# Лекция 3. Пространства Лебега. Продолжение

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

28 февраля 2012 г.

# Введение

В этой лекции мы продолжим рассмотрение в третьей лекции предыдущего семестра (см. соответствующие слайды). Для более полного понимания следует посмотреть эту лекцию.

## Следствие неравенства Гельдера

**Теорема**

*Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ *и* $\mu(X) < +\infty$, *тогда имеют место следующие утверждения*

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^q(X),$$

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^\infty(X).$$

# Доказательство-I

Итак, пусть $\mu(X) < +\infty$. Тогда в силу неравенства Гельдера имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_X |f(x)|^p \; \mu(dx) = \int\limits_X |f(x)|^p \, 1 \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left( \int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} \left( \int\limits_X 1 \, \mu(dx) \right)^{1-p/q} =$$

$$= \left( \int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} [\mu(X)]^{1-\frac{p}{q}} ,$$

откуда сразу же получаем первое утверждение теоремы.

# Доказательство-II

Теперь, если мы в первом неравенстве утверждения теоремы положим $q = +\infty$, то получим следующее неравенство

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{1/p} \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^\infty(X),$$

откуда вытекает предельное неравенство

$$\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty.$$

Теперь докажем, что

$$\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty,$$

откуда и будет следовать второе утверждение теоремы.

# Доказательство-III

Действительно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mu-$измеримое подмножество $\mathrm{A}_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) > 0$ и имеет место неравенство

$$|f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{A}_\varepsilon.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int\limits_{\mathrm{A}_\varepsilon} |f(x)|^p \, \mu(dx)\right)^{1/p} \geqslant [\|f\|_\infty - \varepsilon] \, [\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)]^{1/p},$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает искомое утверждение.

# Одна интерполяционная лемма

Пусть $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant +\infty$ и

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \ \theta \in [0,1].$$

**Лемма**

*Имеет место вложение*

$$L^r(X) \supset L^s(X) \cap L^t(X)$$

*и справедлива оценка*

$$\| f \|_r \leqslant \| f \|_s^{\theta} \| f \|_t^{1-\theta} \ .$$

# Доказательство

Действительно, находим

$$\int\limits_X |f|^r \, \mu(dx) = \int\limits_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left( \int\limits_X |f|^{\theta r \frac{s}{\theta r}} \, \mu(dx) \right)^{\theta r/s} \left( \int\limits_X |f|^{(1-\theta)r \frac{t}{(1-\theta)r}} \, \mu(dx) \right)^{\frac{(1-\theta)r}{t}} .$$

Мы использовали неравенство Гельдера, которое можно применить, так как

$$\frac{\theta r}{s} + \frac{(1-\theta)r}{t} = 1.$$

# Замечание

Заметим, что утверждение этой леммы тривиально в случае $\mu-$ограниченных множеств $X : \mu(X) < +\infty$. Действительно, из теоремы 6 вытекает цепочка вложений

$$L^t(X) \subset L^r(X) \subset L^s(X).$$

Однако, в случае не конечной меры утверждение леммы нетривиально.

# Обобщенное неравенство Гельдера

**Теорема**

*Пусть* $f_k \in L^{p_k}(X)$, *причем* $p_k \in (1, +\infty)$ *при* $k = \overline{1, n}$ *и*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}, \quad r \in [1, +\infty).$$

*Тогда имеет место общее неравенство Гельдера*:

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}. \tag{1}$$

# Доказательство-I

Доказательство проведем по индукции. Пусть общее неравенство Гельдера доказано для $n = N - 1$ докажем его для $n = N$. Действительно, пусть

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_{N-1}.$$

# Доказательство-II

Тогда из неравенства Гельдера получим цепочку неравенств

$$\|f\cdot f_N\|_r = \left(\int\limits_X |f|^r|f_N|^r\,\mu(dx)\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_X |f|^{rp}\,\mu(dx)\right)^{1/p}\left(\int\limits_X |f_N|^{rq}\,\mu(dx)\right)^{1/q}\right)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^{rp}\,\mu(dx)\right)^{1/(rp)}\left(\int\limits_X |f_N|^{rq}\,\mu(dx)\right)^{1/(rq)} =$$

$$= \|f\|_{p^*}\|f_N\|_{p_N},$$

где

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}.$$

# Доказательство-III

Теперь заметим, что по предположению индукции имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{rp} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}.$$

С другой стороны, положим $rq = p_N$, тогда

$$\frac{1}{rq} + \frac{1}{rp} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}.$$

При этом

$$p = \frac{q}{q-1}, \quad q = p_N \left( \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N} \right).$$

# Теорема Рисса

Теперь зададимся следующим вопросом: какой явный вид имеет скобка двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ и $(\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$? Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема **Рисса**.

### Теорема

*Сопряженным к банахову пространству* $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *является банахово пространство* $\mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$, *где* $p^{-1} + q^{-1} = 1$, *причем имеет место явное представление для скобок двойственности*:

$$\langle \Phi_g, f \rangle_p \equiv \int\limits_{\Omega} f(x) g(x) \, \mu(dx), \; f(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu), \; g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu). \tag{2}$$

*Отображение* $g \mapsto \Phi_g$ *является изометрическим изоморфизмом.*

# Доказательство-I

Сначала покажем, что формула (2) при каждом $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$, действительно задает некоторый линейный и непрерывный функционал на $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$. И имеет место равенство норм $\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q$.

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \sup_{\|f\|_p=1} |\langle \Phi_g, f\rangle| =$$

$$= \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int_\Omega f(x) g(x)\, \mu(dx) \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \leqslant \|g\|_q, \quad (3)$$

из которой, в частности, вытекает, что $\Phi_g \in \left(\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)\right)^*$.

# Доказательство-II

Докажем, что на самом деле имеет место равенство

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q.$$

Это равенство, очевидно, выполнено если $g = \theta$. Пусть $\|g\|_q > 0$ и рассмотрим сначала случай $p > 1$. Возьмем в формуле (2) функцию

$$f(x) = \frac{\operatorname{sign}(g)|g|^{q/p}}{\|g\|_q^{q/p}}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\langle \Phi_g, f\rangle = \int\limits_{\Omega} g(x) f(x)\, \mu(dx) = \int\limits_{\Omega} \frac{|g(x)|^{q/p+1}}{\|g\|_q^{p/q}}\, \mu(dx) =$$

$$= \frac{1}{\|g\|_q^{p/q}} \int\limits_{\Omega} |g(x)|^q\ \mu(dx) = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{p/q}} = \|g\|_q.$$

# Доказательство-III

Откуда сразу же получаем, что

$$\|\Phi_g\|_* = \sup_{\|f\|=1} |\langle \Phi_g, f\rangle| \geqslant \|g\|_q.$$

Значит, отсюда и из (3), действительно, приходим к следующему равенству:

$$\|\Phi_g\|_* = \|g\|_q.$$

# Доказательство-IV

Рассмотрим теперь случай $p = 1$, тогда $q = +\infty$. Из представления (2) вытекает в силу неравенства Гельдера оценка

$$\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_\infty.$$

С другой стороны, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mu-$измеримое множество $\mathrm{A}_\varepsilon$ с положительной мерой $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство

$$|g(x)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in \mathrm{A}_\varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\mu(\mathrm{A}_\varepsilon) < +\infty$. Теперь введем функцию $f(x) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mu)$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{\mathrm{sign}(g)(x)}{\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)} \begin{cases} \chi_{\mathrm{A}_\varepsilon}(x), & x \in \mathrm{A}_\varepsilon; \\ 0, & x \in \Omega \backslash \mathrm{A}_\varepsilon, \end{cases}$$

где $\chi_{\mathrm{A}_\varepsilon}(x)$ — характеристическая функция множества $\mathrm{A}_\varepsilon$.

# Доказательство-V

Но тогда имеет место неравенство

$$\int\limits_{\Omega} f(x)g(x)\,\mu(dx) \geqslant \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)} \int\limits_{\mathrm{A}_\varepsilon} |g(x)|\,\mu(dx) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu(\mathrm{A}_\varepsilon)} \left[\|g\|_\infty - \varepsilon\right] \mu(\mathrm{A}_\varepsilon) = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\|\Phi_g\|_* \geqslant \|g\|_\infty.$$

Тем самым на этом этапе мы доказали, что отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрической инъекцией всего пространства $\mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$ в пространство $(\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$ при $p \in [1, +\infty)$.

# Доказательство-VI

Докажем, что это отображение является сюръекцией. Итак, пусть $\Phi \in (\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$. Пусть $\chi_A(x)$ — это характеристическая функция множества $A \in \mathcal{M}$. Введем обозначение

$$\nu(A) \equiv \langle \Phi, \chi_A \rangle \,. \tag{4}$$

# Доказательство-VII

Докажем, что $\nu(A)$ — это счетно–аддитивная и абсолютно непрерывный относительно $\mu$ заряд (для краткости: «мера», хоть и не неотрицательная). Рассмотрим случай конечной меры $\mu$, поскольку из доказательства видно, что все результаты распространяются и на случай $\sigma-$конечной меры $\mu$. Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$ — это система попарно непересекающихся множеств, исчерпывающая $A$. Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle.$$

# Доказательство-VIII

Поскольку

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x) \to \chi_A(x) \quad \text{поточечно} \quad x \in A$$

и, кроме того, имеет место оценка

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x) \right| \leqslant 1,$$

то в силу того, что функция $f_N(x)$ в силу теоремы Лебега о переходе под знаком интеграла Лебега сходится сильно в $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle \to \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n} \right\rangle = \langle \Phi, \chi_A \rangle = \nu(A),$$

$$\nu(A) = \sum^{+\infty} \nu(A_n).$$

# Доказательство-IX

Докажем теперь абсолютную непрерывность меры $\nu$ относительно меры $\mu$. Действительно, имеет место цепочка соотношений.

$$|\nu(A)| = |\langle \Phi, \chi_A \rangle| \leqslant \|\Phi\|_* \|\chi_A\|_p =$$
$$= \|\Phi\|_* \left( \int\limits_A 1 \, \mu(dx) \right)^{1/p} = \|\Phi\|_* \left[\mu(A)\right]^{1/p}.$$

Теперь напомним одну важную теорему теории меры и интеграла Лебега:

# Доказательство-X

**Теорема Радона–Никодима.** *Пусть* $\mu$ *и* $\nu$ *— конечные меры на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{M})$ *. Мера* $\nu$ *абсолютно непрерывна относительно меры* $\mu$ *в точности тогда, когда существует такая* $\mu-$*интегрируемая функция* $g$, *что имеет место представление*:

$$\nu(A) = \int\limits_A g(x)\,\mu(dx) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{M}. \tag{5}$$

# Доказательство-XI

Тем самым для введенной меры $\nu$ выполнены все условия теоремы Радона–Никодима. Таким образом, найдется такая $\mu-$интегрируемая функция $g(x)$, что имеет место представление (5). Осталось доказать, что $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle \Phi, \chi_A \rangle = \int\limits_{\Omega} g(x)\chi_A(x)\,\mu(dx). \tag{6}$$

Пусть $f(x)$ — это простая функция, тогда из (6) получим

$$\langle \Phi, f \rangle = \int\limits_{\Omega} g(x)f(x)\,\mu(dx). \tag{7}$$

# Доказательство-XII

В силу плотности множества простых функций во множестве измеримых и ограниченных функций $\mathbb{B}(\Omega)$ приходим к выводу, что (7) справедливо для $f(x) \in \mathbb{B}(\Omega)$. Теперь осталось доказать, что $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$.
С этой целью введем специально выбранную функцию из $\mathbb{B}(\Omega)$. Именно, пусть

$$f_n(x) = |g(x)|^{q/p}\chi_{A_n}(x)\,\mathrm{sign}(g), \quad A_n = \{x: \ |g(x)| \leqslant n\}.$$

Понятно, что множество $A_n$ является $\mu-$измеримым. Тогда

$$\langle \Phi, f_n \rangle = \int\limits_{A_n} |g|^{q/p}|g|\,\mu(dx) = \int\limits_{A_n} |g(x)|^q\,\mu(dx),$$

поскольку

$$1 + \frac{q}{p} = q.$$

# Доказательство-XIII

С другой стороны,

$$|\langle \Phi, f_n \rangle| \leqslant \|\Phi\|_* \|f_n\|_p.$$

Так что имеет место неравенство

$$\int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx) \leqslant \|\Phi\|_* \left( \int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

Значит,

$$\left( \int\limits_{\Omega} |g(x)|^q \chi_{A_n}(x) \, \mu(dx) \right)^{1/q} \leqslant \|\Phi\|_*.$$

В силу уже озвученной здесь теоремы Фату приходим к выводу, что

$$g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu).$$

# Доказательство-XIV

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Докажем, что функция $g(x) \in \mathbb{L}^{\infty}(\Omega, \mu)$. С этой целью рассмотрим множество

$$\mathrm{A} \equiv \{x : \ |g(x)| > \|\Phi\|_*\} .$$

Докажем, что эти множества имеют нулевую $\mu-$меру Лебега. Действительно, предположим, что $\mu(\mathrm{A}) > 0$. Тогда

$$\left\langle \Phi, \frac{\chi_{\mathrm{A}} \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle = \frac{1}{\mu(\mathrm{A})} \int\limits_{\Omega} |g(x)| \chi_{\mathrm{A}}(x)\, \mu(dx) >$$

$$> \frac{1}{\mu(\mathrm{A})} \mu(\mathrm{A}) \|\Phi\|_* = \|\Phi\|_*.$$

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|\Phi\|_* = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} |\langle \Phi, f\rangle| \geqslant \left\langle \Phi, \frac{\chi_{\mathrm{A}} \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle > \|\Phi\|_*.$$

# Доказательство-XV

Значит,

$$\|\Phi\|_* > \|\Phi\|_*.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\mu(\mathrm{A}) = 0$. И значит, почти всюду $|g(x)| \leqslant \|\Phi\|_*$. Тем самым доказано, что $g(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega, \mu)$.

Стало быть, мы получили следующий результат. Для произвольного линейного, непрерывного функционала $\Phi \in (\mathbb{L}^p(\Omega, \mu))^*$ при $p \in [1, +\infty)$ найдется такая функция $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$ с $q = p/(p-1)$, что имеет место равенство

$$\langle \Phi, f \rangle = \int\limits_{\Omega} g(x) f(x) \, \mu(dx),$$

справедливое для всех простых функций $f(x)$, но, как известно, множество простых функций в случае конечной меры $\mu$ плотно в $\mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$. Стало быть, приходим к утверждению теоремы.

**Определение 1.** *Будем говорить, что последовательность* $\{f_n\} \subset \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty]$ *сходится сильно к некоторому элементу* $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$, *если имеет место предельное равенство*

$$\|f - f_n\|_p \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{8}$$

**Определение 2.** *Будем говорить, что последовательность* $\{f_n\} \subset \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *сходится слабо к некоторому элементу* $f \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mu)$, *если для любой функции* $g(x) \in \mathbb{L}^q(\Omega, \mu)$ *при* $q = p/(p-1)$ *выполнено предельное равенство*

$$\int\limits_{\Omega} [f_n(x) - f(x)] g(x)\, \mu(dx) \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty. \tag{9}$$