

**Вопросы к коллоквиуму по математическому анализу
«Предел последовательности и предел функции»**

1. Определения.

- 1.1. Определение бесконечно малой последовательности.
- 1.2. Определение сходящейся последовательности.
- 1.3. Определение монотонной последовательности.
- 1.4. Определение предельной точки последовательности.
- 1.5. Определение подпоследовательности.
- 1.6. Определение верхнего и нижнего пределов последовательности.
- 1.7. Определение фундаментальной последовательности.
- 1.8. Определение предела функции.
- 1.9. Определение монотонной функции.
- 1.10. Определение непрерывности функции.
- 1.11. Определение сложной функции.
- 1.12. Определение предела функции по Коши и по Гейне.

2. Теоремы.

- 2.1. Теорема о пределе суммы двух бесконечно малых последовательностей.
- 2.2. Теорема о пределе разности двух бесконечно малых последовательностей.
- 2.3. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
- 2.4. Теорема о пределе суммы сходящихся последовательностей.
- 2.5. Теорема о пределе разности сходящихся последовательностей.
- 2.6. Теорема о пределе произведения сходящихся последовательностей.
- 2.7. Теорема о пределе частного сходящихся последовательностей.
- 2.8. Теорема о предельном переходе в неравенствах.
- 2.9. Теорема о пределе монотонной последовательности.
- 2.10. Определение монотонной последовательности. Теорема о существовании предела у монотонной последовательности.
- 2.11. Теорема о существовании предельной точки у ограниченной последовательности.
- 2.12. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
- 2.13. Теорема о связи существования предела последовательности с равенством верхнего и нижнего пределов этой последовательности.
- 2.14. Критерий Коши для последовательностей.
- 2.15. Теорема о пределе суммы двух функций.
- 2.16. Теорема о пределе разности двух функций.
- 2.17. Теорема о пределе произведения двух функций.
- 2.18. Теорема о пределе отношения двух функций.
- 2.19. Теорема о непрерывности суммы двух функций.
- 2.20. Теорема о непрерывности разности двух функций.
- 2.21. Теорема о непрерывности произведения двух функций.
- 2.22. Теорема о непрерывности отношения двух функций.
- 2.23. Формулировка теоремы об обратной функции. Примеры.
- 2.24. Первый замечательный предел.
- 2.25. Теорема о непрерывности сложной функции.
- 2.26. Теорема о существовании предела по Гейне как следствие существования предела по Коши.
- 2.27. Критерий Коши существования предела функции.

3. Примеры теоретических вопросов:

3.1. Дайте определение бесконечно большой функции по Коши:

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow a + 0.$$

3.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , $g(x)$ – разрывна в точке x_0 . Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x)g(x)$ в точке x_0 ? Ответ обоснуйте.

3.3. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

4. Примеры задач.

4.1. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$

4.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a-1) + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$.

5. Пример билета.

Билет 1.

1. Дайте определение бесконечно малой последовательности. Докажите теорему о пределе суммы двух бесконечно малых последовательностей.

2. Дайте определение бесконечно большой функции по Коши: $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a + 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$