ЛЕКЦИЯ 6А—7А
Равномерная выпуклость пространств Лебега.
Слабая сходимость, дальнейшие факты

1. Неравенства Кларксона и равномерная выпуклость пространств Лебега

Неравенства Кларксона для функций $f, g \in L^p(X)$ имеют вид (с $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p, \quad p \in [2; +\infty),$$

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q \leqslant \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{q-1}, \quad p \in (1; 2].$$

Мы приведём полный вывод первого неравенства.

0. Заметим, что для любых $a, b \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ верны неравенства

$$a^r + b^r \leqslant (a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r), \tag{0a; 0b}$$

откуда для $s \leqslant 1$

$$a^s + b^s \geqslant (a+b)^s. \tag{1}$$

Для доказательства неравенств $(0a)$ и $(0b)$ мы воспользуемся их однородностью и разделим все три выражения на a^r. (Случай $a = 0$ тривиален.) Отношение $\frac{b}{a}$ снова обозначим символом b. С учётом этих рассуждений нам остаётся доказать неравенства

$$1 + b^r \leqslant (1+b)^r \leqslant 2^{r-1}(1 + b^r). \tag{0a'; 0b'}$$

Очевидно, что неравенство $(0a')$ обращается в равенство при $b = 0$ (найти эту точку можно, например, с помощью дифференцирования). Возьмём производные от левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{d}{db}(1 + b^r) = rb^{r-1}, \quad \frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}.$$

Очевидно, что при $b \geqslant 0$, $r - 1 \geqslant 0$ имеет место следующее неравенство, связывающее указанные производные:

$$rb^{r-1} \leqslant r(1+b)^{r-1}. \tag{2}$$

Поскольку при $b = 0$ в $(0a')$ достигается равенство, то из (2) получаем неравенство $(0a')$ при всех $b \geqslant 0$.

Чтобы теперь доказать $(0b')$, заметим, что это неравенство обращается в равенство при $b = 1$. Далее,

$$\frac{d}{db}(1+b)^r = r(1+b)^{r-1}, \quad \frac{d}{db}2^{r-1}(1 + b^r) = 2^{r-1}rb^{r-1}.$$

Достаточно показать, что

$$r(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad r(1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1}rb^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1,$$

или

$$(1+b)^{r-1} \geqslant 2^{r-1}b^{r-1} \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad (1+b)^{r-1} \leqslant 2^{r-1}b^{r-1} \quad \text{при} \quad b \geqslant 1.$$

Но это следует из очевидных неравенств

$$1+b \geqslant 2b \quad \text{при} \quad b \leqslant 1, \quad 1+b \leqslant 2b \quad \text{при} \quad b \geqslant 1$$

в силу $r-1 \geqslant 0$. Таким образом, неравенства $(0a; 0b)$ полностью доказаны.

Далее, неравенство (1) следует из $(0a)$, если в последнем в качестве a, b, r взять соответственно a^s, b^s, $\frac{1}{s}$.

1. Теперь докажем, что для всех комплексных α, β и всех $p \geqslant 2$ верно неравенство

$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Это имеет место в силу легко проверяемого равенства параллелограмма

$$\left(|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и неравенства

$$(|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p)^{\frac{2}{p}} \leqslant |\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2,$$

которое получается, если положить в (1) $a = |\alpha+\beta|^p$, $b = |\alpha-\beta|^p$, $s = \frac{2}{p}$.

2. Возводя (3) в положительную степень p и пользуясь далее (0b) с $r = \frac{p}{2} \geqslant 1$, имеем:

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{\frac{p}{2}}\left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leqslant 2^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{\frac{p}{2}-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right) = 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right),$$

откуда следует

$$|\alpha+\beta|^p + |\alpha-\beta|^p \leqslant 2^{p-1}\left(|\alpha|^p+|\beta|^p\right), \tag{4}$$

где, напоминаем, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $p \geqslant 2$.

3. Переписав теперь только что полученное числовое неравенство (4) в виде

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^p + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p, \tag{5}$$

положив при каждом $x \in X$ $\alpha = f(x)$, $\beta = g(x)$ и проинтегрировав по области X, получим первое неравенство Кларксона.

Для вывода второго неравенства Кларксона используется обратное неравенство Минковского (см. задачу 5 или, напр.: С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988, с. 17) и следующее числовое неравенство, доказательство которого мы здесь не приводим (см. задачу 6):

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^q + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^q \leqslant \left(\frac{1}{2}|\alpha|^p + \frac{1}{2}|\beta|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{6}$$

где по-прежнему $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, но теперь $p \in (1; 2]$.

В целях удобства записи будем пользоваться стандартным обозначением

$$\|f\|_u \equiv \left(\int_X |f(x)|^u \, d\mu\right)^{\frac{1}{u}}$$

даже при $u \in (0;1)$, хотя в последнем случае эта величина, конечно, нормой не является (см. обратное неравенство Минковского). Тогда для любой функции $h \in L^p(X)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\||h|^q\|_{p-1} = \left(\int_X |h(x)|^{q(p-1)} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\int_X |h(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{q}{p}} = \|h\|_p^q. \tag{7}$$

В силу (7), обратного неравенства Минковского и (6) получим:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q = \left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_X \left[\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right]^{p-1} d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_X \left[\frac{1}{2}|f(x)|^p + \frac{1}{2}|g(x)|^p\right] d\mu\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{1}{2}\|f\|^p + \frac{1}{2}\|g\|^p\right)^{q-1},$$

что и доказывает второе неравенство Кларксона.

4. Теперь убедимся в том, что из неравенств Кларксона следует равномерная выпуклость пространств $L^p(X)$ при $p > 1$.

Вначале напомним определение равномерной выпуклости. Банахово пространство B называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{8}$$

Легко видеть, что при $p \geqslant 2$ из первого неравенства Кларксона, записанного в виде

$$\|f+g\|_p^p \leqslant 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right) - \|f-g\|_p^p,$$

при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$ имеем

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} = 2(1 - \delta_1(\varepsilon))$$

при $\delta_1(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}} > 0$, т. е. (8). Далее, при $p \leqslant 2$ из второго неравенства получаем при $\|f\|_p \leqslant 1$, $\|g\|_p \leqslant 1$, $\|f - g\|_p \geqslant \varepsilon > 0$

$$\|f+g\|_p \leqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} = 2(1 - \delta_2(\varepsilon))$$

с $\delta_2(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{\frac{1}{q}} > 0$, т. е. (8).

2. Слабая сходимость: примеры и контрпримеры

Определение. Множество M в банаховом пространстве B называется *слабо замкнутым*, если из $x_n \rightharpoonup x$, $\{x_n\} \subset M$ следует $x \in M$. (Иными словами, речь идёт о замкнутости в смысле слабой сходимости.)

Обсудим связь между замкнутостью множества в банаховом пространстве и его слабой замкнутостью.

1. Всякое слабо замкнутое множество замкнуто. Действительно, пусть M — слабо замкнутое множество в банаховом пространстве и $x_n \to x$. Тогда имеем $x_n \rightharpoonup x$, отсюда в силу условия слабой замкнутости $x \in M$, т. е. M — замкнутое множество.

2. Обратное неверно: не всякое замкнутое множество слабо замкнуто. Действительно, сфера $S_1 = \{x \mid \|x\| = 1\}$ в гильбертовом пространстве замкнута как прообраз замкнутого множества $\{1\}$ на числовой оси при отображении, осуществляемой непрерывной функцией «норма». Однако S_1 не является слабо замкнутым множеством, поскольку, как известно, $e_n \rightharpoonup \theta$ (здесь и далее, если речь идёт о гильбертовом пространстве, e_n — элементы ортонормированного базиса), но $\theta \notin S_1$.

3. Замкнутое подпространство является слабо замкнутым. В самом деле, пусть L — (замкнутое) подпространство банахова пространства B, $\{x_n\} \subset L$, $x_n \rightharpoonup x$. Докажем, что $x \in L$. Действительно, в противном случае по одному из следствий из теоремы Хана—Банаха существовал бы функционал $f \in L^*$, для которого $\|f\|_* = 1$, $f|_L = 0$, $\langle f, x \rangle = \|x\| \neq 0$. Тогда в силу слабой сходимости имели бы $0 = \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \neq 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Обсудим теперь некоторые случаи, которые могут возникнуть, когда не выполнено то или иное условие критерия сильной сходимости в равномерно выпуклых банаховых пространствах.

Например, может случиться так, что $u_n \rightharpoonup u$, $\|u_n\| \to C \neq \|u\|$.

4. Так будет при $u_n = e_n$ в гильбертовом пространстве: $u_n \rightharpoonup \theta$, $\|u_n\| \to 1 \neq \|\theta\|$.

5. Можно привести другой пример: пусть $B = L^2(\mathbb{R})$, $u_n = \chi_{[n;n+1]}(x)$. Тогда, очевидно, $\|u_n\| = 1$. При этом $u_n \rightharpoonup 0$. В самом деле, в силу изоморфизма L^2 и $(L^2)^*$ достаточно показать, что при всех $v \in L^2(\mathbb{R})$ верно $(v, u_n) \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned}(v, u_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) u_n(x)\, dx = \int_n^{n+1} v(x) u_n(x)\, dx \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_n^{n+1} |u_n(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx} \cdot 1 = \sqrt{\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx}.\end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку

$$\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx,$$

в силу необходимого условия сходимости рядов имеем $\int_n^{n+1} |v(x)|^2\, dx \to 0$, откуда в силу (9) заключаем, что $u_n \rightharpoonup 0$.

6. Заменив в каждом из предыдущих примеров u_{2k} на $\frac{1}{2}u_{2k}$, получим: $u_n \rightharpoonup \theta$, $\{\|u_n\|\}$ не имеет предела.

7. Можно привести и обратный пример: $\|u_n\| \to C$, но при этом $\{u_n\}$ не является слабо сходящейся последовательностью. Пусть, например, $x_0 \in H$ — некоторый ненулевой элемент гильбертова пространства H. Положим $u_n = (-1)^n(x_0 + e_n)$. Тогда, очевидно, $u_{2k} \rightharpoonup x_0$, $u_{2k+1} \rightharpoonup -x_0$, что исключает возможность сходимости всякой числовой последовательности $\{\langle f, u_n\rangle\}$, если только $\langle f, x_0\rangle \neq 0$. Что же касается сходимости норм, имеем

$$\|u_n\|^2 = \|x_0\|^2 + \|e_n\|^2 + 2(x_0, e_n) = \|x_0\|^2 + 1 + 2(x_0, e_n) \to \|x_0\|^2 + 1.$$

Замечание. Мы говорим «не является слабо сходящейся», а не «не имеет слабого предела», потому что одним из возможных определений слабой сходимости является просто требование существования предела числовой последовательности $\{\langle f, u_n\rangle\}$ для всякого $f \in B^*$. Это, вообще говоря, ещё не гарантирует существования такого элемента u, что $\langle f, u_n\rangle \to \langle f, u\rangle$ при всех $f \in B^*$. (См. Иосида. Функциональный анализ. Глава V.)

3. Связь сильной и слабой сходимости: частный случай теоремы Мазура

8. Пусть $x_n \rightharpoonup x$ — слабо сходящаяся последовательность элементов гильбертова пространства H. Докажем, что из неё можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой

$$\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right) \to x \quad \text{при } k \to \infty.$$

Рассмотрим сначала случай $x = \theta$. Положим $n_1 = 1$. Поскольку в силу условия слабой сходимости данной последовательности имеем $(x_n, x_{n_1}) \to 0$, то найдётся такое $n_2 > n_1$, что $|(x_{n_2}, x_{n_1})| \leqslant 1$. Далее, по аналогичной причине существует такое $n_3 > n_2$, что $|(x_{n_3}, x_{n_1})| \leqslant \frac{1}{2}$, $|(x_{n_3}, x_{n_2})| \leqslant \frac{1}{2}$. Продолжая эту процедуру далее, на каждом k-ом шаге построим такое $n_{k+1} > n_k$, что

$$|(x_{n_{k+1}}, x_{n_1})| \leqslant \frac{1}{k}, \ldots, |(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})| \leqslant \frac{1}{k}. \tag{10}$$

Заметим также, что в силу слабой сходимости последовательности $\{x_n\}$ можно утверждать её ограниченность: $\|x_n\| < C$. Имеем теперь

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{k}\left(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}\right)\right\|^2 &= \frac{1}{k^2}\left[\sum_{i=1}^{k}\|x_{n_i}\|^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}(x_{n_s}, x_{n_i})\right] \leqslant \\
&\leqslant \left[kC^2 + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}\frac{1}{s-1}\right] = \left[kC^2 + 2\sum_{s=2}^{k}\sum_{i=1}^{s-1}\frac{1}{s-1}\right] = \\
&= \frac{1}{k^2}\left[kC^2 + 2\sum_{s=2}^{k}\frac{s-1}{s-1}\right] \leqslant \frac{C^2+2}{k} \to 0,
\end{aligned}$$

где в первом неравенстве мы учли оценку (10), а затем поменяли порядок суммирования в двойной сумме (рекомендуется сделать рисунок, поясняющий это изменение порядка). Таким образом,

$$\frac{1}{k}\,(x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}) \to 0.$$

Для рассмотрения общего случая следует применить только что доказанный результат к последовательности $\{y_n\} \equiv \{x_n - x\}$.

Утверждение доказано.

Замечание. Это утверждения является частным случаем теоремы Мазура: если $x_n \rightharpoonup x$ в банаховом пространстве B, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такая их выпуклая комбинация

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1,$$

что $\|x - y_k\| \leqslant \varepsilon$. (См. Иосида. Функциональный анализ. Глава V.)

Это утверждение представляет интерес с точки зрения задач математической физики. В самом деле, если удаётся установить ограниченность последовательности $\{v_n\}$ приближённых решений (например, полученных по методу Галёркина), то в силу соответствующих теорем для сепарабельного или рефлексивного пространства устанавливается существование её слабо сходящейся подпоследовательности $v_{n_k} \rightharpoonup v$, а в силу упомянутого факта можно построить последовательность выпуклых комбинаций элементов $\{v_{n_k}\}$, сильно сходящуюся к тому же пределу v. Это полезно, в частности, тем, что свойства элементов последовательности $\{v_{n_k}\}$, инвариантные относительно образования выпуклой комбинации и предельного перехода (например, свойства гладкости или знакоопределённости), окажутся доказанными и для v, которое в типичной ситуации и будет точным решением.

4. Пространство l^1. Свойство Шура

Как мы помним, $(l^1)^* = m \equiv l^\infty$.

9. Докажем, что в l^1 покоординатная сходимость слабее слабой сходимости. Для этого приведём пример последовательности $x^{(k)}$, не являющейся слабо сходящейся, но обладающей свойством покоординатной сходимости. (Здесь и далее по тексту верхний индекс будет означать номер элемента пространства, нижний — номер элемента числовой последовательности, образующей элемент пространства).

Положим

$$x^{(k)} = \Bigl(\underbrace{\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{k}, 0, 0, \ldots\Bigr).$$

Очевидно:

1) при всех $k \in \mathbb{N}$ $\|x^{(k)}\| = 1$,

2) имеем место *покоординатная* сходимость последовательности $\{x^{(k)}\}$ к нулевому элементу.

Покажем, что $\{x^{(k)}\}$ не сходится даже слабо (не говоря уже о сильной сходимости).

В самом деле, предположим противное: пусть $x^{(k)} \rightharpoonup x$. Тогда, положив

$$f_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots) \in l^\infty$$

(заметим, что эти элементы нельзя называть базисными: в l^∞ не может существовать счётного базиса!), получим, что x заведомо является покоординатным пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$. Поскольку каждая из последовательностей координат $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ может иметь лишь один предел, то с необходимостью $x = \theta$. Далее, положим $f = (1, 1, \ldots) \in l^\infty$. Легко видеть, что $\langle f, x^{(k)}\rangle = 1 \to 1 \neq \langle f, \theta\rangle$, т. е. наше предположение о слабой сходимости привело к противоречию.

10. Пространство l^1 интересно так называемым *свойством Шура* — в нём сильная и слабая сходимость равносильны. (Таким образом, *не только конечномерные* пространства могут обладать свойством Шура.) Докажем это интересное свойство методом «от противного».

Итак, пусть $x^{(n)} \rightharpoonup x$. Аналогично п. 8 заменяя при необходимости $x^{(n)}$ на $x^{(n)} - x$, можно ограничиться рассмотрением случая $x = \theta$. В этом случае, как показано в предыдущем примере, последовательность $\{x^{(n)}\}$ заведомо обладает свойством покоординатной сходимости к нулю. Предположим теперь, что $x^{(n)} \not\to \theta$. В таком случае имеется подпоследовательность $x^{(n_\alpha)}$, отграниченная от нуля, т. е. существует такое $M > 0$, что при всех $\alpha \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\|x^{(n_\alpha)}\| \geqslant M. \tag{11}$$

С другой стороны, естественно,

$$\|x^{(n_\alpha)}\| < +\infty, \tag{12}$$

поскольку $x^{(n_\alpha)} \in l^1$. Теперь наша цель состоит в том, чтобы извлечь из $x^{(n_\alpha)}$ подпоследовательность $x^{(n_{\alpha_k})}$, не обладающую свойством слабой сходимости к θ.

Положим $\alpha_1 = 1$ и заметим, что в силу (11) и (12) найдётся такое m_1, что

$$\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_1})}| \geqslant \frac{4}{5}M.$$

Однако в силу свойства покоординатной сходимости к нулю имеем $x_i^{(n_\alpha)} \to 0$ при $\alpha \to \infty$ для всех i (напоминаем, i — номер «координаты» элемента), поэтому найдётся такое $\alpha_2 > \alpha_1$, что $\sum_{i=1}^{m_1} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}$. (Здесь m_1 ранее зафиксировано!) Тогда $\sum_{i=m_1+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| > \frac{9}{10}M$ и найдётся такое $m_2 > m_1$, что

$$\sum_{i=m_1+1}^{m_2} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| \geqslant \frac{4}{5}M, \quad \sum_{i=m_2+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_2})}| < \frac{M}{10}.$$

Продолжая эту процедуру аналогичным образом, построим строго возрастающие последовательности $\{m_k\}$ (где $m_0 = 0$), $\{\alpha_k\}$, для которых верно:

$$\sum_{i=1}^{m_{k-1}} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}, \quad \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| \geqslant \frac{4}{5}M, \quad \sum_{i=m_k+1}^{\infty} |x_i^{(n_{\alpha_k})}| < \frac{M}{10}. \tag{13}$$

Введём теперь в рассмотрение функционал $f = (c_1, c_2, \ldots) \in l^\infty$, где c_j выберем по следующему принципу. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдём такое k, что $m_{k-1} \leqslant j \leqslant m_k$ (оно существует, поскольку в силу нашего построения целые неотрицательные числа m_k образуют возрастающую последовательность) и положим

$$c_j = \operatorname{sgn} x_j^{(n_{\alpha_k})}. \tag{14}$$

Очевидно, $f \in l^\infty$. Имеем теперь с учётом (13), (14)

$$\begin{aligned}\langle f, x^{(n_{\alpha_k})}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} \geqslant \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} c_i x_i^{(n_{\alpha_k})} - \sum_{i=1}^{m_{k-1}} \left|x_i^{(n_{\alpha_k})}\right| - \sum_{i=m_k+1}^{\infty} \left|x_i^{(n_{\alpha_k})}\right| \geqslant \\ \geqslant \frac{4}{5}M - \frac{M}{10} - \frac{M}{10} = \frac{3}{5}M,\end{aligned}$$

т. е. $\langle f, x^{(n_{\alpha_k})}\rangle \not\to 0$ и $x^{(n_{\alpha_k})} \not\rightharpoonup \theta$, а следовательно, и $x^{(n)} \not\rightharpoonup \theta$.

Утверждение доказано.

Рекомендуется сделать рисунок, иллюстрирующий выбор подпоследовательностей и оценки отрезков сумм.

Замечание. Может показаться, что мы вывели сильную сходимость из покоординатной, что было бы очень странно с учётом предыдущего примера. На самом деле, конечно, это не так: мы существенно использовали специально построенный функционал f, отличный от «координатных» функционалов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что всякое гильбертово пространство является равномерно выпуклым.

2. Показать (на контрпримерах), что пространства $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$ не являются строго выпуклыми (и тем более равномерно выпуклыми). Вычислить для функций f, g, использованных в ваших примерах, величины $\|f+g\|_2$, $\|f-g\|_2$, $\|f\|_2$, $\|g\|_2$.

4*. Пусть K — замкнутое выпуклое множество в равномерно выпуклом банаховом пространстве. Показать, что тогда функция $f(x) = \|x\|$ достигает своего минимума на K, и притом ровно в одной точке. *Замечание.* Вот, наряду с критерием сильной сходимости, ещё одно полезное свойство равномерно выпуклых пространств. Как мы теперь знаем, пространства Лебега $L^p(\Omega)$ с $1 < p < +\infty$ таковыми являются.

5. Доказать обратное неравенство Минковского:

$$\text{при } 0 < u < 1 \quad \|f+g\|_u \geqslant \|f\|_u + \|g\|_u.$$

6*. Доказать неравенство (6).

7. Возможно ли существование последовательности $\{u_n\}$, для которой $u_n \rightharpoonup \theta$, $\|u_n\| \to \infty$?

8. Доказать, что последовательность в банаховом пространстве может иметь не более одного слабого предела.

9. Пусть $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ (ограниченный линейный оператор, определённый на всём B_1), где B_1, B_2 — банаховы пространства. Доказать, что A непрерывен и в смысле слабой сходимости, т. е. если $x_n \rightharpoonup x$ в B_1, то $Ax_n \rightharpoonup Ax$ в B_2.

10. Пусть $A \in \mathcal{L}(B_1, B_2)$ и замыкание образа единичного шара $\{x \in B_1 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ компактно в B_2. (Такие линейные операторы называются *вполне непрерывными*.) Доказать, что A преобразует слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, т. е. если $x_n \rightharpoonup x$ в B_1, то $Ax_n \to Ax$ в B_2.

11. Доказать, что всякое выпуклое замкнутое множество в банаховом пространстве слабо замкнуто. (Заметим, что отсюда сразу же следует слабая замкнутость (замкнутого) подпространства, которую мы установили непосредственно.)

12*. Пусть X — сепарабельное линейное нормированное пространство. Доказать, что в X^* существует счётное множество, всюду плотное в смысле $*$-слабой сходимости.