Лекция 7. Преобразование Фурье

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

2 апреля 2012 г.

Пространство $\mathcal{P}$

Напомним, что топология τ пространства Фреше $(\mathcal{P}, \tau)$ порождена следующим счетным семейством полунорм:

$$\|f\|_n \equiv p_n(f) \equiv \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial^\alpha f(x)| . \qquad (1)$$

Пространство $\mathcal{P}'$

Определение 15. *Обозначим через* $\mathcal{P}'$ *или* $\mathcal{P}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством* $(\mathcal{P}, \tau)$.

Теорема

Для непрерывности линейного функционала $f^* \in \mathcal{P}^{\#}$, *необходимо и достаточно, чтобы из условия* $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ *и* $\varphi_n \to \theta$ *в топологии* τ *вытекало, что*

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *обозначены скобки двойственности между* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{P}^{\#}$.

Одна теорема

Теорема

Следующие два условия эквивалентны:

(i) $f^* \in \mathcal{P}'$;

(ii) $f^* \in \mathcal{P}^{\#}$ *и функция* $\langle f^*, \varphi \rangle$ *ограничена на ограниченных множествах из* $\mathcal{P}$.

Одна лемма

Лемма

Линейный функционал $f^* \in \mathcal{P}'$ *тогда и только тогда, когда найдется такая полунорма* $p_n(\varphi)$ *вида* (1) *и постоянная* $\mathrm{M}_n > 0,$ *что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_n \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad (2)$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{P}, \tau)$.

Доказательство

Достаточность. Из (2) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ и $\varphi_k \to \theta$, то и

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 14 приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{P}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{P}'$, тогда полунорма

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi \rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{P}, \tau)$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_n(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства $(\mathcal{P}, \tau)$ и постоянная $\mathrm{M}_n > 0$ такие, что

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_n p_n(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Но полунорма $p_n(\varphi)$ имеет явный вид (1). Формула (2) доказана.

$*-$слабая топология

Начнем с построения $*-$слабой топологии в пространстве $\mathcal{P}'$. Введем следующее семейство множеств:

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}\,, \tag{3}$$

где A пробегает все *конечные* подмножества пространства $(\mathcal{P}, \tau)$. Теперь рассмотрим семейство множеств в пространстве $\mathcal{P}'$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ :\ \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}\,, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{ f^* \in \mathcal{P}' :\ \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant 1 \right\}. \tag{4}$$

Если принять семейство $\mathfrak{B}$ за базу окрестностей нуля в пространстве $\mathcal{P}'$, то мы получим $*-$слабую «топологизацию» этого пространства.

Сильная топология

Поступим теперь аналогичным способом наделения пространства $\mathcal{P}'$ топологией *сильной* сходимости. Действительно, рассмотрим следующее семейство множеств

$$\mathfrak{A} \equiv \{\mathrm{A}\}\,, \tag{5}$$

где A пробегает все *ограниченные* подмножества пространства $(\mathcal{P}, \tau)$. Теперь рассмотрим семейство множеств в пространстве $\mathcal{P}'$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^{\circ}:\ \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}\,, \quad \mathrm{A}^{\circ} \equiv \left\{ f^* \in \mathcal{P}' :\ \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant 1 \right\}. \tag{6}$$

Если принять семейство $\mathfrak{B}$ за базу окрестностей нуля в пространстве $\mathcal{P}'$, то мы получим сильную «топологизацию» этого пространства.

Определение 18. *Назовем прямым преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{P}$:

$$\hat{\varphi}(y) \equiv \mathbb{F}\left[\varphi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}\varphi(x)\,dx, \quad (x,y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k. \tag{7}$$

Определение 19. *Назовем обратным преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{P}$:

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \mathbb{F}^{-1}\left[\varphi\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)}\varphi(y)\,dy, \quad (x,y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k. \tag{8}$$

Теорема о линейности и непрерывности

Теорема

Операции прямого и обратного преобразования Фурье являются линейными и непрерывными:

$$\mathbb{F} : (\mathcal{P}, \tau) \to (\mathcal{P}, \tau) \quad \textit{и} \quad \mathbb{F}^{-1} : (\mathcal{P}, \tau) \to (\mathcal{P}, \tau) \,.$$

Доказательство-1

Прежде всего заметим, что поскольку пространство $(\mathcal{P}, \tau)$ является пространством Фреше, то оно является и борнологическим. Поэтому в силу теоремы 8 четвертой лекции нам достаточно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ такой, что

$$\varphi_m \to \theta \quad \text{в} \quad (\mathcal{P}, \tau) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

вытекает, что

$$\mathbb{F}[\varphi_m] \to \theta \quad \text{в} \quad (\mathcal{P}, \tau) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Доказательство-2

Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\partial_y^\alpha \mathbb{F}\left[\varphi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha e^{-i(x,y)} \varphi(x)\,dx, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\left(1+|y|^2\right)^n \mathbb{F}[\varphi](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\left(1-\triangle_x\right)^n e^{-i(x,y)}\,dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \left[1-\triangle_x\right]^n \varphi(x)\,dx,\end{aligned} \tag{10}$$

здесь мы воспользовались интегрированием по частям, чтобы «перекинуть» оператор $[1-\triangle_x]^n$ $n \in \mathbb{N}$, где

$$\triangle_x \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

Доказательство-3

Таким образом, с учетом (9) и (10) получим следующую цепочку неравенств:

$$\left|\left(1+|y|^2\right)^n \partial_y^\alpha \mathbb{F}[\varphi](y)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|[1-\triangle_x]^n (-ix)^\alpha \varphi(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left[\left|1+|x|^2|^s\right| [1-\triangle_x]^n x^\alpha \varphi(x)\right] \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{[1+|x|^2]^s}\, dx, \quad s >$$

Отсюда сразу же получаем оценку

$$p_n\left(\mathbb{F}[\varphi]\right) \leqslant c(n,s) p_{2n+s}(\varphi), \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad s > \frac{N}{2}.$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ мы получаем, что если $\varphi_m \to \theta$, то и

$$\mathbb{F}[\varphi_m] \to \theta \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Одна теорема

Теорема

Операторы Фурье $\mathbb{F}$ *и* $\mathbb{F}^{-1}$ *являются взаимно обратными операторами на* $\mathcal{P}$.

Доказательство-1

Для доказательства утверждения теоремы сначала докажем следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\hat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(y)f(x+y)\,dy. \qquad (11)$$

Действительно, имеет место цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\hat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy g(y)\int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(z-x,y)}f(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dz f(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy g(y)e^{-i(z-x,y)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz f(z)\hat{g}(z-x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy f(x+y)\hat{g}(y).$$

Доказательство-2

Возьмем теперь в качестве функции $g(y)$ функцию $g(\varepsilon y)$. Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\hat{g}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y,z)} g(\varepsilon z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \frac{1}{\varepsilon^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y/\varepsilon,z)} g(z) = \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right). \quad (12)$$

С учетом равенств (11) и (12) приходим к следующему равенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(\varepsilon y) \hat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) f(x+y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(y) f(x+\varepsilon y)\, dy. \quad (13)$$

Доказательство-3

Теперь возьмем в равенстве (13) в качестве функции $g(x)$:

$$g(x) = e^{-|x|^2/2}.$$

Тогда переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (13), получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{g}(y)\, dy. \tag{14}$$

Справедливы следующие свойства введенной функции $g(x)$:

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-i(z,y)}\, dy = e^{-|z|^2/2}, \quad \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2/2}\, dz =$$

С учетом этого из равенства (14) приходим к следующему равенству:

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = f(x).$$

Доказательство-4

Которое иначе можно переписать как

$$\mathbb{F}^{-1}\left[\mathbb{F}[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\mathbb{F}\left[\mathbb{F}^{-1}[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Свертка-1

Докажем, что операция свертки (которая, очевидно, является нелинейной операцией) не выводит нас за рамки пространства $\mathcal{P}$. Итак, пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{P}$, тогда воспользуемся следующим легко проверяемым неравенством:

$$\left[1+|x|^2\right] \leqslant 2\left[1+|x-y|^2\right]\left[1+|y|^2\right],$$

поскольку

$$|x| \leqslant |x-y| + |y|.$$

Свертка-2

$$\left[1+|x|^2\right]^n \partial^\alpha (\varphi * \psi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[1+|x|^2\right]^n \partial^\alpha_x \varphi(x-y)\psi(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{\left[1+|x|^2\right]^n}{\left[1+|x-y|^2\right]^n \left[1+|y|^2\right]^n} \times$$

$$\times \left[1+|x-y|^2\right]^n \partial^\alpha_{x-y}\varphi(x-y) \left[1+|y|^2\right]^n \psi(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left[1+|z|^2\right]^n |\partial^\alpha_z \varphi(z)| \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \left[1+|y|^2\right]^n \psi(y) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left[1+|z|^2\right]^n |\partial^\alpha_z \varphi(z)| \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[1+|y|^2\right]^{n+m} |\psi(y)| \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^N} dw\, \frac{1}{\left[1+|w|^2\right]^m}, \quad m > N/2.$$

Свертка-3

Тогда из этой цепочки приходим к следующему неравенству:

$$\max_{|\alpha|\leqslant n}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left[1+|x|^2\right]^n|(\varphi*\psi)(x)|\leqslant$$

$$\leqslant c\max_{|\alpha|\leqslant n}\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\left[1+|z|^2\right]^n|\partial_z^\alpha\varphi(z)|\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\left[1+|y|^2\right]^{n+m}|\psi(y)|\leqslant$$

$$\leqslant cp_n(\varphi)p_{n+m}(\psi),$$

и получаем в результате неравенство:

$$p_n(\varphi*\psi)\leqslant c(m,n)p_n(\varphi)p_{n+m}(\psi)\quad \text{при}\quad m\in\mathbb{N},\ m>\frac{N}{2}.$$

Стало быть, $\varphi*\psi\in\mathcal{P}$ для всех $\varphi(x),\psi(x)\in\mathcal{P}$.

Свертка-4

Теперь применим оператор преобразования Фурье к свертке двух функций:

$$\mathbb{F}\left[\varphi * \psi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, e^{-i(x,y)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz \varphi(x-z)\psi(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz \psi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \varphi(x-z) e^{-i(y,x-z)} e^{-i(y,z)} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y,z)} \psi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \varphi(x-z) e^{-i(y,x-z)} =$$

$$= (2\pi)^{N/2} \hat{\psi}(y) \hat{\varphi}(y).$$

Свертка-5

Докажем теперь равенство

$$\mathbb{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \hat{f} * \hat{g}. \qquad (15)$$

Ранее мы доказали следующее равенство

$$\mathbb{F}\left[f * g\right] = (2\pi)^{N/2} \hat{f}\hat{g}. \qquad (16)$$

Возьмем в этой формуле в качестве функция f и g, $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, соответственно. Тогда из формулы (16) получим следующее равенство:

$$\mathbb{F}\left[\tilde{f} * \tilde{g}\right] = (2\pi)^{N/2} \hat{\tilde{f}} \cdot \hat{\tilde{g}} = (2\pi)^{N/2} f g.$$

Но

$$\mathbb{F}\left[\tilde{f} * \tilde{g}\right] = \mathbb{F}^{-1}\left[\hat{f} * \hat{g}\right].$$

И в результате приходим к равенству (15).

Транспонированный оператор-1

Теперь мы приступим к изучению транспонированного $\mathbb{F}^t$ к оператору Фурье $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}^t : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}',$$

$$\left\langle \mathbb{F}^t \left[f^*\right], \varphi \right\rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{F}[\varphi] \rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P},\ f^* \in \mathcal{P}'. \qquad (17)$$

Рассмотрим для начала случай регулярной обобщенной функции из $\mathcal{P}'$, т. е. такой, что найдется такая локально интегрируемая функция $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, что для скобок двойственности имеет явное представление:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx f(x) \varphi(x).$$

Транспонированный оператор-2

Тогда правая часть равенства (17) примет следующий вид:

$$\langle f^*, \mathbb{F}[\varphi]\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy e^{-i(x,y)} \varphi(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \varphi(y) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx e^{-i(x,y)} f(x) = \langle \mathbb{F}\left[f^*\right], \varphi\rangle . \quad (18)$$

Так что для случая регулярных обобщенных функций из $\mathcal{P}'$ мы пришли к выводу, что оператор $\mathbb{F}^t \equiv \mathbb{F}$. Тем самым и для всех элементов из $\mathcal{P}'$ за определение транспонированного оператора $\mathbb{F}^t$ нужно взять равенство (17), в котором следует положить $\mathbb{F}^t \equiv \mathbb{F}$.

Определение

Определение 20. *Преобразованием Фурье обобщенных функций* $f^* \in \mathcal{P}'$ *называется линейный оператор*

$$\mathbb{F} : \mathcal{P}' \to \mathcal{P}',$$

определенный следующей формулой:

$$\langle \mathbb{F}[f^*], \varphi \rangle \equiv \langle f^*, \mathbb{F}[\varphi] \rangle \quad \textit{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P},\ f^* \in \mathcal{P}'. \qquad (19)$$

Одна теорема

Теорема

Оператор преобразования Фурье обобщенных функций (19) *является линейным и секвенциально непрерывным в* $*-$*слабой топологии*:

$$\mathbb{F} : \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right) \to \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right). \qquad (20)$$

Доказательство-1

Прежде всего отметим то, что мы понимаем под *секвенциальной* непрерывностью в $*-$слабой топологии. Но для начала напомним, что такое непрерывность оператора $\mathbb{T}$ в $*-$слабой топологии:

$$\mathbb{T} : \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right) \to \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Действительно, это означает, что для всякой окрестности нуля U в топологии $\tau^*_{w^*}$ пространства $\left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ найдется такая окрестность нуля V из той же топологии, что имеет место вложение

$$\mathbb{T}\left(\mathrm{V}\right) \subset \mathrm{U}.$$

Доказательство-2

Тогда под секвенциальной непрерывностью того же оператора понимается следующее свойство: из $*-$слабой сходимости произвольной последовательности $\{f_n^*\} \subset \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ к нулю

$$f_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \quad * -\text{слабо в} \quad \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$$

вытекает, что

$$\mathbb{T} f_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} \theta \quad * -\text{слабо в} \quad \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Пусть $\{f_m^*\} \subset \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ и

$$f_m^* \to \theta \quad * -\text{слабо в} \quad \left(\mathcal{P}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right).$$

Тогда имеем

$$\langle \mathbb{F}\left[f_m^*\right], \varphi \rangle = \langle f_m^*, \mathbb{F}[\varphi] \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

для всех $\varphi \in \mathcal{P}$, поскольку $\mathbb{F}[\varphi] \in \mathcal{P}$.

Фундаментальные решения

Решение уравнения

$$\langle D\mathcal{E}(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0)$$

для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ называется фундаментальным решением некоторого дифференциального оператора D.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим волновой оператор

$$D \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Найдем его фундаментальное решение. Рассмотрим следующее уравнение в смысле распределений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t).$$

Пример

Имеем $\delta(x,t) = \delta(x)\delta(t)$ в случае декартова произведения $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+$. Поэтому применим преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}^1$. Получим, что

$$\frac{d^2\widehat{\mathcal{E}}}{dt^2} + k^2\widehat{\mathcal{E}} = \delta(t).$$

Его решение

$$\widehat{\mathcal{E}} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^{1/2}}\frac{\sin(kt)}{k},$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1} \theta(t)\frac{\sin(kt)}{k}e^{ikx}\,dk = \frac{1}{2}\theta(t-|x|).$$