Лекция 5. Пространства основных и обобщенных функций.

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

27 марта 2012 г.

Обозначения

Символом $|\alpha|$ будем обозначать длину мультииндекса α:

$$|\alpha| \equiv |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_N|.$$

Символом $\partial_k^{\alpha_k}$ обозначаем частную производную порядка $\alpha_k \in \mathbb{Z}_+$ по переменной $x_k \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$. Символом ∂^α будем обозначать следующее выражение:

$$\partial^\alpha \equiv \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \alpha_N^{\alpha_N}.$$

Символом K_n будем обозначать компакт в $\mathbb{R}^N$ при $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Определения

Определение 1. *Семейство компактов* $\{\mathrm{K}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ *при* $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *будем называть компактно исчерпывающим* $\mathbb{R}^N$ *семейством, если*

$$\overline{\mathrm{int}\{\mathrm{K}_n\}} = \mathrm{K}_n,$$

и, кроме того, имеет место строгие вложения

$$\mathrm{K}_1 \Subset \mathrm{K}_2 \Subset \cdots \Subset \mathrm{K}_n \Subset \mathrm{K}_{n+1} \Subset \cdots \Subset \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{R}^N = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{K}_n.$$

Носитель

Сначала рассмотрим, как строится пространство основных функций $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right)$, которое для простоты часто обозначается как $\mathcal{D}$. Для этого предварительно введем пространство $\mathcal{D}(\mathrm{K})$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$. Но сначала дадим определение.

Определение 2. *Носителем* $\operatorname{supp}\{f\}$ *функции* $f(x)$ *называется замыкание того множества по переменной* $x \in \mathbb{R}^N$, *где* $f(x) \neq 0$.

Пространство $\mathcal{D}(\mathrm{K})$

Символом $\mathcal{D}(\mathrm{K})$, где K — это компакт в $\mathbb{R}^N$, обозначим сначала векторное подпространство пространства $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, состоящее из функций, носитель которых содержится в K.

На векторном пространстве $\mathcal{D}(\mathrm{K})$ можно ввести счетную систему норм следующего вида:

$$p_n(f) \equiv \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathrm{K}} |\partial^\alpha f(x)| \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}. \tag{1}$$

Доказательство

$\square$ Действительно, пусть

$$f(x) = \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x), \quad \text{где} \quad f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{K}), \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^1,$$

тогда

$$p_n(f) \leqslant |\beta_1| p_n(f_1) + |\beta_2| p_n(f_2).$$

Теперь покажем, что из условия $p_n(f) = 0$ вытекает $f = \theta$. Действительно, из формулы (1) следует, что

$$p_n(f) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha f(x)| = 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha : \ |\alpha| \leqslant n,$$

значит, в частности, при $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ получаем

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = \theta. \quad \boxtimes$$

Система полунорм

Рассмотрим следующее множество

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{V}_n m, \ n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}, \quad \mathrm{V}_n m \equiv \left\{ f \in \mathcal{D}(\mathrm{K}) : \ p_n(f) < \frac{1}{m} \right\}. \tag{2}$$

Это множество в соответствии с первым параграфом третьей лекции можно взять за базу окрестностей нуля в векторном пространстве $\mathcal{D}(\mathrm{K})$.

Естественно, что топология τ_{K} векторного пространства $\mathcal{D}(\mathrm{K})$ порождается базой окрестностей нуля $\mathfrak{B}$ и строится стандартным образом. Действительно, базой окрестностей произвольной точки $f \neq \theta$ является следующая система множеств:

$$\mathfrak{B}_f \equiv \{f + \mathrm{V}_n : \ \mathrm{V}_n \in \mathfrak{B}\}.$$

Топология

Построенная таким образом топология τ_{K} является локально выпуклой и метризуемой. Действительно, в качестве метрики на локально выпуклом пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ берем следующую величину:

$$\rho(f, g) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}. \tag{3}$$

Теорема

Теорема

Пространство $(\mathcal{D}(\mathrm{K}), \tau_{\mathrm{K}})$ *является пространством Фреше.*

Доказательство-1

□ Пусть $\{f_n\}$ последовательность Коши в $\mathcal{D}(\mathrm{K})$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеем

$$\rho(f_n, f_m) \leqslant \varepsilon.$$

Но тогда из формулы (3) вытекает, что если мы возьмем $\varepsilon \in (0, 1/2)$, то имеет место неравенство

$$\|f_n - f_m\|_k \leqslant \varepsilon_k(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где мы ввели обозначение

$$\|g\|_k \equiv p_k(g).$$

Доказательство-2

Но норма (1) есть норма на банаховом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathrm{K})$. Поэтому отсюда и из (4) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{C}^n(\mathrm{K})$ является фундаментальной в $\mathbb{C}^n(\mathrm{K})$ и поэтому сходится к некоторому одному и тому же в каждом банаховом пространстве $\mathbb{C}^n(\mathrm{K})$ элементу $f(x) \in \mathbb{C}^n(\mathrm{K})$, поскольку имеет место очевидное вложение $\mathbb{C}^{n+1}(\mathrm{K}) \subset \mathbb{C}^n(\mathrm{K})$.

Доказательство-3

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\|f_n - f\|_k \leqslant \|f_n - f\|_N \leqslant \delta = \delta(\varepsilon), \quad k = \overline{1, N}, \qquad (5)$$

где

$$\frac{\varepsilon}{2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{\delta}{1+\delta} = c_N \frac{\delta}{1+\delta}, \quad c_N \equiv \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}. \qquad (6)$$

Заметим, что при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, и обратное тоже верно. При этом достаточно большом $N \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Доказательство-4

Но тогда из (5)–(7) приходим к следующему неравенству

$$\rho(f_n, f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f_n - f\|_k}{1 + \|f_n - f\|_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, полнота доказана. ⊠

Пространства $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$

Пусть теперь $\{\mathrm{K}_n\}$ — это компактное исчерпывание пространства $\mathbb{R}^N$. Прежде всего отметим, что в силу теоремы 1 каждое пространство $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ является пространством Фреше. Причем имеет место топологическое вложение

$$(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n}) \subset \left(\mathcal{D}(\mathrm{K}_{n+1}), \tau_{\mathrm{K}_{n+1}}\right).$$

Из полноты каждого пространства $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и того, что относительная топология $\tau_{\mathrm{K}_{n+1}}$ на пространстве $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ совпадает с топологией τ_{K_n}, вытекает, что пространство $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ замкнуто в $\left(\mathcal{D}(\mathrm{K}_{n+1}), \tau_{\mathrm{K}_{n+1}}\right)$.

Определение 3. *Посредством* $\mathcal{D}$ *или* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *обозначим строгий индуктивный предел пространств* $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$:

$$\mathcal{D} \equiv \operatorname*{induct}_{n\to\infty} (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n}) . \tag{8}$$

Свойства пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$

Теорема

Справедливы следующие свойства пространства основных функций $\mathcal{D}$:

(I) *Пространство* $\mathcal{D}$ *неметризуемо*;

(II) *Множество* $\mathrm{B} \subset \mathcal{D}$ *ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором* $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ *и ограничено в нем*;

(III) *Последовательность* $\{f_n\} \subset \mathcal{D}$ *сходится в* $\mathcal{D}$ *тогда и только тогда, когда она сходится в каком-то* $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_m), \tau_{\mathrm{K}_m})$ *и ее носитель содержится в* K_m;

(IV) *Для непрерывности оператора* $\mathbb{T}$, *действующего из* $\mathcal{D}$ *в* $\mathcal{D}$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности* $\{f_n\} \subset \mathcal{D}$ *и* $f_n \to \theta$ *вытекало* $\mathbb{T} f_n \to \theta$ *в* $\mathcal{D}$;

Пространство основных функций $\mathcal{P}$

Введем на пространстве $\mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ следующие нормы:

$$\|f\|_n \equiv p_n(f) \equiv \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left(1+|x|^2\right)^n |\partial^\alpha f(x)| . \qquad (9)$$

Введем стандартным образом базу окрестностей нуля на пространстве $\mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{V}_n\}, \quad \mathrm{V}_n \equiv \left\{f \in \mathbb{C}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) : \ p_n(f) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Определение

Определение 4. *Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ относительно счетного семейства норм (9) назовем пространством быстроубывающих функций $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.*
Пространство $\mathcal{P}$ метризуемо:

$$\rho(f,g) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_k}{1+\|f-g\|_k}. \qquad (10)$$

Доказательство отделимости пространства $\mathcal{P}$ проводится в точности таким же способом, как и доказательство отделимости пространства $\mathcal{D}$.
Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема

Пространство $\mathcal{P}$ является пространством Фреше.

Свойства

Теорема

Справедливы следующие свойства пространства основных функций $\mathcal{P}$:

(I) *Всякий линейный ограниченный оператор, действующий из* $\mathcal{P}$ *в* $\mathcal{P}$, *непрерывен;*

(II) *Для непрерывности оператора* $\mathbb{T}$, *действующего из* $\mathcal{P}$ *в* $\mathcal{P}$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности* $\{f_n\} \subset \mathcal{P}$ *и* $f_n \to \theta$ *вытекало* $\mathbb{T} f_n \to \theta$ *в* $\mathcal{P}$.

Пространство распределений $\mathcal{D}'$

Определение 6. *Через $\mathcal{D}'$ обозначим пространство линейных и непрерывных функционалов над локально выпуклым векторным топологическим пространством $\mathcal{D}$ относительно топологии τ — топологии строгого индуктивного предела пространств $\left(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n}\right)$.*

Теорема

Каждый линейный функционал f^* является непрерывным в индуктивной топологии τ пространства $(\mathcal{D}, \tau)$, т. е. принадлежит $\mathcal{D}'$, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ такой, что $\varphi_n \to \theta$, вытекает, что

$$\langle f^*, \varphi_n \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Одна лемма

Лемма

Линейный функционал $f^* \in \mathcal{D}'$ *тогда и только тогда, когда найдется такой компакт* $\mathrm{K}_n \subset \mathbb{R}^N$ *и такая постоянная* $\mathrm{M}_{nm} > 0$, *что имеет место неравенство:*

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{11}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$.

Доказательство-1

Достаточность. Из (11) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset (\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$ и $\varphi_k \to \theta$, то и

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{D}'$.

Доказательство-2

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{D}'$, тогда полунорма (??) непрерывна над всем $(\mathcal{D}, \tau)$. Следовательно, эта полунорма непрерывна и над всяким $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_{nm}(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства $(\mathcal{D}(\mathrm{K}_n), \tau_{\mathrm{K}_n})$, такая, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_{nm} p_{nm}(\varphi).$$

Но полунорма $p_{nm}(\varphi)$ имеет следующий явный вид:

$$p_{nm}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leqslant m} \sup_{x \in \mathrm{K}_n} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Формула (11) доказана.

Рассмотрим следующую систему множеств:

$$\mathfrak{B} \equiv \{\mathrm{A}^\circ : \ \mathrm{A} \in \mathfrak{A}\}, \quad \mathrm{A}^\circ \equiv \left\{ f^* \in \mathcal{D}' : \ \sup_{\varphi \in \mathrm{A}} |\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant 1 \right\}, \tag{12}$$

где A — это конечное множество.

Определение 7. *Символом* $\left(\mathcal{D}'_{w^*}, \tau^*_{w^*}\right)$ *мы назовем векторное топологическое пространство, полученное при* $*-$*слабой «топологизации» векторного пространства* $\mathcal{D}'$.

Сильная топология

Рассмотрим следующую систему множеств

$$\mathfrak{B} \equiv \{A^\circ : \; A \in \mathfrak{S}\}, \quad A^\circ \equiv \left\{ f^* \in \mathcal{D}' : \; \sup_{\varphi \in A} |\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant 1 \right\}. \tag{13}$$

Тогда согласно определению сильной топологии τ_s^* мы получим из векторного пространства $\mathcal{D}'$ сильное сопряженное к пространству $\mathcal{D}$, если за базу окрестностей нуля возьмем систему множеств (13). Дадим определение.

Определение 8. *Символом* $\left(\mathcal{D}'_s, \tau_s^*\right)$ *мы назовем векторное топологическое пространство, полученное при сильной «топологизации» векторного пространства* $\mathcal{D}'$.

Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Функции из $\mathcal{D}'$ можно условно разделить на *регулярные* и *сингулярные*. Дадим определение.

Определение 9. *Элемент $f^* \in \mathcal{D}'$ назовем регулярной обобщенной функцией*, *если существует такая локально интегрируемая функция $f(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, что имеет место следующее явное представление для скобок двойственности*:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}. \qquad (14)$$

В противном случае $f^* \in \mathcal{D}'$ называется сингулярной обобщенной функцией.

Лемма (ДЮБУА–РАЙМОНДА). *Пусть* $f_1(x), f_2(x) \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *два представителя обобщенной функции* $f^* \in \mathcal{D}'$, *т. е. имеют место равенства*

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_1(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_2(x)\varphi(x)\,dx.$$

Тогда $f_1(x) = f_2(x)$ *почти всюду.*

Доказательство

Данная лемма следует из основной леммы вариационного исчисления, доказанной во второй лекции. Действительно, имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} [f_1(x) - f_2(x)]\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Поскольку

$$\mathbb{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \overset{ds}{\subset} \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теперь осталось применить основную лемму вариационного исчисления.

Замечание

Распределение f^* из $\mathcal{D}'$ не является, строго говоря, функцией, однако, очень удобно сопоставить обобщенной функции аргумент $x \in \mathbb{R}^N$ по следующему правилу:

$$\langle f^*(x), \varphi \rangle \equiv \langle f^*, \varphi(x) \rangle .$$

В дальнейшем мы будем использовать это правило.

Пример-1

ПРИМЕР 1. (дельта–функция Дирака) Дельта–функцией Дирака называют обобщенную функцию, действующую по формуле

$$\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0) \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Как известно, П. Дирак определял эту функцию как такую функцию, что для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \delta(x)\varphi(x) = \varphi(0).$$

И еще тогда было отмечено, что в виде интеграла Лебега «дельта–функцию» так представить нельзя, потому что это сингулярная обобщенная функция. Покажем это.

Пример-1

Допустим противное. Пусть существует $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ такая, что для любых $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

тогда для «шапочки»

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{при} \quad |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$, получим

$$0 = e^{-1}.$$

Следовательно, $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция.

Пример-2

ПРИМЕР 2. (функция Хевисайда.) Функцией Хевисайда называют обобщенную функцию $\theta(x)$, действующую по формуле

$$\langle \theta(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_0^{+\infty} \cdots \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Это регулярная обобщенная функция и ее действие на основные функции из $\mathcal{D}$ задается по формуле (14) с помощью локально интегрируемой в $\mathbb{R}^N$ функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x_i \geqslant 0, \quad \forall\, i = \overline{1, N}, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту функцию еще называют функцией единичного скачка.

ПРИМЕР 3. (постоянная). Регулярную обобщенную функцию, действующую по правилу

$$\langle f, \varphi \rangle = c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} c \cdot \varphi(x)\, dx,$$

называют постоянной.

Пример-4.1

ПРИМЕР 4. (главное значение интеграла от функции x^{-1}). Такое название закреплено за линейным функционалом $\mathcal{P}\frac{1}{x}$,действующим по формуле

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle =$$

$$= V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1).$$

Тот факт, что указанное выражение действительно имеет смысл при всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, будет доказан на лекции 5а.

Пример-4.2

Линейность этого функционала следует из свойства линейности интеграла, осталось проверить его непрерывность. Пусть $\varphi_k(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ при $k \to +\infty$, тогда, во-первых, $\varphi_k(x) = 0$ при $|x| > R$ для всех $k \in \mathbb{N}$, во-вторых,

$$\varphi_k^{'}(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad [-R, R] \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

т. е.

$$\max_{[-R;R]} \left| \varphi_k^{'}(x) \right| \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

поэтому

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(x)}{x}\, dx.$$

Пример-4.3

По теореме Лагранжа о конечных приращениях на $[-R, R]$ имеет место равенство

$$\varphi_k(x) - \varphi_k(0) = \varphi_k^{'}(x^{'})x \quad \text{при} \quad x^{'} \equiv x'(x;k) \in [0, x],$$

или

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + x\varphi_k^{'}(x^{'}),$$

отсюда

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\varphi_k^{'}(x^{'})}{x}\, dx.$$

Пример-4.4

Рассмотрим первое слагаемое из правой части

$$V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{\varphi_k(0)}{x}\,dx =$$

$$= \varphi_k(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|-\varepsilon| - \ln|-R| + \ln|R| - \ln|\varepsilon|\right) = 0,$$

таким образом

$$\left|\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right\rangle\right| = \left|V.p. \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\varphi_k^{'}(x^{'})}{x}\,dx\right| = \left|V.p. \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k^{'}(x^{'})\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{-R}^{R} \varphi_k^{'}(x^{'})\,dx\right| \leqslant \int\limits_{-R}^{R}\left|\varphi_k^{'}(x^{'})\right|\,dx \leqslant 2R\max_{[-R,R]}\left|\varphi_k^{'}(x)\right| \to +0$$

при $k\to+\infty$.

Пример-4.5

Итак, линейный функционал

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

является обобщенной функцией на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$.
Покажем, что этот функционал является сингулярной обобщенной функцией. Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в $\mathbb{R}^1$ функция $f(x)$ такая, что для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi(x)\,dx = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle.$$

Пример-4.6

Рассмотрим семейство основных функций типа «шапочка»

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right\}, & \text{при} \quad |x| < \varepsilon; \\ 0, & \text{при} \quad |x| \geqslant \varepsilon, \end{cases}$$

где c_ε выбираем так, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1,$$

т. е.

$$c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon},$$

где c не зависит от ε (см. лекцию 5а).

Пример-4.7

Вычислим теперь значения этого функционала на семействе функций $x\omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. С одной стороны

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\omega_\varepsilon(x) \right\rangle = V.p. \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{x\omega_\varepsilon(x)}{x}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

По нашему предположению

$$f(x) \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^1).$$

Пример-4.8

В этом случае будем иметь

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)x\omega_\varepsilon(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} |f(x)|\,dx \cdot \sup_{[-\varepsilon;\varepsilon]} |x\omega_\varepsilon(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{[-\varepsilon;\varepsilon]} |x\omega_\varepsilon(x)| \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} |f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{[-\varepsilon;\varepsilon]} |x| \sup_{[-\varepsilon;\varepsilon]} |\omega_\varepsilon(x)| \int\limits_{|x|\leqslant\varepsilon} |f(x)|\,dx =$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{[-\varepsilon;\varepsilon]} |f(x)|\,dx = c \int\limits_{[-\varepsilon;\varepsilon]} |f(x)|\,dx \to 0.$$

Пример-4.9

Поэтому приходим к выводу, что

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x) x \omega_\varepsilon(x)\, dx \right| \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$.
Полученное противоречие и означает, что

$$\mathcal{P}\frac{1}{x}$$

— это сингулярная обобщенная функция.