Лекция 4

ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Пространство функций $\mathcal{D}(K)$

Символом $|\alpha|$ будем обозначать длину мультииндекса α:

$$|\alpha| \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^N \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{Z}_+ \otimes \cdots \otimes \mathbb{Z}_+}_{N}.$$

Символом $\partial_k^{\alpha_k}$ обозначаем частную производную порядка $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+$ по переменной $x_k \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. Символом ∂^α будем обозначать следующее выражение:

$$\partial^\alpha \equiv \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_N^{\alpha_N}.$$

Символом K_n будем обозначать компакт в $\mathbb{R}^N$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Определение 1. *Семейство компактов* $\{\mathrm{K}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ *при* $n \in \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *будем называть компактно исчерпывающим* $\mathbb{R}^N$ *семейством, если*

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{K}_n, \quad \overline{\mathrm{int}\{\mathrm{K}_n\}} = \mathrm{K}_n,$$

и, кроме того, имеет место строгие вложения

$$\mathrm{K}_1 \Subset \mathrm{K}_2 \Subset \cdots \Subset \mathrm{K}_n \Subset \mathrm{K}_{n+1} \Subset \cdots \Subset \mathbb{R}^N.$$

Сначала рассмотрим, как строится пространство основных функций $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, которое для простоты часто обозначается как $\mathcal{D}$. Для этого предварительно введем пространство $\mathcal{D}(\mathrm{K})$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$. Но сначала дадим определение.

Определение 2. *Носителем* $\mathrm{supp}\{f\}$ *функции* $f(x)$ *называется замыкание того множества по переменной* $x \in \mathbb{R}^N$, *где* $f(x) \neq 0$.

Символом $\mathcal{D}(\mathrm{K})$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$, обозначим сначала векторное подпространство пространства $\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в K.

На векторном пространстве $\mathcal{D}(\mathrm{K})$ можно ввести счетную систему норм следующего вида:

$$p_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathrm{K}} |\partial^\alpha f(x)| \quad \text{при} \quad n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}. \qquad (1.1)$$

Докажем, что $p_n(f)$ действительно нормы на $\mathcal{D}(\mathrm{K})$.

$\square$ Покажем, что из условия $p_n(f)=0$ вытекает $f=\vartheta$. Действительно, из формулы (1.1) следует, что

$$p_n(f)=0 \Rightarrow \sup_{x\in\mathrm{K}} |\partial^\alpha f(x)| = 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha:\ |\alpha|\leqslant n,$$

значит, в частности, при $\alpha=(0,0,...,0)$ получаем

$$\sup_{x\in\mathrm{K}} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x)=\vartheta. \quad \boxtimes$$

Рассмотрим следующее множество

$$\mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{V}_{nm},\ n,m\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}, \qquad (1.2)$$

где

$$\mathrm{V}_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{f\in\mathcal{D}(\mathrm{K}):\ p_n(f)<\frac{1}{m}\right\}. \qquad (1.3)$$

Это множество в соответствии с первым параграфом третьей лекции можно взять за базу окрестностей нуля в векторном пространстве $\mathcal{D}(\mathrm{K})$.

Естественно, что топология τ_{K} векторного пространства $\mathcal{D}(\mathrm{K})$ порождается ФСО окрестностей нуля $\mathfrak{B}$ и строится стандартным образом. Действительно, ФСО произвольной точки $f\neq\vartheta$ является следующая система множеств:

$$\mathfrak{B}_f \stackrel{\text{def}}{=} \{f+\mathrm{V}_{nm}:\ \mathrm{V}_{nm}\in\mathfrak{B}\}.$$

Построенная таким образом топология τ_{K} является метризуемой. Действительно, в качестве метрики на векторном топологическом пространстве (ВТП) $(\mathcal{D}(\mathrm{K}),\tau_{\mathrm{K}})$ возьмем следующую величину:

$$\rho(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}. \qquad (1.4)$$

Теорема 1. *Пространство* $(\mathcal{D}(\mathrm{K}),\tau_{\mathrm{K}})$ *является пространством Фреше.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши в $\mathcal{D}(\mathrm{K})$, т.е. для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $N\in\mathbb{N}$, что для всех $n,m\geqslant N$ имеем

$$\rho(f_n,f_m)\leqslant\varepsilon.$$

Но тогда из формулы (1.4) вытекает, что если мы возьмем $\varepsilon \in (0, 1/2)$, то имеет место неравенство

$$\|f_n - f_m\|_k \leqslant \varepsilon_k(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.5}$$

где мы использовали обозначение

$$\|g\|_k \stackrel{\text{def}}{=} p_k(g).$$

Шаг 2. Норма (1.1) есть норма на банаховом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathrm{K})$. Поэтому отсюда и из (1.5) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{C}^n(\mathrm{K})$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^n(\mathrm{K})$ и поэтому сходится к некоторому одному и тому же в каждом банаховом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathrm{K})$ элементу $f(x) \in \mathbb{C}^n(\mathrm{K})$, поскольку имеет место очевидное вложение $\mathbb{C}^{n+1}(\mathrm{K}) \subset \mathbb{C}^n(\mathrm{K})$.

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, что

$$\|f_n - f\|_k \leqslant \|f_n - f\|_{N_1} \leqslant \delta = \delta(\varepsilon) \tag{1.6}$$

для $k = \overline{1, N_1}$ и всех $n \geqslant N_2$, где

$$\frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \frac{\delta}{1+\delta} = c_{N_1} \frac{\delta}{1+\delta}, \quad c_{N_1} \equiv \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k}. \tag{1.7}$$

Заметим, что при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, и обратное тоже верно. При этом достаточно большом $N_1 \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство:

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} \leqslant \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Но тогда из (1.6)–(1.8) приходим к следующему неравенству

$$\rho(f_n, f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} + \sum_{k=N_1+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N_2$. Таким образом, полнота доказана.

Теорема доказана.

§ 2. Пространства $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и их строгий индуктивный предел $\mathcal{D}(\Omega)$

Пусть теперь $\{\mathrm{K}_n\}$ — это компактное исчерпывание пространства $\mathbb{R}^N$. Прежде всего отметим, что в силу теоремы 1 каждое пространство

$(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ является пространством Фреше. Причем имеет место топологическое вложение

$$(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n}) \subset \left(\mathcal{D}(\mathrm{K}_{n+1}), \tau_{\mathrm{K}_{n+1}}\right).$$

Из полноты каждого пространства $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и того, что относительная топология $\tau_{\mathrm{K}_{n+1}}$ на пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ совпадает с топологией τ_{K_n}, вытекает, что пространство $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ замкнуто в $\left(\mathcal{D}(\mathrm{K}_{n+1}), \tau_{\mathrm{K}_{n+1}}\right)$.

Определение 3. *Посредством $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ обозначим строгий индуктивный предел пространств $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$:*

$$\mathcal{D} \equiv \operatorname*{induct}_{n\to\infty} (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n}). \tag{2.1}$$

Перечислим без доказательств свойства пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. [1]

Теорема 2. *Справедливы следующие свойства пространства основных функций $\mathcal{D}$:*

(I) *Пространство $\mathcal{D}$ неметризуемо;*

(II) *Множество $\mathrm{B} \subset \mathcal{D}$ ограничено, тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и ограничено в нем;*

(III) *Последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{D}$ сходится в $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда она сходится в каком-то $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_m), \tau_{\mathrm{K}_m})$ и ее носитель содержится в K_m;*

(IV) *Для непрерывности оператора $\mathbb{T}$, действующего из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{D}$ и $f_n \to \vartheta$ вытекало $\mathbb{T}f_n \to \vartheta$ в $\mathcal{D}$.*

Замечание 1. Поскольку пространство $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_m), \tau_{\mathrm{K}_m})$ является счетно нормированным пространством Фреше, то сильная сходимость в этом пространстве последовательности $\{u_n(x)\} \subset \mathcal{D}(\mathrm{K}_m)$ к элементу $u(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}_m)$ равносильна сходимости по всем нормам

$$\|u_n - u\|_k \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$.

§ 3. Пространство $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

Введем на пространстве $\mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ следующие нормы:

$$\|f\|_n \stackrel{\text{def}}{=} p_n(f) = \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(1+|x|^2\right)^n |\partial^\alpha f(x)|. \tag{3.1}$$

Введем стандартным образом ФСО нуля на пространстве $\mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$:

$$\mathfrak{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathrm{V}_{nm}\}, \quad \mathrm{V}_{nm} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{f \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) :\ p_n(f) < \frac{1}{m}\right\}.$$

[1] Смотри книгу [?].

Определение 4. *Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно счетного семейства норм* (3.1) *назовем пространством быстроубывающих функций $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.*

Пространство $\mathcal{P}$ метризуемо:

$$\rho(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_k}{1+\|f-g\|_k}. \tag{3.2}$$

Доказательство отделимости пространства основных функций $\mathcal{P}$ проводится в точности таким же способом, как и доказательство отделимости пространства основных функций $\mathcal{D}$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пространство $\mathcal{P}$ является пространством Фреше.*

Теорема 4. *Справедливы следующие свойства пространства основных функций $\mathcal{P}$:*

(I) *Всякий линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$, непрерывен;*

(II) *Для непрерывности оператора $\mathbb{T}$, действующего из $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{P}$ и $f_n \to \vartheta$ вытекало $\mathbb{T}f_n \to \vartheta$ в $\mathcal{P}$.*

Замечание 2. Поскольку пространство $\mathcal{P}$ является счетно нормированным пространством Фреше, то сильная сходимость в этом пространстве последовательности $\{u_n(x)\} \subset \mathcal{P}$ к элементу $u(x) \in \mathcal{P}$ равносильна сходимости по всем нормам

$$\|u_n - u\|_k \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$.

§ 4. Пространство распределений $\mathcal{D}'$

Определение 5. *Через $\mathcal{D}'$ обозначим пространство линейных и непрерывных функционалов над локально выпуклым векторным топологическим пространством $\mathcal{D}$ с топологией τ — топологии строгого индуктивного предела пространств $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Каждый линейный функционал f^* является непрерывным в индуктивной топологии τ пространства $(\mathcal{D}, \tau)$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'$, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ такой, что $\varphi_n \to \vartheta$, вытекает, что*

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Вытекает из определения непрерывности линейного функционала, из того свойства, что непрерывность функционала эквивалентна непрерывности в окрестности нулевого элемента и, наконец, из свойства (III) теоремы 2 и замечания 1.

Теорема доказана.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 1. *Линейный функционал* $f^* \in \mathcal{D}'$, *тогда и только тогда, когда найдется такой компакт* $\mathrm{K}_n \subset \mathbb{R}^N$ *и такая постоянная* $\mathrm{M}_{nm} > 0$, *что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{4.1}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$.

Достаточность. Из (4.1) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset \subset (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и $\varphi_k \to \vartheta$, то

$$p_n(\varphi_k) \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из (4.1) вытекает, что

$$\langle f^*, \varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{D}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{D}'$, тогда полунорма (проверьте сами!)

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi\rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{D}, \tau)$. Следовательно, эта полунорма непрерывна и над всяким $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_{nm}(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства Фреше $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$, такая, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} p_{nm}(\varphi).$$

Но полунорма $p_{nm}(\varphi)$ имеет следующий явный вид:

$$p_{nm}(\varphi) = \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{x\in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Формула (4.1) доказана.

Лемма доказана.

§ 5. Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Функции из $\mathcal{D}'$ можно условно разделить на *регулярные* и *сингулярные*. Дадим определение.

Определение 6. *Элемент* $f^* \in \mathcal{D}'$ *назовем регулярной обобщенной функцией, если существует такая локально интегрируемая функция* $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, *что имеет место следующее явное представление для скобок двойственности*:

$$\langle f^*, \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \textit{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \tag{5.1}$$

В противном случае $f^* \in \mathcal{D}'$ *называется сингулярной обобщенной функцией.*

Лемма (ДЮБУА–РАЙМОНДА). *Пусть* $f_1(x), f_2(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *два представителя обобщенной функции* $f^* \in \mathcal{D}'$, *т. е. имеют место равенства*

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_1(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_2(x)\varphi(x)\,dx.$$

Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ *почти всюду.*

Доказательство.

Данная лемма следует из основной леммы вариационного исчисления, доказанной во второй лекции. Действительно, имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} [f_1(x) - f_2(x)]\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Поскольку

$$\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теперь осталось применить основную лемму вариационного исчисления.

Лемма доказана.

Распределение f^* из $\mathcal{D}'$ не является, строго говоря, функцией, однако, очень удобно сопоставить обобщенной функции аргумент $x \in \mathbb{R}^N$ по следующему правилу:

$$\langle f^*(x), \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f^*, \varphi(x)\rangle.$$

В дальнейшем мы будем использовать это правило.

ПРИМЕР 1. (дельта–функция Дирака) Дельта–функцией Дирака называют обобщенную функцию, действующую по формуле

$$\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle \overset{\text{def}}{=} \varphi(0) \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Как известно П. Дирак определял эту функцию как такую функцию, что для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

И еще тогда современниками П. Дирака было отмечено, что в виде интеграла Лебега «дельта–функцию» представить нельзя, потому что это сингулярная обобщенная функция. Покажем это.

□ Допустим противное. Пусть существует $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ такая, что для любых $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

тогда для «шапочки»

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \varepsilon \end{cases}$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим в силу теоремы Лебега противоречивое равенство

$$0 = e^{-1}.$$

Следовательно, $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция. ⊠

ПРИМЕР 2. (функция Хевисайда.) Функцией Хевисайда называют обобщенную функцию $\vartheta(x)$, действующую по формуле

$$\langle \vartheta(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_0^{+\infty} \cdots \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Это регулярная обобщенная функция и ее действие на основные функции из $\mathcal{D}$ задается по формуле (5.1) с помощью локально интегрируемой в $\mathbb{R}^N$ функции

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x_i \geqslant 0, \quad \forall\, i = \overline{1, N}, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту функцию еще называют функцией единичного скачка.

ПРИМЕР 3. (постоянная). Регулярную обобщенную функцию, действующую по правилу

$$\langle f, \varphi \rangle = c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} c \cdot \varphi(x)\,dx,$$

называют постоянной.

ПРИМЕР 4. (главное значение интеграла от функции x^{-1}). Такое название закреплено за линейным функционалом

$$\mathcal{P}\frac{1}{x},$$

действующим по формуле

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

□ Линейность этого функционала следует из свойства линейности интеграла Римана, осталось проверить его непрерывность. Пусть $\varphi_k(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ при $k \to +\infty$, тогда, во-первых, найдется такое $R > 0$, что $\varphi_k(x) = 0$ при $|x| > R$ для всех $k \in \mathbb{N}$, во-вторых, в частности,

$$\varphi_k^{'}(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad [-R, R] \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

т. е.

$$\max_{x \in [-R;R]} \left| \varphi_k^{'}(x) \right| \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

поэтому

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle \overset{\text{def}}{=} V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях на $[-R, R]$ имеет место равенство

$$\varphi_k(x) - \varphi_k(0) = \varphi_k^{'}(x^{'})x \quad \text{при} \quad x^{'} \in [0, x]$$

или

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + x\varphi_k^{'}(x^{'}),$$

отсюда

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k^{'}(x^{'})}{x}\, dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое из правой части последнего равенства.

$$V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \right) \frac{\varphi_k(0)}{x}\, dx =$$
$$= \varphi_k(0) \cdot \lim_{\varepsilon \to +0} (\ln|-\varepsilon| - \ln|-R| + \ln|R| - \ln|\varepsilon|) = 0.$$

Таким образом,

$$\left| \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle \right| = \left| V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\varphi_k^{'}(x^{'})}{x}\, dx \right| = \left| V.p. \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k^{'}(x^{'})\, dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\,dx \right| \leqslant \int\limits_{-R}^{R} \left|\varphi_k'(x')\right|\,dx \leqslant 2R \max_{x\in[-R,R]} \left|\varphi_k'(x)\right| \to +0$$

при $k \to +\infty$.

Итак, линейный функционал

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

является обобщенной функцией на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. $\boxtimes$

Покажем, что этот функционал является сингулярной обобщенной функцией.

$\square$ Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в $\mathbb{R}^1$ функция $f(x)$ такая, что для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Рассмотрим семейство основных функций типа «шапочка»

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \text{при} \quad |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где c_ε выбираем так, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1,$$

т. е.

$$c_\varepsilon = \frac{c_1}{\varepsilon},$$

где c не зависит от ε.

Вычислим теперь значения этого функционала на семействе функций $\varphi(x) = x\omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. С одной стороны

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\omega_\varepsilon(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\omega_\varepsilon(x)}{x}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Теперь предположим, что

$$f(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^1) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^1).$$

В этом случае в силу неравенства Гельдера получим неравенство

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)x\omega_\varepsilon(x)\,dx \right| = c_\varepsilon \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)x\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_\varepsilon \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right)\,dx\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{c_1}{\varepsilon}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\varepsilon^3 \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 \exp\left(-\frac{2}{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right)\,d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\varepsilon^{1/2}}{c}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-1}^{1} t^2 \exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)\,dt\right)^{1/2} \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. Полученное противоречие и означает, что

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

— это сингулярная обобщенная функция. ⊠