := D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau := S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

Допустим, что для каждого τ, $0 < \tau < T$, B_τ — область (связное открытое множество). В частности, на рисунке 30 область D удовлетворяет этому условию.

Напомним постановку первой краевой задачи.

Первая краевая задача. *Первая краевая задача состоит в нахождении классического решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_T) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{3.1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) \in \mathbb{C}(\overline{B}) \quad \text{на} \quad \overline{B} \tag{3.2}$$

и граничным условиям

$$u(x,t) = g(x,t) \in \mathbb{C}(S) \quad \text{на} \quad S, \tag{3.3}$$

где f, φ, g — это заданные функции и L — параболический оператор.

Замечание 5. Условия (3.2) и (3.3) можно объединить в одно

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \quad h(x,t) \in \mathbb{C}(B \cup S). \tag{3.4}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A) *и* (B). *Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $c(x,t) \leqslant 0$ и $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — это два решения первой краевой задачи (3.1)—(3.3). Тогда для функции

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

мы получим соответствующую однородную задачу. Предположим, что $v(x,t) \not\equiv 0$. Тогда можно без ограничения общности предположить, что

$$M := \max_{(x,t) \in \overline{D}} v(x,t) > 0.$$

Пусть $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{D}$ — точка в которой достигается положительный максимум. Ясно, что

$$v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D = S \cup B \text{ }^{1)}. \tag{3.5}$$

Поэтому положительный максимум может достигаться лишь только на $D \cup B_T$. Однако, если $(x_0, t_0) \in D \cup B_T$, то согласно сильному принципу максимума теоремы 2 приходим к выводу о том, что

$$v(x,t) = M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Осталось воспользоваться тем, что $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и тем, что $\overline{B} \subset \overline{S(P_0)}$. Следовательно,

$$v(x,0) = M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{B},$$

что противоречит свойству (3.5).

Шаг 2. Пусть теперь функция $c(x,t)$ может быть положительной в области D. Положим по определению

$$c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,t) \in D} c(x,t) > 0.$$

Тогда перейдем к новой функции $w(x,t)$ следующего вида:

$$w(x,t) = e^{-c_0 t} u(x,t).$$

---

[1] Напомним, что $S := \partial D \setminus (B_T \cup B)$.

При этом уравнение $Lu(x,t) = 0$ перейдет в уравнение $(L - c_0)w(x,t) = 0$, в котором уже новый коэффициент $c(x,t) - c_0 \leqslant 0$. Далее рассуждаем как на шаге 1.

Теорема доказана.

Пример неединственности. [18] Заметим, что требование ограниченности коэффициентов параболического оператора L является существенным для применения принципа максимума с целью доказательства единственности решения первой краевой задачи. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{3.6}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{3.7}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{3.8}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (3.6)–(3.8).

Нелинейный параболический оператор. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.9}$$

где $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ — это нелинейная функция своих аргументов.

Определение 4. *Нелинейный оператор* L, *определенный формулой* (3.9), *называется параболическим в точке* $(x_0,t_0) \in D$, *если для любых* $p, p_1, \ldots, p_N, p_{11}, \ldots, p_{NN}$ *матрица*

$$\left(\frac{\partial F(x_0,t_0,p,p_i,p_{ij})}{\partial p_{ij}}\right) \tag{3.10}$$

является положительно определенной.

Заметим, что если функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (p,p_i,p_{ij}), то справедлива формула Адамара среднего значения

$$F(x,t,u,u_i,u_{ij}) - F(x,t,v,v_i,v_{ij}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(u_{ij} - v_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(u_i - v_i) + c(u - v), \tag{3.11}$$

где

$$(a_{ij}, b_i, c) =$$
$$= \int_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)(x, t, su + (1-s)v, su_i + (1-s)v_i, su_{ij} + (1-s)v_{ij})\, ds. \tag{3.12}$$

Воспользовавшись формулой (3.11) мы можем распространить результат теоремы 4 на нелинейный случай, что будет сделано ниже.

§ 4. Примеры решения задач

Задача 1. Сформулировать корректную (имеющую единственное решение) первую краевую задачу для обратно параболического уравнения в ограниченной области D.

Указание. Внимательно изучите сильный принцип максимума теоремы 3.

Лекция 11

ЗАДАЧА КОШИ

§ 1. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$D_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0, T], \quad D = \mathbb{R}^N \otimes [0, T].$$

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_0) \cap \mathbb{C}(D)$.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 1. *Пусть оператор L удовлетворяет предположению* (A), *все коэффициенты непрерывны в D и $c(x,t)$ ограничено сверху. Если $Lu(x,t) \leqslant 0$ в D_0, $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$ и равномерно по $t \in [0,T]$ существует*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} u(x,t) \geqslant 0,$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ в D.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что $c(x,t) < 0$, в противном случае мы бы сделали преобразование $v = ue^{-\gamma t}$ при

$$\gamma > \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]} c(x,t)$$

и получили уравнение для новой функции $v(x,t)$

$$[L - \gamma I]\, v(x,t) = 0.$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

а также при достаточно большом $R > 0$

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad |x| = R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

причём

$$L(u(x,t) + \varepsilon) = Lu(x,t) + c(x,t)\varepsilon \leqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + \varepsilon > 0,$$

если $|x| \leqslant R$ и $t \in [0,T]$ в силу слабого принципа максимума (см. теорему 2).

Шаг 2. Устремляя $\varepsilon \to +0$ мы получим утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \tag{1.1}$$

при $(x,t) \in D_0$ и $i,j = \overline{1,N}$. Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 1. *Пусть L — параболический оператор с коэффициентами, непрерывными в D_0 и удовлетворяющими условиям* (1.1). *Предположим, что $Lu(x,t) \leqslant 0$ в D_0 и*

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \tag{1.2}$$

для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $u(x,t) \geqslant 0$ в D.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right], \quad t \in [0, 1/(2\mu)], \tag{1.3}$$

удовлетворяющую равенству

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_ix_j + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) + \\ + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i + c(x,t) - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu. \tag{1.4}$$

□ Действительно,

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial x_i} = \frac{2kx_i}{1-\mu t}H(x,t), \quad \frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} + \nu\right)H(x,t),$$

$$\frac{\partial^2 H(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}x_ix_j + \frac{2k}{1-\mu t}\delta_{ij}\right)H(x,t). \quad ⊠$$

С помощью оценок (1.1) можно получить следующую оценку:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant \left(16k^2N^2M + 8kNM + M - \mu k\right)|x|^2 + (8kNM + M - \nu). \tag{1.5}$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова.

□ Действительно, с одной стороны, в силу условий (1.1) при $t = 1/(2\mu)$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_i x_j \leqslant 16k^2MN^2|x|^2,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 4kNM,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i \leqslant 4kNM(|x|+|x|^2) \leqslant 4kNM + 8kNM|x|^2,$$

С другой стороны,

$$-\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} \leqslant -\mu k|x|^2, \quad c(x,t) \leqslant M|x|^2 + M.$$

Из этих неравенств получим неравенство (1.5). ⊠

Таким образом, для любого $k > 0$ найдутся такие достаточно большие постоянные $\mu > 0$ и $\nu > 0$, что будет выполнено неравенство

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0. \tag{1.6}$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию $v(x,t)$, определённую равенством

$$v(x,t) := \frac{u(x,t)}{H(x,t)},$$

где $H(x,t)$ — это функция (1.3) с фиксированными $k > \beta$ и с $\mu > 0$ и $\nu > 0$, при которых выполняется неравенство (1.6) для $0 \leqslant t \leqslant 1/(2\mu)$. Заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$v(x,t) \geqslant -B\frac{\exp\left\{\beta|x|^2\right\}}{H(x,t)} \geqslant -B\exp\left[-(k-\beta)|x|^2\right]e^{-\nu t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \liminf_{|x|\to+\infty} v(x,t) \geqslant 0$$

равномерно по $t \in [0, 1/(2\mu)]$.

Шаг 3. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{L}v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N}\overline{b}_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \overline{f},$$

где

$$\overline{f} = \frac{Lu(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0, \quad \overline{b}_i = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \overline{c} = \frac{LH}{H} \leqslant 0.$$

□ Действительно, введём следующее обозначение:

$$f(x,t) := Lu(x,t).$$

В это выражение подставим функцию $u(x,t) = H(x,t)v(x,t)$. Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = H\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + 2\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}v(x,t);$$

$$\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} = H\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial H}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial H}{\partial t}.$$

В результате получим искомое равенство. ⊠

При помощи леммы 1 мы приходим к выводу о том, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0, 1/(2\mu)].$$

Шаг 4. Далее повторяем рассуждения из шагов 1–3 для замкнутой области $\mathbb{R}^N \otimes [1/(2\mu), 1/\mu]$ с функцией

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{2-\mu t} + \nu t\right].$$

Далее по индукции.

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, что доказанная теорема иногда носит название *теорема Фрагмена–Линделёфа*.

Из доказанной теоремы 1 непосредственно вытекает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть L — это параболический оператор с непрерывными в $\mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ коэффициенами и выполняются условия* (1.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{1.7}$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.8}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant B\exp\left[\beta|x|^2\right] \tag{1.9}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Доказательство.

Пусть $f(x,t)\equiv 0$ и $\varphi(x)\equiv 0$. Из условия (1.9) вытекает, что

$$u(x,t)\geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{либо} \quad -u(x,t)\geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right].$$

в первом случае из теоремы 1 получим, что $u(x,t)\geqslant 0$, а во втором случае получим, что $-u(x,t)\geqslant 0$. Итак, $u(x,t)\equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Виддера. [4] Отметим, что имеет место следующий важный результат: *любая неотрицательная функция, непрерывная в $\mathbb{R}^1\otimes[0,+\infty)$, равная нулю при $t=0$ и удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_{xx}-u_t=0 \quad \textit{в} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^1\otimes[0,+\infty),$$

равна нулю тождественно.

С другой стороны, А. Н. Тихонов предложил следующий пример:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!}x^{2k}, \quad g(t)=\exp(-t^2) \quad t>0, \quad g(0)=0, \tag{1.10}$$

который показывает, что условие знакоположительности существенно. Кроме того, функция (1.10) не удовлетворяет условию роста А. Н. Тихонова.

Пример неединственности. [18] Заметим, что во всех теоремах единственности мы требовали, чтобы функция $u(x,t)$ была непрерывна по совокупности переменных (x,t) вплоть до границы ∂D области D. Например, нельзя потребовать, чтобы функция была непрерывна по t для каждого x. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$u_t=u_{xx} \quad \text{при} \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1, \tag{1.11}$$

$$\lim_{t\to+0}u(x,t)=0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x\in\mathbb{R}^1. \tag{1.12}$$

Частное решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{x}{t^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{1.13}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$.

□ Действительно, запишем функцию (1.13) в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{2}{t}\frac{x}{2\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x,t) к точке $(0,0)$ по параболе

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0,$$

тогда

$$u(x(t),t) = \frac{2}{t}ae^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0. \quad \boxtimes$$

§ 2. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть L — параболический в $D_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$ оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (1.1). Предположим, кроме того, что $c(x,t) \geqslant 0$ и

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_0.$$

Доказать, что из условия

$$u(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad D.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B\exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B)\exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы 1, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad D.$$

Задача 2. [12] Пусть L — это равномерно параболический оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (1.1). Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0. \tag{2.1}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t)\in D=\mathbb{R}^N\otimes[0,T]$$

при некоторых положительных $B>0$, $\beta>0$. Предположим, что

$$Lu(x,t)\leqslant 0, \quad u(x,0)\geqslant M_1>0.$$

Доказать, что выполнено неравенство

$$u(x,t)\geqslant M_1\exp\left[\lambda|x|^2t+\nu t\right], \quad \lambda>0.$$

Решение. Рассмотрим [1]) следующую функцию:

$$v(x,t)\stackrel{\text{def}}{=}u(x,t)-M_1\exp\left[\lambda|x|^2t+\nu t\right].$$

Справедливы следующие вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right)=2\lambda x_i t\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right)=\left(\lambda|x|^2+\nu\right)\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right)=\left(2\lambda t\delta_{ij}+4\lambda^2t^2x_ix_j\right)\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned}Lv(x,t)&=Lu(x,t)-M_1L\left(\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right)\right)=\\&=Lu(x,t)-M_1\Biggl(4\lambda^2t^2\sum_{i,j=1,1}^{N,N}x_ix_ja_{ij}+2\lambda t\sum_{i=1}^{N}a_{ii}+\\&\qquad+2\lambda t\sum_{i=1}^{N}x_ib_i+c-(\lambda|x|^2+\nu)\Biggr)\exp\left(\lambda|x|^2t+\nu t\right).\end{aligned}$$

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L вытекают неравенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N}x_ix_ja_{ij}\geqslant m|x|^2, \quad a_{ii}\geqslant m$$

[1]) Переводчиками в этом месте в книге [12] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

с некоторой постоянной $m = m(D) > 0$. Кроме того, в силу условий (1.1) и (2.1) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$Lv(x,t) \leqslant -M_1\Big(4\lambda^2 t^2 m|x|^2 + 2\lambda t N m - \\ - 2\lambda t M|x|(1+|x|) + (\alpha-\lambda)|x|^2 + \gamma - \nu\Big) \leqslant 0.$$

при $t \in [0,T]$ и при достаточно больших $\alpha > \lambda$, $\gamma > \nu$. Теперь заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B\exp\Big(\beta|x|^2\Big) - M_1\exp\Big(\lambda|x|^2 T + \nu T\Big) \geqslant \\ \geqslant -B_1(T)\exp\Big(\beta_1(T)|x|^2\Big)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 1 мы приходим к утверждению задачи.

Задача 3. [12] Пусть L — это параболический в $D_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ оператор с непрерывными коэффициентами и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{2.2}$$

Доказать, что если

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -A(|x|^q+1) \tag{2.3}$$

при $(x,t) \in D = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.4}$$

вытекает неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]. \tag{2.5}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2A}{r_0^{2p-q}}(|x|^2+Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p > q. \tag{2.6}$$

Выберем постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ таким образом, чтобы для всех $r_0 > 0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной.

□ Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2+Kt}+\delta_{ij}\right] a_{ij}(x,t),$$

$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[pK+\alpha\left(|x|^2+Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\Bigg[4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} + 2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2+Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2+Kt\right)\Bigg].$$

Рассмотрим два случая: $|x| \geqslant 1$ и $|x| < 1$. В первом случае с учетом неравенств

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \leqslant 2M|x|^2, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|) \leqslant 2M|x|$$

получим следующие оценки:

$$4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} \leqslant 8pMN^2|x|^2,$$

$$2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4pNM|x|^2, \quad 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i \leqslant 4pNM|x|^2,$$

из которых вытекает неравенство

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times \\ \times \left\{\left[8pMN^2 + 8pNM + M - \alpha\right]|x|^2 - pK + K(M-\alpha)t\right\} < 0, \quad (2.7)$$

если

$$\alpha > M\left(8pN^2 + 8pN + 1\right). \quad (2.8)$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \quad (2.9)$$

Поэтому при $|x| < 1$ справедлива оценка

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times \\ \times \left[8pMN^2 + 8pNM + M - pK + (M-\alpha)Kt\right] < 0 \quad (2.10)$$

при выполнении условия (2.8) на $\alpha > 0$ и условия на $K > 0$

$$8pMN^2 + 8pNM + M < pK. \quad \boxtimes \quad (2.11)$$

Таким образом, при выполнении неравенств (2.8) и (2.11) справедливо неравенство

$$L(w(x,t) + u(x,t)) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + u(x,t) \quad (2.13)$$

в замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,T}} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant T\}$. При $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + 2A\frac{|x|^{2p}}{r_0^{2p-q}} \geqslant 0, \quad (2.14)$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) \geqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(r_0^2 + Kt\right)^p e^{\alpha t} - A\left(r_0^q + 1\right) \geqslant \\ \geqslant 2Ar_0^q - A(r_0^q + 1) = A(r_0^q - 1) > 0 \quad (2.15)$$

при $r_0 > 1$. Согласно принципу максимума имеем

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,T}}. \quad (2.16)$$

Осталось при фиксированном $(x,t) \in \overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,T}}$ перейти к пределу при $r_0 \to \to +\infty$ и из явного вида (2.6) функции $w(x,t)$ получить следующее неравенство:

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

К о н т р п р и м е р к з а д а ч е 3. Условия (2.2), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$.

□ Действительно, при любом $\delta > 0$ функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty} \exp\{-y^2\}\,dy & \text{для} \quad 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{для} \quad t = 0, \end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1 \otimes [0,T]$, обращается в нуль при $t = 0$ и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_{xx}+ \\ +\frac{1}{\delta^2}\left(x-\delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_x - u_t = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций. ⊠

Задача 4. [12] Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в $D = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$:

$$|a_{ij}(x,t)| < M, \quad |b_i(x,t)| < M, \quad |c(x,t)| < M, \tag{2.17}$$

а функция $u(x,t)$ непрерывна в D и удовлетворяет в $D_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ неравенствам

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right], \tag{2.18}$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{2.19}$$

при условии

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.20}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] \tag{2.21}$$

и повторить рассуждения при решении предыдущей задачи и проверить, что при надлежащим образом выбранной постоянной $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$Lw(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{2.22}$$

□ Действительно, имеем

$$Lw(x,t) = w(x,t)e^{\alpha t}\Bigg[4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_i x_j + \\ + 4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i + ce^{-\alpha t} - 2\beta\alpha(|x|^2+1)\Bigg] < 0$$

при условии

$$t \leqslant t_0 = \frac{1}{\alpha},$$

где $\alpha > 0$ достаточно велико.

□□ Действительно, имеют место следующие оценки:

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4\beta NM, \quad 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_i x_j \leqslant 16\beta^2 e^{\alpha t} MN^2|x|^2,$$

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i \leqslant 4\beta MN|x| \leqslant 2\beta MN|x|^2 + 2\beta MN, \quad ce^{-\alpha t} \leqslant M.$$

Поэтому справедливо неравенство при $t \leqslant 1/\alpha$

$$Lw(x,t) \leqslant w(x,t)e\Bigg[2\beta\left(8\beta eMN^2 + MN - \alpha\right)|x|^2 + \\ + 6\beta NM + M - 2\beta\alpha\Bigg] < 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠⊠ ⊠

Теперь рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + u(x,t). \tag{2.23}$$

В замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}^{0,t_0}_{0,r_0}} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\Big[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\Big] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) = \exp\left[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] + u_0(x) \geqslant$$
$$\geqslant \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] - \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] = 0. \qquad (2.24)$$

В силу принципа максимума в замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,t_0}}$ мы получим, что
$$v(x,t) = u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0.$$
Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ в выражении для $v(x,t)$ при фиксированном (x,t) мы получим, что
$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,t_0].$$
Далее нужно повторить рассуждения последовательно в полосах
$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots$$
и в результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

Замечание к задаче 4. Для уравнения теплопроводности
$$u_t = u_{xx}$$
известны более сильные результаты, чем рассмотренные. В частности, С. Тэклиндом доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию
$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta|x|h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$
где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и
$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$
Причем в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши может нарушаться.

Задача 5. [12] Пусть непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению
$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \qquad (2.25)$$
причем
$$|u(x,0)| \leqslant M_1, \quad |f(x,t)| \leqslant M_2, \quad c(x,t) \leqslant M_3, \qquad (2.26)$$
коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (2.2). Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ выполнено неравенство
$$|u(x,t)| \leqslant e^{M_3 t}\left(M_1 + M_2 t\right). \qquad (2.27)$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции

$$w_{\pm}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{M_3 t}\,(M_1 + M_2 t) \pm u(x,t).$$

По условию задачи имеем

$$w_{\pm}(x,0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_{\pm}(x,t)$. Имеем

$$Lw_{\pm}(x,t) = e^{M_3 t}\,[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0.$$

Отметим, что в силу ограниченности в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ решения $u(x,t)$ найдется такая постоянная $A > 0$, что

$$u(x,t) \geqslant -A \Rightarrow u(x,t) \geqslant -A(|x|^q + 1).$$

В силу результата задачи 3 получим

$$w_{\pm}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Лекция 12

ТЕОРЕМА ТИПА ЖИРО

§ 1. Теорема типа Жиро

Для того, чтобы исследовать вопрос о единственности решения *второй* и *третьей смешанных краевых задач* нам необходимо доказать так называемую теорему типа Жиро о знаке косой производной. Предварительно дадим определение *свойства строгой сферичности изнутри.*

Определение 1. *Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — это точка на границе ∂D области D. Если существует такой замкнутый шар $B(\overline{P}; R)$ с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$, что $B \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$ и при этом $\overline{x} \neq x_0$, то мы скажем что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.*

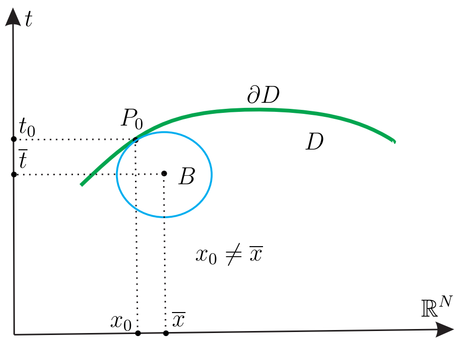

Рис. 27. К определению 1 строгой сферичности.

Замечание 1. Отметим, что если убрать требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 1, то мы получим *определение сферичности изнутри.*

Замечание 2. Отметим, что свойство строгой сферичности не выполняется для многих естественных областей. Смотри рисунок 32. На этом рисунке, во–первых, отмечены точки A_0, B_0, C_0 и D_0, которые не обладают даже свойством сферичности (не строгой) изнутри, поскольку не существует малого шара, который коснулся бы этих точек оставаясь внутри области D. Далее, нижняя крышка B цилиндра D

обладает свойством сферичности изнутри, но никакая точка нижней крышки не обладает свойством строгой сферичности изнутри. Аналогичным образом верхняя крышка B_T цилиндра D также обладает лишь свойством сферичности изнутри, а не строгой сферичности изнутри. Наконец, в задачах математической физики лишь часть $S_0 :=$ $= \partial D \setminus \left(\overline{\gamma(D)} \cup \overline{\gamma_0(D)}\right)$ боковой границы $S := \partial D \setminus (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ может обладать свойством строгой сферичности изнутри [1]. Хотя, именно на всей боковой границе S в случае второй и третьей краевых задач ставится условия с косой производной.

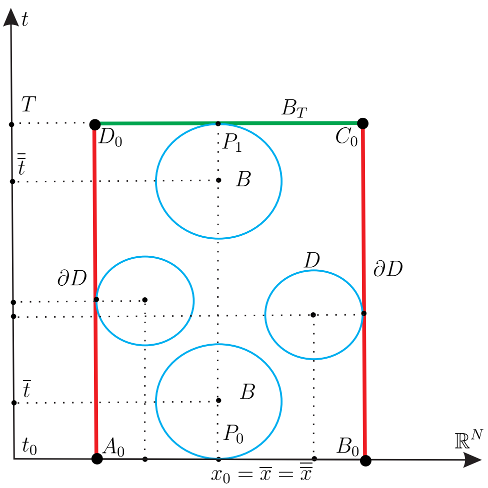

Рис. 28. К замечанию 2.

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ и

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{1.1}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (1.1) достигает положительный локальный максимум $M > 0$ в точке $P_0 \in S$:

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S := \partial D \setminus (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))\,. \tag{1.2}$$

При этих условиях справедлива следующая *теорема типа Жиро*:

Теорема типа Жиро. *Если выполняются указанные выше условия, точка $P_0 \in S$ обладает свойством строгой сферичности изнутри и существует окрестность V точки P_0, такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \textit{в} \quad D \cap V, \tag{1.3}$$

[1] Ясно, что $S_0 \subset S$.

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0} *выполнено неравенство*

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) < 0. \tag{1.4}$$

З а м е ч а н и е 3. Некасательным внутренним направлением мы называем направление из точки P_0 внутрь шара $B(\overline{P}; R)$ из условия строгой сферичности изнутри в точке $P_0 \in S$. Напомним определение производ-

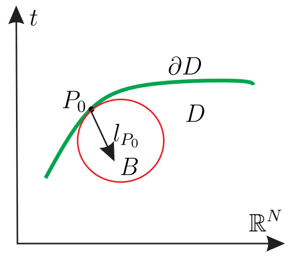

Рис. 29. Некасательное внутреннее направление и шар B.

ной по внутреннему направлению l_{P_0}. Рассмотрим луч, выпущенный из точки $P_0 = (x_0, t_0) \in S$ с внутренним направлением

$$l_{P_0} = (l_{x_0}, l_{t_0}) = (\cos\beta_{x_{01}}, ..., \cos\beta_{x_{0N}}, \cos\beta_{t_0}),$$

$$\sum_{j=1}^{N} \cos^2\beta_{x_{0j}} + \cos^2\beta_{t_0} = 1.$$

Тогда производная функции $u(x,t)$ по внутреннему направлению l_{P_0} определяется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) := \lim_{0<\lambda\to 0} \frac{u(x_0 + \lambda l_{x_0}, t_0 + \lambda l_{t_0}) - u(x_0, t_0)}{\lambda}. \tag{1.5}$$

Отметим, что при условиях теоремы выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) \leqslant 0, \tag{1.6}$$

поскольку в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ у функции $u(x,t)$ максимум, а в части окрестности $D \cap V \supset B$ выполнено неравенство $u(x,t) < M$. Заметим также, что результат теоремы — это соответствующее строгое неравенство.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Можно считать, что внутренность $\operatorname{int} B$ замкнутого шара $B(\overline{P}; R)$ удовлетворяет следующему вложению:

$$\operatorname{int} B := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x}_j)^2 + |t - \overline{t}|^2 < R^2 \right\} \subset D \cap V \ {}^{1)}.$$

Обозначим границу шара B через ∂B. Пусть

$$\pi := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j = \beta \right\}, \quad \alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 > 0 \ {}^{2)}$$

— это гиперплоскость, которая делит пространство $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ на два полупространства π^- и π^+

$$\pi^- := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j < \beta \right\},$$

$$\pi^+ := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j > \beta \right\}$$

таким образом, чтобы

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \pi^-, \quad P_0 = (x_0, t_0) \in \pi^+.$$

Так как $\overline{x} \neq x_0$, мы можем, варьируя вещественными числами α_0, α_j и β выбрать гиперплоскость π таким образом, чтобы

$$B^+ \stackrel{\text{def}}{=} \pi^+ \cap B \neq \varnothing \quad \text{и} \quad |x - \overline{x}| \geqslant a > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in B^+.$$

При этом граница B^+ состоит из части $C_1 \in \partial B$ и другой части $C_2 = B \cap \pi$.

Шаг 2. Введем функцию

$$h(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{ -\alpha \left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2 \right] \right\} - \exp\left\{ -\alpha R^2 \right\}. \tag{1.7}$$

Напомним, что $R > 0$ — это радиус замкнутого шара $B(\overline{P}; R)$. Имеем

$$h(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in C_1, \quad h(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B^+}, \tag{1.8}$$

---

[1] Можно просто выбрать шар B достаточно малым.

[2] α_0, α_j и β — это некоторые вещественные числа.

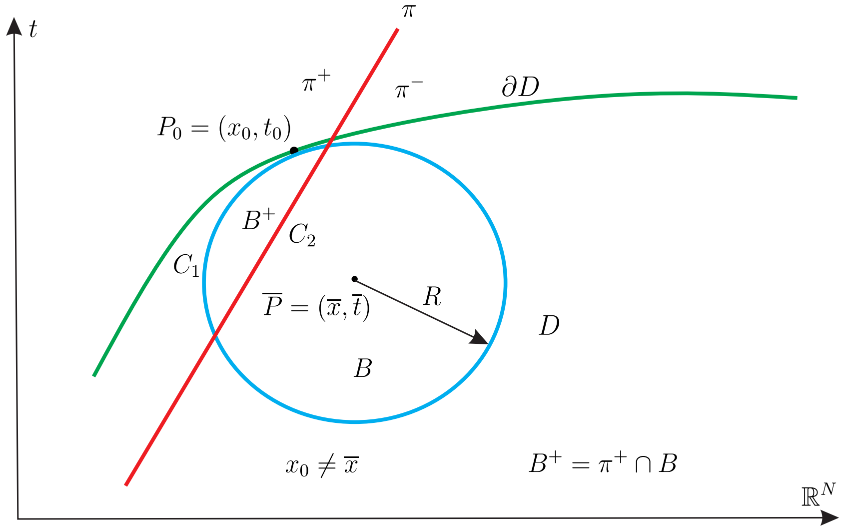

Рис. 30. Множество B^+ и его граница $C_1 \cup C_2$.

причем можно проверить, что [1])

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+ \tag{1.9}$$

при достаточно большом $\alpha > 0$.

□ Действительно, имеют место равенства

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -2\alpha(t-\overline{t})\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\alpha(x_i-\overline{x}_i)\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = -[2\alpha\delta_{ij} - 4\alpha^2(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)]\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\}.$$

Из этих равенств вытекает следующее выражение для $Lh(x,t)$:

$$Lh(x,t) = \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) - 2\alpha\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - \right.$$
$$\left. - 2\alpha\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i-\overline{x}_i) + 2\alpha(t-\overline{t}) + c(x,t)\right] \times$$

[1]) Здесь существенно, что $x_0 \neq \overline{x}$ и поэтому выполнено следующее неравенство: $|x-\overline{x}| \geqslant a > 0$ для всех $(x,t) \in B^+$.

$$\times \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\} -$$
$$- c(x,t)\exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \quad (1.10)$$

Поскольку по исходному предположению оператор L является равномерно параболическим в D, то поэтому найдётся постоянная $m = m(D) > 0$ такая, что имеет место оценка снизу

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) \geqslant m|x-\overline{x}|^2 \geqslant ma^2 =: d_1 > 0 \quad (1.11)$$

для всех $(x,t) \in \overline{B}^+$. В шаре B справедливы неравенства сверху

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i-\overline{x}_i)\right| + \left|t-\overline{t}\right| \leqslant K_1 < +\infty, \quad (1.12)$$

$$|c(x,t)| \leqslant K_2 < +\infty, \quad c(x,t) \leqslant 0. \quad (1.13)$$

Из (1.10) и (1.11)–(1.13) вытекает неравенство снизу

$$Lh(x,t) \geqslant \left[4\alpha^2 d_1 - 2\alpha K_1 - K_2\right]\exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2+|t-\overline{t}|^2\right]\right\} > 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ☒

Шаг 3. Введём следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t), \quad \varepsilon > 0. \quad (1.14)$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_2\ ^{1)}, \quad v(x,t) = u(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_1\backslash\{P_0\}, \quad (1.15)$$

причем

$$v(P_0) = u(P_0) = M. \quad (1.16)$$

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+, \quad (1.17)$$

то функция $v(x,t)$ в силу слабого принципа максимума [2] не может принимать своего максимального значения $M > 0$ во внутренней точке B^+. Итак,

$$v(x,t) < M \quad \text{внутри} \quad B^+. \quad (1.18)$$

---

[1] На C_2, очевидно, $u(x,t) \leqslant M - \delta$ при некотором $\delta > 0$.

[2] Напомним, что у нас выполнено предпоолжение $c(x,t) \leqslant 0$.

Шаг 4. Из (1.16), (1.18) и (1.5) вытекает, что [1]

$$\frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) \leqslant 0. \tag{1.19}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial n_{P_0}}(P_0) > 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = 0, \tag{1.20}$$

где n_{P_0} — это внутренняя нормаль к сфере ∂B в точке P_0, а τ_{P_0} — это произвольная касательная к сфере ∂B в той же точке P_0.

□ Действительно, запишем уравнение (1.7) для функции $h(x,t)$ в сферической системе координат с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$

$$\begin{cases} (r, \varphi, \vartheta_1, ..., \vartheta_{N-1}), & \text{если} \quad N \geqslant 2; \\ (r, \varphi), & \text{если} \quad N = 1. \end{cases}$$

Это уравнение имеет следующий вид:

$$h = h(r) = \exp\left(-\alpha r^2\right) - \exp\left(-\alpha R^2\right).$$

Производная по направлению внешней нормали в точке $P_0 \in \partial B$ равна

$$\frac{\partial h}{\partial r}(P_0) = -2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) < 0,$$

тогда производная по направлению n_{P_0} внутренней нормали в точке $P_0 \in \partial B$ равна

$$\frac{\partial h}{\partial n_{P_0}}(P_0) = 2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) > 0.$$

Поскольку функция $h(x,t)$ в выбранной сферической системе координат зависит только от r, то её производная по всякой касательной τ_{P_0} равна нулю

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}}(P_0) = 0. \quad \boxtimes$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial n_{P_0}}(P_0) + \\ + \sum_{j=1}^{N-1} \cos(l_{P_0}, \tau_{jP_0}) \frac{\partial h}{\partial \tau_{jP_0}}(P_0) = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial n_{P_0}}(P_0) > 0,$$

[1] Сравни с неравенством (1.6) замечания 3.

поскольку

$$\cos(l_{P_0}, n_{P_0}) > 0,$$

где $\{\tau_{1P_0}, ..., \tau_{N-1P_0}\}$ — это базис в касательной плоскости к $P_0 \in \partial D$.

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) > 0. \tag{1.21}$$

Итак, из (1.19) и (1.21) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = \frac{\partial v}{\partial l_{P_0}}(P_0) - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial l_{P_0}}(P_0) < 0. \tag{1.22}$$

Лемма доказана.

Замечание 4. Важным усилением утверждения теоремы типа Жиро является теорема 7 О. А. Олейник из книги [3]. Результат теоремы типа Жиро можно, в частности, распространить на точки границы $\partial\gamma(D)$ верхней крышки [1] $\gamma(D)$.

Пусть точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \partial B_{t_0}$, где $B_{t_0} \subset \gamma(D)$ — это связная компонента верхней крышки, расположенная на гиперплоскости $t = t_0$. Согласно определению верхней крышки $\gamma(D)$ и боковой границы $S := = \partial D \setminus \{\gamma(D) \cup \gamma_0(D)\}$ справедливо выражение

$$P_0 \subset \partial B_{t_0} \cap S.$$

Предположим, что существует такой шар A, что $P_0 \in \partial A$ и все его точки, лежащие в области $0 < t < t_0$, принадлежат D, причем радиус этого шара проведённый в точку P_0 не параллелен оси t. В этом случае для точки P_0 справедливо строгое неравенство (1.6). Этот случай изображён на следующем рисунке.

Замечание 5. Предположение, что

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

является, конечно, существенным, так как в противном случае $u(x,t)$ могла бы быть постоянной в $D \cap V$ и тогда бы

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0.$$

Контрпример к теореме типа Жиро 1. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, определим область D неравенствами

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2.$$

Пусть

[1] Само утверждение из работы [3] относится ко всем точкам боковой границы S. Просто для нас важен результат теоремы в случае цилиндрической области D.

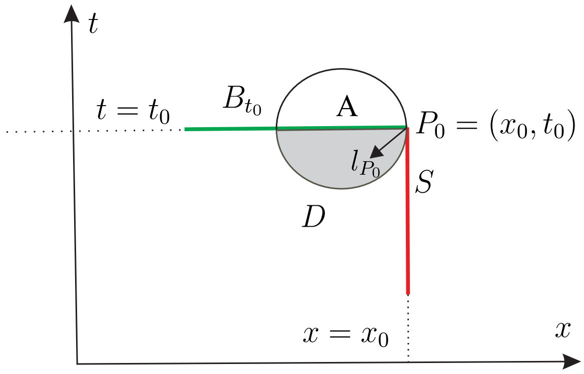

Рис. 31. Шар A.

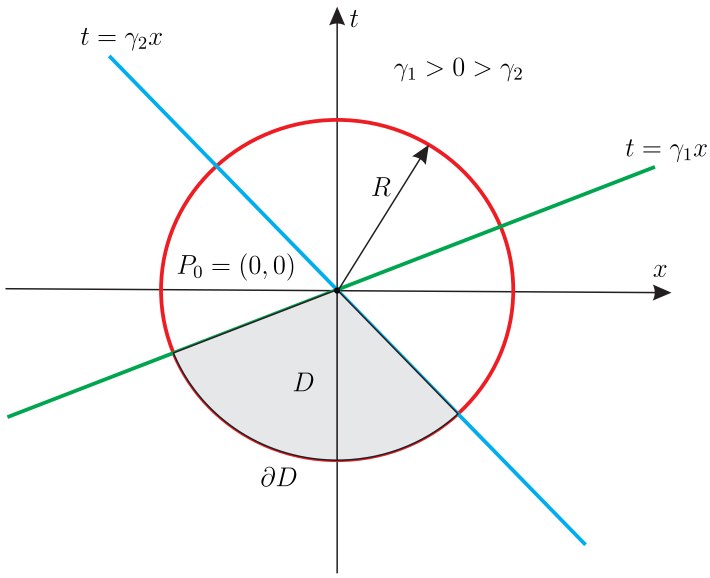

Рис. 32. Область D с угловой точкой $P_0 = (0, 0)$.

$$P_0 = (0, 0), \quad Lu(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$
$$u(x, t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1,$$

то

$$u(x, t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x, t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$
$$Lu(x, t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}. Проверьте сами!

Контрпример к теореме типа Жиро 2. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т.е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x,t):\ x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u(x,t) = 1 - t^2.$$

Для функции $u(x,t)$ имеем

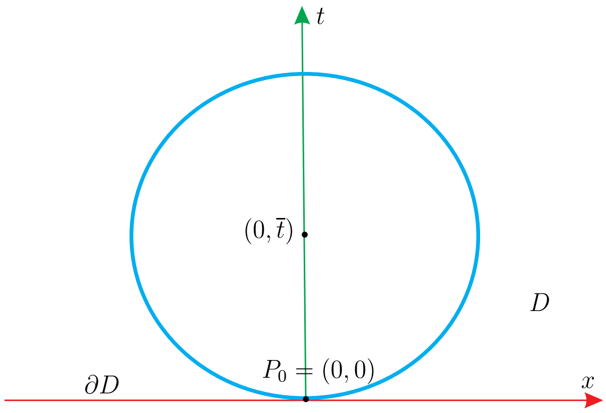

Рис. 33. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0$$

для любого направления l_{P_0}. Проверьте сами!

§ 2. Вторая и третья смешанные краевые задачи

Будем пользоваться обозначениями первого параграфа. Пусть $D := Q \otimes (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — это цилиндрическая область, $Q \subset \mathbb{R}^N$ — область, $B = Q \otimes \{t = 0\}$ — нижняя крышка цилиндра D, $B_T = Q \otimes \{t = T\}$ — верхняя крышка цилиндра D, $S := \partial D \setminus (B \cup B_T) = \partial Q \otimes [0,T]$ — это боковая граница. Пусть функции $f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_T)$, $\varphi(x) \in \mathbb{C}(\overline{B})$ и $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(S)$.

Постановка третьей краевой задачи. *Найти функцию $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cup \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cup \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$, удовлетворяющую уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.1}$$

начальному условию при $t = 0$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.2}$$

и граничному условию на боковой границе S

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{2.3}$$

где $\nu_{x,t}$ *— это конормаль в точке* $(x,t) \in S$. *В том случае, если* $\beta(x,t) = 0$ *задача* (2.1)–(2.3) *носит название второй смешанной краевой задачи.*

Замечание 6. Отметим, что каждая точка части $S_0 := \partial D \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right)$ боковой границы $S := \partial D \setminus (B \cup B_T)$ цилиндрической области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, очевидно, удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри.

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. *Пусть* L *— это равномерно параболический оператор с непрерывными и ограниченными в цилиндрической области* D *коэффициентами. Предположим, что* $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$. *Тогда существует не более одного решения третьей смешанной краевой задачи.*

Доказательство. В силу линейности задачи нам нужно доказать, что если $f(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$, $\varphi(x) \equiv 0$ в $\overline{B}$ и $\psi(x,t) \equiv 0$ на S, то $u(x,t) \equiv 0$ в D.

Шаг 1. Допустим, что тем не менее $u(x,t) \not\equiv 0$. Можно считать, что $u(x,t)$ имеет глобальный положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$. Если

$$u(P_0) = M, \quad P_0 = (x_0, t_0),$$

то $P_0 \notin B_{t_0}$ при $0 < t_0 \leqslant T$, так как из сильного принципа максимума теоремы 2 предыдущей лекции следовало бы, что

$$u(x,t) \equiv M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0) = (D \cup B_T) \cap \{0 < t \leqslant t_0\}.$$

По условию $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, поэтому

$$u(x,0) = M > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in B,$$

но это противоречит нашему предположению, что

$$u(x,0) = \varphi(x) \equiv 0 \quad \text{на} \quad \overline{B}.$$

Шаг 2. Предположим теперь, что

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S_0 := \partial D \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right),$$

причём в силу шага 1 имеем

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. В противном случае мы точно также как и на первом шаге получим равенство $u(x,t) = 0$. Поскольку всякая точка $P \in S_0$ удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, то мы можем применить теорему типа Жиро и получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{P_0}} < 0 \Rightarrow 0 > \frac{\partial u}{\partial \nu_{P_0}} = -\beta(P_0)u(P_0) \geqslant 0, \tag{2.4}$$

т е. прийти к противоречию.

Рассмотрим теперь случай $P_0 \in S \backslash S_0$. Ясно, что такие точки P_0 не удовлетворяют условию строгой сферичности изнутри, но теперь нам нужно воспользоваться замечанием 4 к теореме типа Жиро и получить, что и в этом случае выполнено строгое неравенство (2.4) и снова получить противоречие.

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема доказана.

Замечание 7. Заметим, что требование строгой сферичности на множестве $S \cap \{t = T\}$ в случае произвольной области D является <u>очень ограничительным</u> — это означает, что область D должная выглядеть «приблизительно» так:

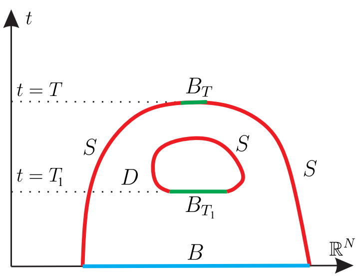

Рис. 34. Область D с условием сферичности точек боковой границы S.

§ 3. Примеры решения задач

Условие строгой сферичности множества точек $S \cap \{t = T\}$ можно заменить требованием $\beta(x,T) < 0$. Более того, имеет место следующее утверждение:

Задача 1. Доказать единственность решения третьей краевой задачи без требования строгой сферичности боковой границы S при условии

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S.$$

Указание. В качестве наводящих соображений отметим, что если не требовать условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S, то, вообще говоря, и нельзя применить теорему Жиро — это означает, что в данном случае можно доказать единственность третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причём в силу шага 2 имеем

$$u(x, t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнены следующие противоречивые неравенства:

$$0 \geqslant \frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = -\beta(P_0)u(P_0) > 0.$$

Лекция 13

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

§ 1. Теорема сравнения решений первой краевой задачи

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы сравнения для *нелинейных краевых задач* достаточно общего вида. Именно сначала рассмотрим следующую *первую смешанную краевую задачу*:

$$u_t - \Delta u = f(x, t, u, D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{1.1}$$

$$u(x, t) = \psi(x, t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{1.2}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. В этом параграфе мы будем использовать введённые в первом параграфе обозначения D, S, B, а также следующие:

$$D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\text{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

При этом мы будем предполагать, что $D \subset \mathbb{R}^N$ — это область и $B_\tau \subset \subset \mathbb{R}^N$ — это область (может быть неограниченная) для каждого $\tau \in \in (0, T)$.

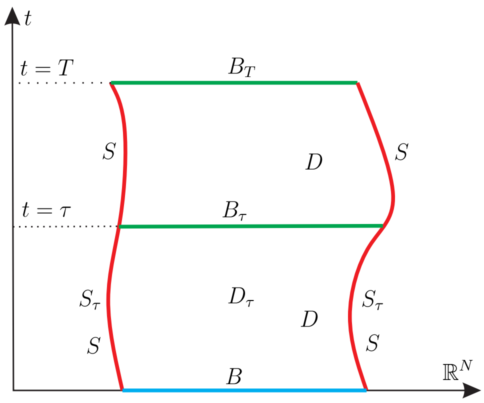

Рис. 35. Область D и множества D_τ, B_τ и S_τ.

В дальнейшем в спецкурсе профессора Н. Н. Нефедова студентам кафедры математики будет изложен *метод верхних и нижних решений* доказательства разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов [8]. Метод основан на признаке сравнения для соответствующих нелинейных краевых задач. Поэтому мы докажем слабый признак сравнения классических решений первой краевой задачи (1.1), (1.2).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат классу* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ *является непрерывной по всем переменным* $(x,t,p,p_1,...,p_N)$ *в области*

$$E \overset{\text{def}}{=} D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N.$$

Если

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{1.3}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D, \tag{1.4}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad B \cup S, \tag{1.5}$$

тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{1.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $t_0 \in [0,T]$ таково, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{B_t} \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant t < t_0.$$

Если мы докажем, что $t_0 = T$, то теорема будет доказана.

Шаг 2. В силу (1.5) и того, что по условию теоремы $v(x,t), w(x,t) \in \in \mathbb{C}(\overline{D})$, выполнено неравенство $t_0 > 0$. Если $t_0 < T$, то функция

$$z(x,t) \overset{\text{def}}{=} v(x,t) - w(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D_{t_0}, \quad z(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad B_{t_0}, \tag{1.7}$$

причём найдется такая точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{B}_{t_0}$, в которой

$$z(P_0) = 0. \tag{1.8}$$

С другой стороны, в силу того, что $\partial B_{t_0} \in S$ и выполнено строгое неравенство (1.5) точка $P_0 \notin \partial B_{t_0}$. Следовательно, $P_0 \in B_{t_0}$ и является точкой минимума функции $z(x,t)$ в области B_{t_0}. Тогда в точке P_0 выполнены необходимое и достаточное условие минимума

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0) = 0, \quad \Delta z(P_0) \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Шаг 3. В силу равенств (1.8) и (1.9) и неравенств (1.3), (1.4) выполнено равенство

$$\begin{aligned} f(x_0,t_0,v(P_0),D_xv(P_0)) = f(x_0,t_0,w(P_0),D_xw(P_0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_t(P_0)-\Delta v(P_0) > w_t(P_0)-\Delta w(P_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow z_t(P_0) > \Delta z(P_0) \geqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) > w_t(P_0). \end{aligned} \quad (1.10)$$

С другой стороны, в силу определения (**??**) имеем [1]

$$0 = z(P_0) < z(P) \quad \text{для всех} \quad P \in D_{t_0}.$$

Следовательно,

$$z_t(P_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{z(x_0,t_0)-z(x_0,t)}{t_0-t} \Rightarrow z_t(P_0) \leqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) \leqslant w_t(P_0),$$

что противоречит неравенству (1.10).

Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = T$

Теорема доказана.

Замечание 1. Заметим, что серия из двух условий (1.3) и (1.4) может быть заменена на следующую серию условий:

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x,t,v,D_xv) \quad \text{в} \quad D, \quad (1.11)$$

$$w_t - \Delta w < f(x,t,w,D_xw) \quad \text{в} \quad D, \quad (1.12)$$

§ 2. Теорема сравнения для решений второй и третьей краевых задач

Теперь мы рассмотрим *нелинейную смешанную третью краевую задачу* и докажем признак сравнения для неё. Сначала рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_xu) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \quad (2.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \overline{B}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,u(x,t)) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S, \quad (2.3)$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

Справедлива следующая теорема *о признаке сравнения для третьей краевой задачи*:

[1] Заметим, что согласно определению $B_{t_0} \notin D_{t_0}$

Теорема 2. *Пусть все предположения теоремы* 1 *остаются без изменения. Если* $v(x,t),\ w(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *и*

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{2.4}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D \tag{2.5}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial n_{x,t}} + \beta(x,t,v(x,t)) < \frac{\partial w(x,t)}{\partial n_{x,t}} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \textit{на} \quad S, \tag{2.7}$$

где $\beta = \beta(x,t,p)$ *— это любая непрерывная функция определённая на множестве* $S \otimes \mathbb{R}^1$, $n_{x,t}$ *— внутренняя нормаль. Тогда*

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{2.8}$$

Доказательство.

Здесь нужно заметить, что доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы. Только точка P_0 не может принадлежать ∂B_{t_0}, поскольку с одной стороны в силу принципа максимума

$$\frac{\partial z}{\partial n_{P_0}}(P_0) \geqslant 0,$$

а, с другой стороны, в силу неравенства (2.7) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial n_{P_0}}(P_0) < 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Заметим, что для цилиндрической области D строгое неравенство (2.7) можно заменить на нестрогое неравенство

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial n_{x,t}} + \beta(x,t,v(x,t)) \leqslant \frac{\partial w(x,t)}{\partial n_{x,t}} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \text{на} \quad S \tag{2.9}$$

и при этом результат теоремы остаётся в силе, если применить теорему типа Жиро.

Замечание 3. Заметим, что результат теоремы сравнения остаётся в силе при замене строгих неравенств на нестрогие. Результатом также будет нестрогое неравенство.

§ 3. Случай нелинейного эллиптического оператора общего вида. Теорема сравнения

В этом параграфе мы докажем признак сравнения для общего оператора (эллиптического оператора) следующего вида:

$$L(u)(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.1}$$

в котором функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определена на множестве $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от $N^2 + N + 3$ переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ определяла эллиптический оператор. Для этого достаточно потребовать, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \tag{3.2}$$

и для всех $(x,t,p,p_i,p_{ij}) \in D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$. Теперь предположим, что область D является цилиндрической:

$$D = \Omega \otimes (0,T),\ S = \partial\Omega \otimes [0,T],\ B = \Omega \otimes \{t=0\},\ B_T = \Omega \otimes \{t=T\}.$$

Рассмотрим следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$L(u)(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{3.3}$$

а также дифференциальное неравенство

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T. \tag{3.4}$$

Введём функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - w(x,t). \tag{3.5}$$

В силу выражений (3.3) и (3.4) для функции $v(x,t)$ в области D выполнено следующее неравенство:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_i x_j}) - F(x,t,w_i,w_{x_i},w_{x_i x_j}) - \\ - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{3.6}$$

Теперь применим формулу Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_i x_j}) - F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_i x_j}) =$$

$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t), \quad (3.7)$$

где

$$(a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t)) = \int_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)\Big(x, t, \vartheta u + (1-\vartheta)w,$$
$$, \vartheta u_{x_i} + (1-\vartheta)w_{x_i}, \vartheta u_{x_i x_j} + (1-\vartheta)w_{x_i x_j}\Big)\, ds. \quad (3.8)$$

Итак, с учётом (3.6) и (3.7) мы получим следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad (3.9)$$

в области D. Предположим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial^{'} D = S \cup B, \quad (3.10)$$

тогда применяя принцип максимума (теоремы 2, 3) для решения $v(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}_b(\overline{D})$ в ограниченной и неограниченной цилиндрической области D мы получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \quad (3.11)$$

Таким образом, мы приходим к следующему сильному признаку сравнения для нелинейной первой смешанной краевой задачи [18]:

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}_b(\overline{D})$ *— это решение уравнения* (3.3) *в цилиндрической области* D [1]. *Предположим, кроме того, что функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет граничным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{на} \quad \overline{B} = \overline{\Omega}, \quad (3.12)$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,T]. \quad (3.13)$$

Пусть $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяют неравенствам*

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \textit{в} \quad D, \quad (3.14)$$

[1] Ограниченной или неограниченной.

причём оператор L является параболическим в подобласти E области $D\otimes\mathbb{R}^1\otimes\mathbb{R}^N\otimes\mathbb{R}^{N^2}$ следующего вида:

$$\begin{gathered}E=\Big\{(x,t,p,p_i,p_{ij}):\\ p\in\{\vartheta u(x,t)+(1-\vartheta)v(x,t)\}\cup\{\vartheta u(x,t)+(1-\vartheta)w(x,t)\},\\ p_i\in\{\vartheta u_{x_i}(x,t)+(1-\vartheta)v_{x_i}(x,t)\}\cup\{\vartheta u_{x_i}(x,t)+(1-\vartheta)w_{x_i}(x,t)\},\\ p_{ij}\in\{\vartheta u_{x_ix_j}(x,t)+(1-\vartheta)v_{x_ix_j}(x,t)\}\cup\\ \cup\{\vartheta u_{x_ix_i}(x,t)+(1-\vartheta)w_{x_ix_j}(x,t)\},(x,t)\in D,\ \vartheta\in[0,1]\ i,j=\overline{1,N}\Big\}.\end{gathered}$$

Если

$$v(x,0)\leqslant u_0(x)\leqslant w(x,0)\quad \text{в}\quad \overline{\Omega}, \tag{3.15}$$

$$v(x,t)\leqslant \psi(x,t)\leqslant w(x,t)\quad \text{на}\quad S, \tag{3.16}$$

тогда

$$v(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant w(x,t)\quad \text{в}\quad D. \tag{3.17}$$

§ 4. Примеры решения задач

Теперь мы рассмотрим примеры применения теоремы 1 сравнения решений.

Задача 1. [12] Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t}>\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+av^2\quad\text{при}\quad (x,t)\in(0,1)\otimes(0,4M),\quad a>0, \tag{4.1}$$

$$v(x,0)>\frac{\mu}{M},\quad v(0,t)>\frac{\mu}{M},\quad v(1,t)>\frac{\mu}{M} \tag{4.2}$$

при $(x,t)\in[0,1]\otimes[0,4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu>8M+\frac{1}{4},\quad a>0,\quad M>0,\quad \mu>0, \tag{4.3}$$

тогда

$$v(1/2,t)\to+\infty\quad\text{при}\quad t\to 4M. \tag{4.4}$$

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t)\overset{\text{def}}{=}\frac{\mu}{M-tx(1-x)}. \tag{4.5}$$

Заметим, что при условии (4.3) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t}\leqslant\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+aw^2\quad\text{при}\quad (x,t)\in(0,1)\otimes(0,4M),\quad a>0. \tag{4.6}$$

$\square$ Действительно,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\mu t}{(M - tx(1-x))^2}[2x-1], \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{2\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$w^2 = \frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Теперь осталось получить условие на величину $a > 0$, чтобы было в области $D = (0,1) \otimes (0, 4M)$ было выполнено неравенство

$$\frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2} \leqslant \frac{2\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \\ - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2} + a\frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Достаточным условием является следующее неравенство:

$$\mu x(1-x) + 2\mu t < a\mu^2 \Rightarrow a\mu > \frac{1}{4} + 8M. \quad \boxtimes$$

Причём

$$w(x,0) = \frac{\mu}{M}, \quad w(0,t) = \frac{\mu}{M}, \quad w(1,t) = \frac{\mu}{M}. \tag{4.7}$$

Тогда применяя теорему 1, мы получим, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0, 4M). \tag{4.8}$$

Следовательно, при $x = 1/2$ имеем

$$v(1/2, t) > \frac{4\mu}{4M - t}.$$

Задача 2. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{4.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.10}$$

Прежде всего будем рассматривать только классические решения этой задачи Коши, т. е. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно доказать, что за конечное время решение этой задачи обращается в нуль всюду в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Решение. Предположим, что

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M, \quad M > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.11}$$

Пункт 1. Прежде всего отметим, что из сильного принципа сравнения, который мы сформулируем ниже, и из условия $u_0(x) \geqslant 0$ вытекает неравенство $u(x,t) \geqslant 0$.

Пункт 2. Функция $v(x,t) = M + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t - \Delta v > -|v|^p, \quad v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x). \tag{4.12}$$

Поэтому если в теореме 1 взять в качестве $w(x,t) = u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t) < M + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое неравенство

$$u(x,t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.13}$$

Итак, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M$.

Пункт 3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{4.14}$$

нетрудно проверить, что решением этой задачи является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{4.15}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{4.16}$$

Функция

$$v(x,t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.17}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.18}$$

□ Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p. \quad \boxtimes$$

Кроме того,

$$v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.19}$$

Опять применим теорему сравнения 1, в которой возьмём $w(x,t) = u(x,t)$ и получим неравенство

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.20}$$

Итак, мы делаем важный вывод — *каждое решение задачи Коши* (4.9), (4.10) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (4.16).

Задача 3. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{4.21}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.22}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Решение.

Пункт 1. Прежде всего заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В предположении, что решение $u(x,t)$ ограничено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ при некотором малом $T > 0$ можно из теоремы 3 о принципе максимума для ограниченных решений в неограниченных областях получить, что $u(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

Пункт 2. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{4.23}$$

Её решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} - (p-1)t\right)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{4.24}$$

где

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{4.25}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = +\infty.$$

Пункт 3. Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$u_0(x) > M + \varepsilon \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.26}$$

Введём функцию:

$$w(x,t) = z(t) + \varepsilon. \tag{4.27}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$w_t - \Delta w < w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{4.28}$$

□ Действительно,

$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = z^p < (z+\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. ⊠

Кроме того,

$$w(x,0) = M + \varepsilon < u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Пункт 4. Осталось воспользоваться теоремой 1, в которой нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:

$$u(x,t) > z(t) + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу — *при условии* $u_0(x) > M + \varepsilon > 0$ *выполнена оценка* (**??**), *из которой вытекает, что для некоторого* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *решение задачи Коши* (4.21), (4.22) *разрушается за конечное время*:

$$\limsup_{t \to t_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{4.29}$$

З а д а ч а 4. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{4.30}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.31}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно показать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе А. Н. Тихонова.

Р е ш е н и е. Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t) \geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = 0. \tag{4.32}$$

Его семейство всех решений (их бесконечно много) может быть представлено в следующем виде:

$$z(t) = (1-p)^{1/(1-p)} \begin{cases} (t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{4.33}$$

где t_0 — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t) = z(t)$ удовлетворяют условиям задачи Коши (4.30) и (4.31).

Задача 5. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{4.34}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.35}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить оценку сверху на скорость убывания решения при $t \to +\infty$ этой задачи.

Решение. Как и в первом примере, используя <u>сильный признак сравнения</u> можно доказать, что $u(x,t) \geqslant 0$

Предположим, что $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0, \quad p > 1. \tag{4.36}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{-1/(p-1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.37}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{4.38}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.39}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.40}$$

Осталось применить теорему сравнения 1, в которой положить $w(x,t) = u(x,t)$, и получить оценку

$$\begin{gathered} 0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) = \\ = \frac{1}{\left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \end{gathered} \tag{4.41}$$

Задача для самостоятельного решения 1. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.42}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.43}$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (4.20)

Задача для самостоятельного решения 2. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{4.44}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{4.45}$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (**??**).

Задача 6. [14] Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничными условиями*:

$$u_t = \Delta u \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{4.46}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = u^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes [0,T], \quad p > 1, \tag{4.47}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.48}$$

где n_x — это вектор внешней нормали к ляпуновской границе $\partial\Omega \in \in A^{1,h}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Нужно доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}_t((0,T];\mathbb{C}^{(2)}_x(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Прежде всего докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega} u(x,\varepsilon) = c > 0 \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0. \tag{4.49}$$

□ Действительно, в силу доказанного признака сравнения и замечания 3 имеем

$$u(x,t) \geqslant 0,$$

поскольку $v(x,t) = 0$ удовлетворяет уравнению (4.46), граничному условию (4.47) и $u_0(x) \geqslant 0 = v(x,0)$. Теперь заметим, что если

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \Omega,$$

то в силу сильного принципа максимума имеем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \otimes [0,\varepsilon],$$

а, стало быть, $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x) \not\equiv 0$.

Если же $u(x,t) \not\equiv 0$ при $(x,t) \in \Omega \otimes [0,\varepsilon]$ и

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

то в этой точке минимума в силу граничного условия (4.47) получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0,\varepsilon) = 0.$$

Если предположить, что существует малая окрестность точки $(x_0,\varepsilon) \in \in O((x_0,\varepsilon);\delta)$ при $\delta > 0$ такая, что

$$u(x,t) > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in O((x_0,\varepsilon);\delta) \cap D,$$

то в силу теоремы Жиро мы бы получили бы строгое неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0,\varepsilon) > 0.$$

Следовательно, найдётся такая внутренняя точка $(x_1,t_1) \in \in O((x_0,\varepsilon);\delta) \cap D$, что

$$u(x_1,t_1) = 0.$$

Опять применяя сильный принцип максимума, получим, что

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,t_1] \Rightarrow u(x,0) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega.$$

Опять пришли к противоречию. ⊠

Шаг 2. Меняя если необходимо $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x\in\Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{4.50}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{4.51}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} = \varphi^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{4.52}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.53}$$

где функция $\varphi_0(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ удовлетворяет следующим условиям [1)]:

$$\inf_{x\in\Omega} \Delta\varphi_0(x) > 0, \quad \frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial n_x} = \varphi_0^p(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega,$$

[1)] Такая функция существует [15].

$$\frac{c}{2} \leqslant \varphi_0(x) \leqslant c \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Сравнивая $\varphi(x,t)$ с функцией $u(x,t)$ мы получим неравенство

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T]. \tag{4.54}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{4.55}$$

Эта функция удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T-\eta], \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial n_x} = \frac{\partial\varphi(x,t+\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} &= \\ &= (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) = \\ = p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) &\in S = \partial\Omega \otimes (0,T-\eta], \end{aligned} \tag{4.57}$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - \varphi_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{4.58}$$

Используя признак сравнения мы получим, что

$$\begin{aligned} \psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T-\eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Шаг 4. Отметим, что в классе

$$\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}_t((0,T]; \mathbb{C}^{(2)}_x(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}^{0,1}_{x,t}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$$

функция

$$z(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}(x,t) z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Аналогично доказательству свойства (4.49) мы получим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{x \in \Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x \in \Omega} \varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \tag{4.60}$$

Шаг 5. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \tag{4.61}$$

Прежде всего имеет место цепочка выражений

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w = \varphi_{tt} - \delta p\varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\ = -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\ = p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 \geqslant 0, \end{aligned} \tag{4.62}$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n_x} = \frac{\partial\varphi_t}{\partial n_x} - \delta\frac{\partial\varphi^p}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\frac{\partial\varphi}{\partial n_x}\right) = \\ = p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\varphi^p\right) = p\varphi^{p-1}w. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ в силу (4.60) выполнено следующее неравенство:

$$w(x,\varepsilon) = \varphi_t(x,\varepsilon) - \delta\varphi^p(x,\varepsilon) \geqslant 0. \tag{4.64}$$

Используя признак сравнения получим, что

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{4.65}$$

Шаг 6. Итак, выполнено неравенство

$$\varphi_t(x,t) \geqslant \delta\varphi^p(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{4.66}$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \tag{4.67}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (4.54) мы получим, что имеет место неравенство

$$u(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \tag{4.68}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

Задача 7. [10] Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии*:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T), \quad p > 0, \quad T > 0, \tag{4.69}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{4.70}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,T]. \tag{4.71}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

Решение. Прежде всего заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу теоремы 3, в которой нужно взять $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (4.69) в виде

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

Подставляя в уравнение (4.69), мы получим равенство

$$\varphi_{at}(t)f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t)\Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Нужно рассмотреть два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

Случай первый: глобальная разрешимость. Для удобства положим

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

Откуда получим два уравнения

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p}f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{4.72}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(a+t)^{1/p}}, \tag{4.73}$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная. А относительно функции $f_a(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла граничному условию

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.74}$$

Итак, функция

$$u_a(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_a(x)}{(a+t)^{1/p}}, \quad a > 0 \tag{4.75}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0, +\infty), \tag{4.76}$$

и граничным условиям

$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{a^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{4.77}$$

$$u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,+\infty). \tag{4.78}$$

Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_a(x)}{a_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_a(x)}{a_2^{1/p}}, \quad a_1 > 0,\ a_2 > 0, \tag{4.79}$$

тогда в силу теоремы 3, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_a(x)}{(a_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_a(x)}{(a_2+t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_a(x)}{(a_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_a(x)}{(a_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,+\infty). \tag{4.80}$$

Отметим, что существует (см. [10]) не нулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи

$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.81}$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим

$$\lambda = \frac{1}{p}.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим следующую функцию:

$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{4.82}$$

— это произвольная постоянная,

$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{4.83}$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.84}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (4.83), (4.84) существует (см. монографию [20]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_b(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_b(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1, \tag{4.85}$$

тогда в силу теоремы 3, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_b(x)}{(T_1 - t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_b(x)}{(T_2 - t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_2). \quad (4.86)$$

Отметим, что из неравенства снизу в (4.86) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [T_2, T_1]$.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
6. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.– 368 с.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
8. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
9. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 252 с.
10. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
11. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.– т. 42, N 2, – с. 189–216.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
13. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
14. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
15. *Bei Hu, H. M. Yin* The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition, Trans. Amer. Math. Soc., 346 (1994) 117–135.
16. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.

17. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
18. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.
19. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
20. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
21. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.

КОРПУСОВ Максим Олегович
СВЕШНИКОВ Алексей Георгиевич
ЮШКОВ Егор Владиславович

Методы теории разрушения решений
нелинейных уравнений математической физики

Подписано к печати 16.06.2014 г.
Формат А5. Объем 22,5 п.л.Тираж 100 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

Отпечатано в Типографии МГУ им. М.В. Ломоносова