

ЛЕКЦИЯ 3А (4)

Теорема Радона—Никодима

Это занятие будет посвящено доказательству теоремы Радона—Никодима. Она будет нужна нам для того, чтобы доказать изоморфизм пространств $L^p(\Omega)$ и $(L^q(\Omega))^*$, где $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Заряды

Пусть X — некоторое множество (которое мы часто будем называть пространством, подчёркивая тем самым, что в дальнейшем будут рассматриваться его подмножества), \mathcal{A}_μ — некоторая σ -алгебра его подмножеств. Напомним

Определение. Числовая функция μ , определённая на \mathcal{A}_μ , называется *мерой*, если

- 1) $\forall A \in \mathcal{A}_\mu \mu(A) \geq 0$;
- 2) μ обладает свойством σ -аддитивности, т. е. если $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}_\mu$ и при всех $i, j \in \mathbb{N}$ верно $A_i \cap A_j = \emptyset$, то $\mu(\bigsqcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Для простоты будем пока рассуждать о конечных мерах: $\mu(X) < +\infty$.

Пусть $f(x)$ — некоторая неотрицательная измеримая по мере μ и интегрируемая (по Лебегу) на X функция. Тогда величина

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu \quad (1)$$

определена для всех $A \in \mathcal{A}_\mu$ и обладает всеми свойствами меры. Таким образом, формула (1) определяет некоторую новую меру на \mathcal{A}_μ . Если снять условие неотрицательности функции, так уже не будет. Однако в определении меры тоже можно снять условие неотрицательности и прийти к обобщению понятия меры:

Определение. Числовая функция Φ , определённая на σ -алгебре \mathcal{A}_Φ подмножеств пространства X и обладающая на этой σ -алгебре свойством σ -аддитивности, называется *зарядом*. Заряд называется *конечным*, если его значение на любом $A \in \mathcal{A}$ выражается конечным числом ($\pm\infty$ не допускается).

Смысл такого названия ясен: $\Phi(A)$ можно представить себе как полный электрический заряд, заключённый в объёме A . В этом случае $f(x)$ будет иметь смысл объёмной плотности заряда.

Нашей целью будет доказать, что не только всякая интегрируемая функция порождает заряд, но и, напротив, при некоторых условиях всякий заряд может быть представлен в виде (1) с некоторой функцией $f(x)$.

2. Разложение Хана и разложение Жордана

Итак, пусть рассматривается заряд Φ , определённый на σ -алгебре \mathcal{A} подмножеств пространства X и принимающий лишь конечные значения (такой заряд называется *конечным*). Кратко

будем говорить, что заряд определён на пространстве X , а множества из \mathcal{A} будем в этом параграфе называть измеримыми (рассматривая тем самым измеримость не относительно меры, а относительно заряда).

Определение. Множество $E \in \mathcal{A}$ называется *отрицательным относительно заряда Φ* , если $\forall F \in \mathcal{A}$ верно $\Phi(E \cap F) \leq 0$. Множество $E \in \mathcal{A}$ называется *положительным относительно заряда Φ* , если $\forall F \in \mathcal{A}$ верно $\Phi(E \cap F) \geq 0$.

Замечание. Вообще говоря, далеко не всякое множество, имеющее отрицательный заряд, является отрицательным. (В каком случае всё-таки это можно утверждать?)

Лемма 1. Множество $A \in \mathcal{A}$ положительно относительно заряда Φ тогда и только тогда, когда всякое его измеримое подмножество имеет неотрицательный заряд. (Аналогичное утверждение можно сформулировать для отрицательного множества.)

Доказательство рекомендуется провести самостоятельно (см. задачу 2).

Лемма 2. Пусть $A_0 \in \mathcal{A}$, $\Phi(A_0) < 0$. Тогда в A_0 найдётся измеримое отрицательное подмножество строго отрицательного заряда.

Доказательство. Заметим, что A_0 непусто (см. задачу 1). Далее, если в A_0 нет подмножеств положительного заряда, утверждение доказано (см. лемму 1).

Рассмотрим теперь случай, когда в A_0 найдётся хотя бы одно подмножество положительного заряда. Тогда существуют такое $k \in \mathbb{N}$ и такое измеримое подмножество $C \subset A_0$, что $\Phi(C) \geq \frac{1}{k}$. Выберем наименьшее из натуральных k , обладающее следующим свойством: в A_0 есть измеримое подмножество C с $\Phi(C) \geq \frac{1}{k}$. Зафиксируем такое k и такое C , обозначив их соответственно k_1, C_1 . Положим

$$A_1 = A_0 \setminus C_1.$$

Заметим, что $\Phi(A_1) = \Phi(A_0) - \Phi(C_1) < 0$, поэтому A_1 непусто. Могут представиться два случая: либо A_1 является отрицательным множеством, и тогда утверждение доказано, либо в A_1 найдётся подмножество C положительного заряда. Во втором случае вновь выберем наименьшее натуральное k , для которого в A_1 найдётся подмножество C с $\Phi(C) \geq \frac{1}{k}$. Обозначим эти число и множество соответственно k_2, C_2 . Заметим, что с необходимостью $k_2 \geq k_1$. В самом деле, в случае $k_2 < k_1$ получили бы, что k_1 , найденное на первом шаге, не является минимально возможным, ведь для $C_2 \subset A_1 \subset A_0$ имеем $\Phi(C_2) \geq \frac{1}{k_2}$.

Продолжим эту процедуру, если понадобится, до бесконечности. Чтобы корректно воспользоваться этим построением в дальнейшей части доказательства, опишем её более подробно.

Итак, *перед* каждым шагом с номером $l \in \mathbb{N}$ имеем: $\Phi(A_{l-1}) < 0$, но A_{l-1} не является отрицательным множеством. Поэтому существует такое k_l — наименьшее из натуральных чисел k , для которых найдётся $C \subset A_{l-1}$ с $\Phi(C) \geq \frac{1}{k}$. (Отсюда следует, что

$$\text{все подмножества } D \subset A_{l-1} \text{ таковы, что } \Phi(D) < \frac{1}{m} \text{ при всех } m < k_l.) \quad (2)$$

Выберем для этого числа k_l такое множество $C \subset A_{l-1}$, $\Phi(C) \geq \frac{1}{k_l}$, и зафиксируем его, обозначив через C_l . Далее, $k_l \geq k_{l-1}$, иначе имели бы: $C_l \subset A_{l-1} \subset A_{l-2}$ и $\Phi(C_l) \geq \frac{1}{k_l} > \frac{1}{k_{l-1}}$, что

противоречит определению числа k_{l-1} . (Проверьте, что в случае $l = 1$ мы приходим к описанию первого шага, с которого начали изложение процедуры.)

Полагаем теперь

$$A_l = A_{l-1} \setminus C_l. \quad (3)$$

Заметим, что $\Phi(A_l) = \Phi(A_{l-1}) - \Phi(C_l) < 0$. Следовательно, A_l непусто. Если A_l — отрицательное множество, утверждение доказано. Если A_l не является отрицательным множеством, переходим к шагу $l + 1$.

В результате мы либо за конечное число шагов придём к отрицательному множеству строго отрицательного заряда, либо построим бесконечную последовательность пар $\{(k_l, C_l)\}_{l=1}^{\infty}$. Легко видеть, что множества C_l попарно не пересекаются, поскольку при $p < q$ имеем: $C_q \subset A_{q-1} \subset \dots \subset A_p$, $C_p \cap A_p = \emptyset$ в силу (3). Далее, легко видеть, что $k_l \rightarrow +\infty$. В противном случае имели бы:

$$\exists M > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists l > N \quad k_l \leq M,$$

т. е. в последовательности $\{k_l\}$ имеется подпоследовательность $\{k_{l_N}\}$ с $k_{l_N} \leq M$, или $\Phi(C_{l_N}) \geq \frac{1}{M} > 0$. Но тогда, поскольку множества C_k попарно не пересекаются, имели бы

$$\Phi(\sqcup_{N \in \mathbb{N}} C_{l_N}) = \sum_{N \in \mathbb{N}} \Phi(C_{l_N}) = +\infty,$$

что исключается условием конечности заряда Φ на всех множествах из \mathcal{A} . (На самом деле подпоследовательность выбирать даже не пришлось бы, т. к. из доказанной ранее монотонности следовала бы ограниченность всей последовательности.)

Рассмотрим теперь множество

$$A_{\infty} := A_0 \setminus \sqcup_{l \in \mathbb{N}} C_l = \cap_{l \in \mathbb{N}} A_l.$$

Поскольку $\Phi(A_0) < 0$, $\Phi(\sqcup_{l \in \mathbb{N}} C_l) > 0$, то A_{∞} имеет строго отрицательный заряд. Докажем, что A_{∞} — отрицательное множество. Предположим противное: пусть существует $D \subset A_{\infty}$ такое, что $\Phi(D) > 0$. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого существует $D \subset A_{\infty}$ с $\Phi(D) \geq \frac{1}{m}$. Поскольку, как ранее показано, $k_l \rightarrow +\infty$, то найдётся такое наименьшее n , что $k_n > m$:

$$n = \min\{n \in \mathbb{N} \mid k_n > m\}.$$

Тогда в силу (2) имеем для k_n : все $C \subset A_{n-1}$ таковы, что $\Phi(C) < \frac{1}{m}$. Но это противоречит условию выбора m : $\Phi(D) \geq \frac{1}{m}$, поскольку по предположению $D \subset A_{\infty} \subset A_{n-1}$.

Лемма доказана.

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. Если Φ — конечный заряд, определённый на X , то существует такое измеримое множество $A^- \subset X$, что A^- отрицательно относительно Φ , а $A^+ = X \setminus A^-$ положительно относительно Φ .

Доказательство. Тривиальный случай заряда, положительного на всяком измеримом множестве (т. е. являющегося мерой), можно не рассматривать: в этом случае достаточно положить $A^- = \emptyset$.

Положим

$$a = \inf \Phi(A),$$

где точная нижняя грань берётся по всем отрицательным измеримым множествам (семейство таких подмножеств непусто в силу леммы 2). Пусть последовательность $\{A_n\}$ отрицательных измеримых множеств такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(A_n) = a.$$

Такая последовательность существует в силу определения точной нижней грани. Положим теперь

$$A^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Заметим, что A^- измеримо (т. к. заряд определён на σ -алгебре) и $\Phi(A^-) = a$ (см. задачу 3). Отсюда, в частности, следует, что $a > -\infty$, иначе заряд принимал бы бесконечные значения. Кроме того, можно утверждать, что A^- — отрицательное множество (см. задачу 4).

Докажем теперь, что $A^+ = X \setminus A^-$ — положительное множество. Предположим противное (см. лемму 1): пусть A^+ содержит измеримое подмножество A_0 такое, что $\Phi(A_0) < 0$. В силу леммы 2 найдётся отрицательное подмножество $A \subset A_0$ с $\Phi(A) < 0$. Но тогда $A \subset A^+$, откуда $A \cap A^- = \emptyset$, и $\Phi(A^- \sqcup A) = \Phi(A^-) + \Phi(A) < a$. Но по построению числа a отрицательных множеств заряда меньше a нет. Полученное противоречие доказывает, что множество A^+ является положительным относительно заряда Φ .

Теорема доказана.

Определение. Разбиение пространства X на положительное и отрицательное множества называется *разложением Хана* пространства X относительно заряда Φ .

Легко видеть, что разложение Хана, вообще говоря, не единственно (почему?). Однако можно утверждать, что если

$$X = A_1^- \sqcup A_1^+, \quad X = A_2^- \sqcup A_2^+$$

суть два таких разложения, то для любого измеримого множества E

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-), \quad \Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+).$$

Действительно, положим

$$A_{12}^+ = A_1^+ \cap A_2^+, \quad A_1^+ = A_{12}^+ \sqcup \tilde{A}_1^+, \quad A_2^+ = A_{12}^+ \sqcup \tilde{A}_2^+.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(E \cap A_1^+) &= \Phi(E \cap A_{12}^+) + \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+), \\ \Phi(E \cap A_2^+) &= \Phi(E \cap A_{12}^+) + \Phi(E \cap \tilde{A}_2^+). \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1^+ \subset A_2^- &\Rightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) \leq 0, \\ \tilde{A}_1^+ \subset A_1^+ &\Rightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) \geq 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) = 0$. Аналогично $\Phi(E \cap \tilde{A}_2^+) = 0$. Таким образом,

$$\Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+) = \Phi(E \cap A_{12}^+).$$

Аналогично

$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-),$$

что и требовалось.

Таким образом, заряд Φ однозначно определяет на σ -алгебре \mathcal{A} две неотрицательные функции множества

$$\begin{aligned}\Phi^+(E) &= \Phi(E \cap A^+), \\ \Phi^-(E) &= -\Phi(E \cap A^-),\end{aligned}$$

называемые соответственно *верхней и нижней вариациями заряда* Φ . При этом:

- 1) $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ (для каждого измеримого множества);
- 2) Φ^+ , Φ^- суть неотрицательные σ -аддитивные функции множества (см. задачу 6), т. е. меры. Поэтому функция $|\Phi| \equiv \Phi^+ + \Phi^-$ (*полная вариация заряда* Φ) тоже будет мерой.

Определение. Представление заряда Φ в виде разности его верхней и нижней вариаций $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ называется *разложением Жордана заряда* Φ .

Замечание. В этом определении существенно, что Φ^- и Φ^+ суть нижняя и верхняя вариации заряда Φ (определённые выше). Это гарантирует единственность разложения Жордана. Очевидно, что в общем случае представление заряда в виде разности двух мер не единственно (привести пример).

3. Типы зарядов

Пусть μ — некоторая σ -аддитивная мера, определённая на σ -алгебре \mathcal{A} подмножеств пространства X . Множества, входящие в \mathcal{A} , будем называть измеримыми. Пусть на той же σ -алгебре \mathcal{A} определён заряд Φ .

Определение. Говорят, что заряд Φ *сосредоточен* на множестве $A_0 \in \mathcal{A}$, если

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad A \subset X \setminus A_0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Множество A_0 в этом случае называется *носителем* заряда Φ .

Определение. Заряд Φ называется *дискретным*, он сосредоточен на конечном или счётном множестве. Это равносильно утверждению $\exists \{c_n\}$ ($n = \overline{1, N}$ или $n \in \mathbb{N}$) такое, что $\forall E \subset X$

$$\Phi(E) = \sum_{k: c_k \in E} \Phi(\{c_k\}).$$

Определение. Заряд Φ называется *непрерывным*, если $\Phi(E) = 0$ для любого одноточечного множества E .

Определение. Заряд Φ называется *абсолютно непрерывным относительно меры μ* , если

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Определение. Заряд Φ называется *сингулярным относительно меры μ* , если он сосредоточен на некотором множестве A с $\mu(A) = 0$.

Заметим, что интеграл Лебега (1) от фиксированной интегрируемой по Лебегу функции является абсолютно непрерывным (относительно меры Лебега μ , фигурирующей в этом интеграле) зарядом. Оказывается, этим примером все абсолютно непрерывные заряды исчерпываются.

4. Теорема Радона—Никодима

Теорема 2 (Радона—Никодима). Пусть μ — конечная σ -аддитивная мера, определённая на σ -алгебре \mathcal{A} подмножеств пространства X ; пусть Φ — конечный заряд, определённый на \mathcal{A} и абсолютно непрерывный относительно μ . Тогда существует такая интегрируемая (по Лебегу) по мере μ функция $f(x)$, определённая на X , что

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \Phi(A) = \int_A f(x) d\mu.$$

Эта функция (называемая *производной заряда Φ по мере μ*) определена с точностью до μ -эквивалентности.

Замечание. Очевидно, что от условия абсолютной непрерывности заряда Φ относительно меры μ нельзя отказаться. (Почему? Приведите контрпример и покажите, где это условие используется в доказательстве.)

Прежде чем перейти к доказательству, отметим, что простейшими примерами производной заряда по мере являются плотность (массы), плотность электрического заряда.

Доказательство. Поскольку каждый заряд есть разность двух неотрицательных зарядов и при этом абсолютно непрерывный заряд представляется в виде разности двух абсолютно непрерывных (см. задачу 7), то доказательство достаточно провести для неотрицательных зарядов, т. е. мер. Итак, пусть Φ — мера, абсолютно непрерывная относительно меры μ .

Лемма 3. Пусть мера Φ абсолютно непрерывна относительно меры μ и $\Phi \neq 0$. Тогда существуют такие натуральное n и $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и B положительно относительно заряда $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.

Доказательство леммы. Пусть $X = A_n^- \sqcup A_n^+$ — разложения Хана пространства X относительно зарядов $\Phi - \frac{1}{n}\mu$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть

$$A^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Phi(A^-) \leq \frac{1}{n}\mu(A^-)$, поэтому $\Phi(A^-) = 0$. Следовательно, $\Phi(A^+) > 0$ (почему?). Но тогда в силу абсолютной непрерывности меры Φ относительно меры μ имеем $\mu(A^+) > 0$. Поэтому существует такое m , что $\mu(A_m^+) > 0$: иначе $\mu(A^+) = 0$ в силу σ -аддитивности меры. Но A_m по условию положительно относительно заряда $\Phi - \frac{1}{m}\mu$. Поэтому множество $B = A_m$ и число $n = m$ и будут искомыми.

Лемма доказана.

Пусть теперь K — множество функций φ на X , удовлетворяющих условиям:

- 1) $\varphi \geq 0$,
- 2) φ измеримы и интегрируемы по μ на X ,
- 3) $\forall A \in \mathcal{A} \int_A \varphi(x) d\mu \leq \Phi(A)$.

Пусть

$$M = \sup_{\varphi \in K} \int_X \varphi(x) d\mu.$$

(M конечно в силу конечности меры Φ и определения множества K .) В силу определения точной верхней грани существует такая последовательность $\{f_n\} \subset K$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = M. \quad (4)$$

Положим при каждом $x \in X$

$$g_n(x) = \max(f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

(Докажите, что эти функции измеримы и интегрируемы на X , см. задачу 7.)

Покажем, что $g_n \in K$, т. е. что для всех $E \in \mathcal{A}$ верно

$$\int_E g_n(x) d\mu \leq \Phi(E).$$

Действительно, E можно представить в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств $E = \sqcup_{k=1}^n E_k$, где $g_n(x) = f_k(x)$ при всех $x \in E_k$, полагая, например, $E_k = \{x \in X \mid g_n(x) = f_k(x), k = \min\}^1$. Поэтому

$$\int_E g_n(x) d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_k(x) d\mu \leq \sum_{k=1}^n \Phi(E_k) = \Phi(E).$$

Заметим, что последовательность функций $g_n(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) она монотонно не убывает в каждой точке;
- 2) все g_n измеримы и интегрируемы по мере μ ;
- 3) $\forall E \in \mathcal{A} \int_E g_n(x) d\mu \leq \Phi(E)$ и, в частности,
- 3') $\int_X g_n(x) d\mu \leq \Phi(X)$.

¹Если не позаботиться о том, к какому именно из E_k отнести точки, где несколько функций $f_k(x)$ принимают равные значения, мы рискуем столкнуться с неизмеримыми множествами.

Тогда из 1), 2), 3') по теореме Беппо Леви следует существование почти всюду на X конечного предела

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

а также существование интеграла $\int_X f(x) d\mu$ и равенство

$$\int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu. \quad (5)$$

С другой стороны, из построения следует, что всюду на X верно неравенство $g_n(x) \geq f_n(x)$, откуда

$$\int_X g_n(x) d\mu \geq \int_X f_n(x) d\mu. \quad (6)$$

Но по только что доказанному п. 2) имеем $g_n \in K$, откуда по определению числа M следует, что

$$M \geq \int_X g_n(x) d\mu. \quad (7)$$

Тогда из (4)—(7), а также теоремы «о двух милиционерах» получаем:

$$\int_X f(x) d\mu = M.$$

Более того, применяя теорему Беппо Леви к любому множеству из \mathcal{A} , получаем из 1), 2), 3):

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \int_E f(x) d\mu \leq \Phi(E), \quad (8)$$

т. е. $f(x) \in K$.

Покажем теперь, что для любого $E \in \mathcal{A}$

$$\Phi(E) - \int_E f(x) d\mu = 0.$$

Заметим, что функция множества

$$\lambda(E) \equiv \Phi(E) - \int_E f(x) d\mu$$

неотрицательна в силу (8) и обладает всеми свойствами меры. Далее, она абсолютно непрерывна относительно меры μ . Если $\lambda \not\equiv 0$, то в силу леммы 3 существует такое число $n \in \mathbb{N}$ и такое множество $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и для любого $E \in \mathcal{A}$ верно неравенство

$$\frac{1}{n} \mu(E \cap B) \leq \lambda(E \cap B).$$

Обозначим для краткости $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и положим $h(x) = f(x) + \varepsilon \chi_B(x)$, где $\chi_B(x)$ — индикаторная функция множества B . Тогда при всех $E \in \mathcal{A}$ с учётом $f(x) \in K$ получим

$$\begin{aligned} \int_E h(x) d\mu &= \int_E f(x) d\mu + \varepsilon \mu(E \cap B) \leq \int_E f(x) d\mu + \lambda(E \cap B) = \\ &= \int_E f(x) d\mu + \Phi(E \cap B) - \int_{E \cap B} f(x) d\mu = \int_{E \setminus B} f(x) d\mu + \Phi(E \cap B) \leq \\ &\leq \Phi(E \setminus B) + \Phi(E \cap B) = \Phi(E). \end{aligned}$$

Это означает, что $h \in K$. Но, с другой стороны,

$$\int_X h(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu + \varepsilon\mu(B) > M,$$

что приводит нас к противоречию с определением M .

Следовательно, существование такой функции f , что $\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu$ при всех $A \in \mathcal{A}$, доказано.

Докажем единственность (с точностью до μ -эквивалентности). Пусть при всех $A \in \mathcal{A}$

$$\Phi(A) = \int_A f_1(x) d\mu = \int_A f_2(x) d\mu.$$

Тогда для всех

$$A_n \equiv \left\{ x \mid f_1(x) - f_2(x) > \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем в силу неравенства Чебышёва

$$\mu(A_n) \leq n \int_{A_n} (f_1(x) - f_2(x)) d\mu = n \int_{A_n} f_1(x) d\mu - n \int_{A_n} f_2(x) d\mu = n(\Phi(A_n) - \Phi(A_n)) = 0.$$

Аналогично, для $B_m = \left\{ x \mid f_2(x) - f_1(x) > \frac{1}{m} \right\}$ имеем $\mu(B_m) = 0$. Следовательно,

$$\mu\{x \in X \mid f_1(x) \neq f_2(x)\} \equiv \mu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_m\right)\right) = 0,$$

т. е. $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду.

Теорема доказана.

Задачи для самостоятельного решения

0. Ответить на вопросы по ходу текста.

1. Доказать, что из счётной аддитивности меры (заряда) следует конечная аддитивность.

Указание. Докажите сначала, что пустое множество имеет нулевую меру (заряд).

2. Доказать лемму 1 на с. 2.

3. Показать, что в доказательстве теоремы 1 множество A^- измеримо и $\Phi(A^-) = a$.

4. Показать, что в доказательстве теоремы 1 A^- — отрицательное множество. *Предостережение.* Требуется показать существенно более сильное утверждение, чем $\Phi(A^-) < 0$.

5. Показать, что верхняя и нижняя вариации заряда суть σ -аддитивные функции множества.

6. Показать, что если заряд Φ абсолютно непрерывен относительно меры μ , то то же можно сказать о его верхней и нижней вариациях.

7. Доказать, что функции $g_n(x)$, использованные в доказательстве теоремы Радона—Никодима, измеримы и интегрируемы на X .

8. 1) Определяет ли функция Кантора на отрезке $[0; 1]$ некоторую меру по формуле (1)?

2) Что можно сказать об этой мере по отношению к мере Лебега?

9. Обобщить теорему 2 на случай, когда μ является σ -конечной мерой.

10*. Пусть $g(x)$ — произвольная монотонно неубывающая функция, определённая на отрезке $[0; 1]$. Продолжим её константой $g(a)$ слева от a и константой $g(b)$ справа от b . Рассмотрим полукольцо (см. лекцию 2а предыдущего семестра) S всех промежутков, вложенных в отрезок $[0; 1]$, и определим на этом полукольце меру m следующим образом (при всех $a, b \in [0; 1]$, $b \geq a$):

$$m([a; b]) = g(b + 0) - g(a - 0);$$

$$m([a; b)) = g(b - 0) - g(a - 0);$$

$$m((a; b]) = g(b + 0) - g(a + 0);$$

$$m((a; b)) = g(b - 0) - g(a + 0).$$

1) Доказать, что m — действительно мера на S , т. е. неотрицательная σ -аддитивная функция промежутка. (Доказательство σ -аддитивности развивает идеи лекции 1 первого семестра).

Пользуясь продолжением меры с полукольца на σ -алгебру, можно получить меру μ_g , определённую на некоторой σ -алгебре. (Нам важен лишь этот факт; доказательство можно, но не обязательно для решения данной задачи, прочитать у Колмогорова, Фомина.)

2) Будет ли мера μ_g абсолютно непрерывной относительно классической меры Лебега?

3) Может ли при некоторой функции $g(x)$ мера μ_g быть сингулярной относительно классической меры Лебега (см. определение выше)?

4) Можно ли, сняв требование монотонности функции g , построить аналогичным образом заряд Φ_g ?