Лекция 3а. Теорема Радона–Никодима

А. А. Панин

Московский государственный университет
физический факультет
кафедра математики

VIII семестр

§ 1
Заряды

Меры и заряды

Пусть X — пространство, $\mathcal{A}_\mu$ — σ-алгебра его подмножеств.

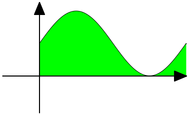
Мера
Функция μ:
1) $\mu : \mathcal{A}_\mu \to \mathbb{R}_+$
2) $\mu(\sqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Заряд
Функция Φ:
1) $\Phi : \mathcal{A}_\Phi \to \mathbb{R}$
2) $\Phi(\sqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$

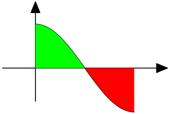
Мера — частный случай заряда

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, d\mu \qquad (1)$$

$f(x) \geqslant 0$ — получаем меру.



В общем случае — заряд.



Каждый ли заряд представим в виде (1)?

§ 2
Разложение Хана и разложение Жордана

Положительные и отрицательные множества

Заряд Φ, пространство X, σ-алгебра $\mathcal{A}$.
Положительное множество:

$$\forall F \in \mathcal{A} \quad \text{верно} \quad \Phi(E \cap F) \geqslant 0.$$

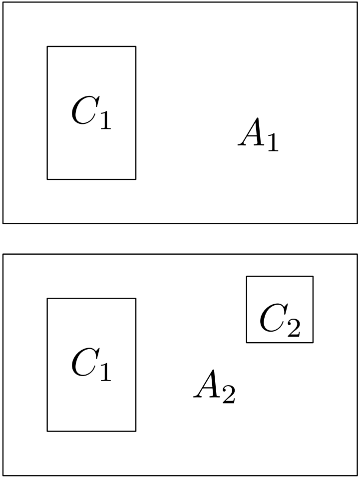
$$\Phi(A) > 0 \quad \not\Rightarrow \quad A \text{ положительно!}$$

Лемма 1.

$$A \text{ положительно } \Leftrightarrow \forall E \subset A \;\; E \in \mathcal{A} \Rightarrow \Phi(E) > 0.$$

Лемма 2.
Непустое множество отрицательного заряда содержит отрицательное подмножество строго отрицательного заряда.

Доказательство леммы 2



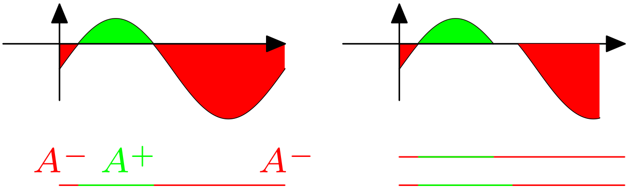
Процесс остановился: A_l — отрицательное множество.
Процесс не остановился: $A_\infty = \bigcap_{l=1}^{\infty} A_l$ — отрицательное множество.

Разложение Хана

Теорема 1. Φ — конечный заряд на X.
Тогда существует разбиение

$$X = A^+ \sqcup A^-$$

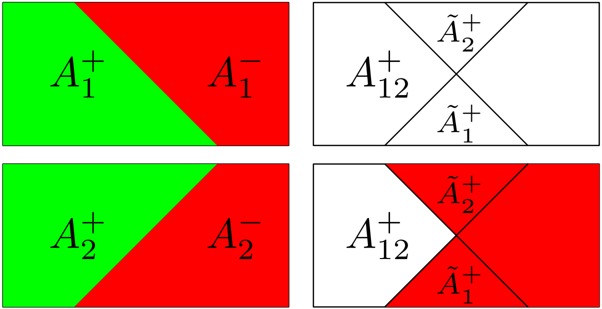
на положительное и отрицательное множества.



Очевидно, разложение не единственно. И всё-таки...

Разложение Хана: квазиединственность

Если
$$X = A_1^- \sqcup A_1^+, \quad X = A_2^- \sqcup A_2^+$$
— разложения Хана, то для любого измеримого E
$$\Phi(E \cap A_1^-) = \Phi(E \cap A_2^-), \quad \Phi(E \cap A_1^+) = \Phi(E \cap A_2^+).$$



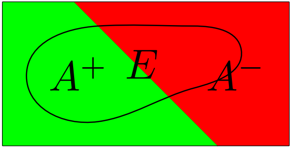
$$\begin{array}{l} \tilde{A}_1^+ \subset A_2^- \Rightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) \leqslant 0 \\ \tilde{A}_1^+ \subset A_1^+ \Rightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) \geqslant 0 \end{array} \Longrightarrow \Phi(E \cap \tilde{A}_1^+) = 0$$

Разложение Жордана

Итак, заряд Φ однозначно определяет на σ-алгебре $\mathcal{A}$ две меры

$$\Phi^+(E) = \Phi(E \cap A^+),$$
$$\Phi^-(E) = -\Phi(E \cap A^-),$$

— *верхнюю и нижнюю вариации заряда* Φ.



$$\Phi(E) = \Phi^+(E) - \Phi^-(E) \quad \text{— разложение Жордана заряда } \Phi$$

Φ^+, Φ^-, $|\Phi| \equiv \Phi^+ + \Phi^-$ (*полная вариация заряда* Φ) — меры.
Замечание. Для единственности разложения Жордана существенно, что Φ^- и Φ^+ суть нижняя и верхняя вариации заряда Φ.

§ 3
Типы зарядов

Типы зарядов

X, $\mathcal{A}$, μ, Φ.

1. Говорят, что заряд Φ *сосредоточен* на множестве $A_0 \in \mathcal{A}$, если

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; A \subset X \setminus A_0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

Множество A_0 — *носитель* заряда Φ.

2. Заряд Φ называется *дискретным*, он сосредоточен на конечном или счётном множестве.

3. Заряд Φ называется *непрерывным*, если $\Phi(E) = 0$ для любого одноточечного множества E.

4. Заряд Φ называется *абсолютно непрерывным относительно меры* μ, если

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mu(A) = 0 \Rightarrow \Phi(A) = 0.$$

5. Заряд Φ называется *сингулярным относительно меры* μ, если он сосредоточен на некотором множестве A с $\mu(A) = 0$.

Интеграл Лебега (1) является абсолютно непрерывным зарядом.

Этим примером все абсолютно непрерывные заряды исчерпываются.

§ 4
Теорема Радона—Никодима

Теорема Радона–Никодима

X, $\mathcal{A}$, μ, Φ.

Теорема 2 (Радона—Никодима). Пусть μ — конечная σ-аддитивная мера, определённая на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X; пусть Φ — заряд, определённый на $\mathcal{A}$ и абсолютно непрерывный относительно μ. Тогда существует такая интегрируемая по мере μ функция $f(x)$, определённая на X, что

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \Phi(A) = \int_A f(x)\,d\mu.$$

Эта функция определена с точностью до μ-эквивалентности.

Разложение Жордана $\Longrightarrow$ можно ограничиться доказательством для **мер**!

Лемма 3. Пусть мера Φ абсолютно непрерывна относительно меры μ и $\Phi \not\equiv 0$. Тогда существуют такие натуральное n и $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(B) > 0$ и B положительно относительно заряда $\Phi - \frac{1}{n}\mu$.

Доказательство леммы. Пусть $X = A_n^- \sqcup A_n^+$ — разложения Хана пространства X относительно зарядов $\Phi - \frac{1}{n}\mu$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть

$$A^- = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^-, \quad A^+ = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^+.$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\Phi(A^-) \leqslant \frac{1}{n}\mu(A^-)$, поэтому $\Phi(A^-) = 0$. Следовательно, $\Phi(A^+) > 0$ (почему?). Но тогда в силу абсолютной непрерывности меры Φ относительно меры μ имеем $\mu(A^+) > 0$. Поэтому существует такое m, что $\mu(A_m^+) > 0$: иначе $\mu(A^+) = 0$ в силу σ-аддитивности меры. Тогда множество $B = A_m$ и число $n = m$ и будут искомыми.
Лемма доказана.

Функции f_n и g_n

Пусть

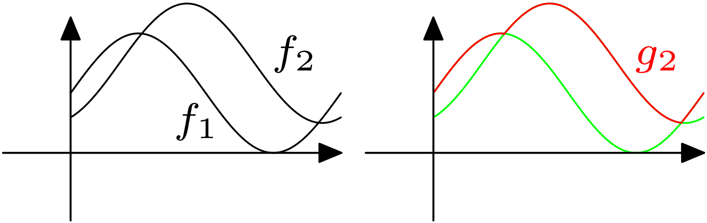
$$M = \sup_{\varphi \in K} \int_X \varphi(x)\, d\mu.$$

Существует такая последовательность $\{f_n\} \subset K$, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = M. \qquad (2)$$

Положим при каждом $x \in X$

$$g_n(x) = \max(f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$



(Остальная часть доказательства — на доске.)