ЛЕКЦИИ 8—9

Теорема Хилле—Иосиды

§ 3. Определение и элементарные свойства максимальных монотонных операторов

Всюду на протяжении этих двух лекций символом H обозначено гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и нормой $\|.\|$.

Определение 1. Линейный оператор $A : H \to H$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$ называется *монотонным*, если

$$\forall v \in \mathcal{D}(A) \ \ (Av, v) \geqslant 0.$$

Он называется *максимальным монотонным*, если, к тому же, $R(E + A) = H$, иными словами,

$$\forall f \in H \ \ \exists u \in \mathcal{D}(A) : u + Au = f. \tag{1}$$

Лемма 1. Пусть A — монотонный оператор, $\lambda > 0$, $v \in \mathcal{D}(A)$ и

$$v + \lambda Av = f. \tag{2}$$

Тогда $\|v\| \leqslant \|f\|$.

Доказательство.

Домножим (2) скалярно на v:

$$(v, v) + \lambda(Av, v) = (f, v).$$

Поскольку $(Av, v) \geqslant 0$, имеем

$$\|v\|^2 = (f, v) - \lambda(Av, v) \leqslant (f, v) \leqslant \{\text{неравенство Коши—Буняковского}\} \leqslant \|f\| \cdot \|v\|,$$

откуда либо $\|v\| = 0$ (что нас устраивает, т. к. $\|f\| \geqslant 0$), либо (сокращаем на $\|v\|$) $\|v\| \leqslant \|f\|$.

▲

Следствие. При любом $\lambda > 0$ оператор $E + \lambda A$ инъективен.

В самом деле, положив $f = \theta$, убеждаемся, что ядро оператора $E + \lambda A$ тривиально.

Лемма 2. Пусть A — максимальный монотонный оператор. Тогда:

1) $\mathcal{D}(A)$ плотно в H;

2) для любого $\lambda > 0$ оператор $E + \lambda A$ биективен при отображении из $\mathcal{D}(A)$ на H, причём оператор $(E + \lambda A)^{-1}$ ограничен и $\|(E + \lambda A)^{-1}\| \leqslant 1$;

3) A — замкнутый линейный оператор.

Доказательство.

1) В силу утверждения задачи 1 достаточно для любого $f \in H$ показать, что если $f \perp \mathcal{D}(A)$, то $f = \theta$. Итак, фиксируем $f \in H$. Поскольку оператор A — максимальный монотонный, то существует элемент $v_0 \in \mathcal{D}(A)$ такой, что

$$(E + A)v_0 = f.$$

Имеем тогда

$$0 = (f, v_0) = (v_0, v_0) + (Av_0, v_0).$$

Но в сумме $(v_0, v_0) + (Av_0, v_0)$ оба слагаемых неотрицательны. Следовательно, они оба равны нулю. В частности, $(v_0, v_0) = 0$, откуда вытекает, что $v_0 = \theta$ и $f = (E + A)v_0 = \theta$.

2) Рассмотрим сначала случай $\lambda = 1$. Оператор $E + \lambda A$ отображает $\mathcal{D}(A)$ в H инъективно в силу следствия из леммы 1 и сюръективно в силу (1). Значит, на H определён оператор $(E + A)^{-1}$, причём из леммы 1 непосредственно следует, что $\|(E + A)^{-1}\| \leqslant 1$.

Докажем теперь, что если

$$R(E + \lambda_0 A) = H \quad \text{для некоторого } \lambda_0 > 0, \tag{3}$$

то $R(E + \lambda A) = H$ для любого $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$.

Лемма 1 и следствие из неё гарантируют, что при выполнении условия (3) уравнение

$$u + \lambda_0 Au = f$$

имеет *единственное* решение для любого $f \in H$ и что обратный оператор $(E + \lambda_0 A)^{-1}$ (определённый на H в силу (3)) ограничен и $\|(E + \lambda_0 A)^{-1}\| \leqslant 1$. Теперь рассмотрим уравнение

$$u + \lambda Au = f, \quad \lambda > 0. \tag{4}$$

Проведём эквивалентные преобразования:

$$\begin{gathered} u + \lambda Au = f \\ \Updownarrow \\ \tfrac{\lambda_0}{\lambda} u + \lambda_0 Au = \tfrac{\lambda_0}{\lambda} f \\ \Updownarrow \\ u + \lambda_0 Au = \tfrac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \tfrac{\lambda_0}{\lambda}\right) u. \end{gathered}$$

Поскольку оператор $E + \lambda_0 A$ обратим, последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$u = (E + \lambda_0 A)^{-1} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u \right). \tag{5}$$

Если $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$ (т. е. $\lambda > \lambda_0/2$), то, учитывая, что $\|(E + \lambda_0 A)^{-1}\| \leqslant 1$, можно применить принцип сжимающих отображений и доказать однозначную разрешимость уравнения (5), а с ним и (4), при любом $f \in H$.

Теперь утверждение пункта 2) можно получить индуктивно, отправляясь от ранее доказанного утверждения для $\lambda = 1$ и получая его сначала для всех $\lambda > \frac{1}{2}$ и, тем самым, для всех $\lambda \geqslant \frac{2}{3}$, затем для всех $\lambda \geqslant \frac{4}{9}$ и т. д., учитывая, что при всех $\lambda > 0$ в силу леммы 1 верна оценка $\|(E + \lambda A)^{-1}\| \leqslant 1$.

3) Как доказано в пункте 2, $(E+A)^{-1}$ — ограниченный линейный оператор с областью определения, совпадающей со всем пространством H. Следовательно (см. следствие из леммы 4 лекции 7), оператор $E+A = \big((E+A)^{-1}\big)^{-1}$ замкнут. Но тогда замкнут и оператор $A = (E+A) - E$ (см. лемму 2 лекции 7).

▲

Замечание 1. Если A — максимальный монотонный оператор, при любом $\lambda > 0$ оператор λA обладает тем же свойством. (Его максимальность следует из п. 2 леммы 2.) Но для суммы максимальных монотонных операторов это уже, вообще говоря, неверно.

Введём теперь операторы, которые позволят в некотором смысле аппроксимировать неограниченный оператор ограниченными.

Определение 2. Пусть A — максимальный монотонный оператор. Для всех $\lambda > 0$ положим

$$J_\lambda = (E+\lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(E - J_\lambda). \tag{6}$$

Оператор J_λ называется *резольвентой* оператора A, A_λ — *регуляризацией по Иосиде* оператора A.

Замечание 2. Нам более привычно называть резольвентой оператор $(\lambda E - A)^{-1}$, но примиримся с этим несоответствием терминологии, потому что нам нужен будет именно оператор $(E+\lambda A)^{-1}$.

Лемма 3. Пусть A — максимальный монотонный оператор. Тогда (обозначения см. в (6))

(a_1) $\quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0 \quad A_\lambda v = A(J_\lambda v)$,

(a_2) $\quad \forall v \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0 \quad A_\lambda v = J_\lambda(Av)$,

(b) $\quad \forall v \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0 \quad \|A_\lambda v\| \leqslant \|Av\|$,

(c) $\quad \forall v \in H \quad \lim_{\lambda\to+0} J_\lambda v = v$,

(d) $\quad \forall v \in \mathcal{D}(A) \quad \lim_{\lambda\to+0} A_\lambda v = Av$,

(e) $\quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0 \quad (A_\lambda v, v) \geqslant 0$,

(f) $\quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0 \quad \|A_\lambda v\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|v\|$.

Доказательство.

(a_1) Имеем

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{\lambda}(E - J_\lambda)v = A(J_\lambda v) \\
\Uparrow \\
(E - J_\lambda)v = \lambda A(J_\lambda v) \\
\Uparrow \\
v - J_\lambda v = \lambda A(J_\lambda v) \\
\Uparrow \\
v = J_\lambda v + \lambda A(J_\lambda v) \\
\Uparrow \\
v = (E+\lambda A)(J_\lambda v)
\end{gathered}$$

$$\Uparrow$$

$$\{J_\lambda = (E+\lambda A)^{-1}\}$$

$$\Uparrow$$

$$v = (E+\lambda A)\big((E+\lambda A)^{-1}v\big) \quad \forall v \in H.$$

Нижняя строчка следует из определения обратного оператора с учётом того факта, что $R(E+\lambda A) = H$ (см. п. 2) леммы 2).

(a_2) Имеем

$$\tfrac{1}{\lambda}(E - J_\lambda)v = J_\lambda(Av)$$

$$\Uparrow$$

$$(E - J_\lambda)v = \lambda J_\lambda(Av)$$

$$\Uparrow$$

$$v - J_\lambda v = \lambda J_\lambda(Av)$$

$$\Uparrow$$

$$v = J_\lambda v + \lambda J_\lambda(Av)$$

$$\Uparrow$$

$$v = J_\lambda\big((E+\lambda A)v\big)$$

$$\Uparrow$$

$$\{J_\lambda = (E+\lambda A)^{-1}\}$$

$$\Uparrow$$

$$v = (E+\lambda A)^{-1}\big((E+\lambda A)v\big) \quad \forall v \in \mathcal{D}(A).$$

Поскольку при $\lambda > 0$ верно $\mathcal{D}((E+\lambda A)) = \mathcal{D}(A)$, последнее есть в точности п. 2) определения обратного оператора.

(b) Следует из п. (a_2) с учётом $\|J_\lambda\| \leqslant 1$. (Можно ли вывести из ($a_1$)?)

(c) Предположим сначала, что $v \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$\|v - J_\lambda v\| = \{\text{определение } A_\lambda\} = \|\lambda A_\lambda v\| = \lambda\|A_\lambda v\| \leqslant \{(\text{b})\} \leqslant \lambda\|Av\|,$$

следовательно, $\lim_{\lambda\to+0} J_\lambda v = v$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть фиксирован произвольный элемент $v \in H$. Требуется доказать:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\lambda_0(\varepsilon) > 0 \ \ \forall\lambda \in (0,\lambda_0) \ \ \|J_\lambda v - v\| < \varepsilon. \tag{7}$$

Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$. Чтобы построить $\lambda_0(\varepsilon)$, удовлетворяющее условию (7), прежде всего найдём и зафиксируем $v_1 \in \mathcal{D}(A)$ такое, что $\|v - v_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$. (Такое v_1 существует, поскольку, согласно п. 1) леммы 2, $\mathcal{D}(A)$ плотно в H.) Имеем тогда

$$\|J_\lambda v - v\| \leqslant \|J_\lambda v - J_\lambda v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| + \|v_1 - v\| \leqslant \{\|J_\lambda\| \leqslant 1\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|v_1 - v\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| < \frac{2}{3}\varepsilon + \|J_\lambda v_1 - v_1\|. \tag{8}$$

Поскольку $J_\lambda \to v_1$ при $\lambda \to +0$ по ранее доказанному, существует такое $\lambda_0(\varepsilon)$, что для любого $\lambda \in (0, \lambda_0)$ верно $\|J_\lambda v_1 - v_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда при всех таких λ из (8) получаем

$$\|J_\lambda v - v\| < \varepsilon,$$

что и требовалось. Таким образом, необходимое $\lambda_0(\varepsilon)$ в (7) построено.

(d) Это непосредственно следует из (c) и (a_2):

$$A_\lambda v = J_\lambda(Av) \to Av, \quad \lambda \to +0.$$

(e, f) Имеем

$$(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) = \{\text{определение } A_\lambda, \text{ (a}_1\text{) и ограниченность } A_\lambda\} = \\ = \lambda\|A_\lambda v\|^2 + (A(J_\lambda v), J_\lambda v) \geqslant \{\text{монотонность } A\} \geqslant \lambda\|A_\lambda v\|^2.$$

Итак, мы получили оценку $(A_\lambda v, v) \geqslant \lambda\|A_\lambda v\|^2$. Во-первых, из неё следует, что $(A_\lambda v, v) \geqslant 0$. Во-вторых, можно воспользоваться неравенством Коши—Буняковского и получить

$$\|A_\lambda v\| \cdot \|v\| \geqslant (A_\lambda v, v) \geqslant \lambda\|A_\lambda v\|^2,$$

или, после деления на $\lambda\|A_\lambda v\|$,

$$\|A_\lambda v\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|v\|.$$

▲

Замечание 3. Это утверждение показывает, что семейство $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$ *ограниченных* операторов приближает (в сильном смысле, см. п. (d)) *неограниченный* оператор A. Конечно, вообще говоря,
1) $\|A_\lambda\|$ неограниченно возрастает при $\lambda \to +0$,
2) приближение $A_\lambda v \to Av$ не является равномерным по v в единичном шаре.

§ 4. Решение эволюционной задачи. Существование и единственность

Напомним простейшую теорему Коши—Пикара из главы I (лекция 2).

Теорема 1. Пусть B — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Пусть функция $\Phi : B \to B$ определена на всём пространстве B и липшиц-непрерывна. Тогда задача Коши (при любых $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in B$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x = \Phi(x), \quad t \geqslant t_0; \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{9}$$

глобально и однозначно разрешима.

Как известно, она широко применяется в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, но её применение для уравнений в частных производных ограничено особыми случаями. (Некоторые характерные примеры были рассмотрены в главе I.) Следующая теорема является очень мощным инструментом в теории эволюционных уравнений в частных производных.

Но прежде чем её сформулировать, нам понадобится ещё раз обсудить норму на пространстве $X \times Y$, введённую в прошлой лекции:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}. \tag{10}$$

График $G(T)$ замкнутого оператора T является замкнутым линейным многообразием в банаховом пространстве $X \times Y$ (по определению замкнутого оператора), а следовательно, банаховым пространством. Однако норму (10) можно использовать и по-другому, если положить

$$\|x\|_T = \|(x, Tx)\| \tag{11}$$

для всех $x \in \mathcal{D}(T)$. Нетрудно видеть, что функция (11) действительно является нормой на линейном пространстве $\mathcal{D}(T)$ и, более того, делает последнее банаховым пространством (в случае *замкнутого* оператора T). Действительно, $\mathcal{D}(T)$ и $G(T)$ изоморфны как линейные пространства (см. задачу 2), поэтому на них можно ввести одну и ту же норму и если одно из этих пространств будет полно по введённой норме, то и другое тоже. (В частном случае $B = \mathbb{R}$ это выглядело бы так: например, для $Tx = 5x$ получаем $\|x\|_T = \|(x, 5x)\| = \sqrt{26}|x|$.) Условимся далее под $\mathcal{D}(A)$ понимать не просто линейное многообразие в H, но банахово (поскольку оператор A является максимальным монотонным, а следовательно, замкнутым) пространство относительно нормы $\|x\|_A$.

Теорема 2. (Хилле, Иосида.) Пусть A — максимальный монотонный оператор. Тогда для любого $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ существует единственная функция класса

$$u \in C^1([0, +\infty); H),$$

удовлетворяющая абстрактной *линейной* задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{12}$$

Эта функция u обладает также следующими свойствами:

$$u \in C([0, +\infty); \mathcal{D}(A))$$

и

$$\forall t \geqslant 0 \ \ \|u(t)\| \leqslant \|u_0\|, \quad \|u'(t)\| = \|Au(t)\| \leqslant \|Au_0\|.$$

Замечание 4. Основная ценность этой теоремы в том, что она позволяет (в предположении монотонности оператора A, которую легко проверить на практике) свести исследование эволюционной задачи (12) к исследованию «стационарного уравнения»

$$u + Au = f: \tag{13}$$

если уравнение (13) имеет решение $u \in H$ при любых $f \in H$ (где в роли H может выступать, например, L^2), то оператор A является максимальным монотонным и к нему применима рассматриваемая теория.

Доказательство. Доказательство проведём в 6 шагов.

Шаг 1. Единственность. В силу линейности задачи (12) достаточно доказать единственность в случае $u_0 = \theta$. Пользуясь гладкостью функции $u(t)$, имеем тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\|u(t)\|^2}{2} = \{\text{задача 3 из лекции 5}\} = (u'(t), u(t)) = -(Au(t), u(t)) \leqslant 0.$$

Но $\|u(0)\| = 0$. Значит, $\|u(t)\| \equiv 0$ и $u(t) \equiv \theta$ на всём промежутке существования решения.

Шаг 2. Ключевая идея доказательства разрешимости задачи (12) — замена её семейством задач с ограниченными операторами A_λ и последующий предельный переход при $\lambda \to 0$. Итак, рассмотрим семейство задач

$$\begin{cases} \dfrac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = \theta, \quad t \in [0, +\infty), \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{14}$$

Поскольку ограниченный линейный оператор является глобально (на всём H) липшиц-непрерывным, разрешимость задач (14) при всех $\lambda > 0$ следует из теоремы 1.

Покажем теперь, что при всех $t \geqslant 0$, $\lambda > 0$ верны оценки

$$\|u_\lambda(t)\| \leqslant \|u_0\|, \tag{15}$$

$$\left\|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right\| = \|A_\lambda u_\lambda(t)\| \leqslant \|A_\lambda u_0\| \leqslant \|Au_0\|. \tag{16}$$

Эти оценки вытекают из того факта, что $\|A_\lambda u_0\| \leqslant \|Au_0\|$ (см. лемму 3, п. (b)), и из следующей леммы.

Лемма 4. Пусть $w \in C^1([0, +\infty); H)$ — (непрерывно дифференцируемое) решение уравнения

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = \theta, \quad t \in [0, +\infty). \tag{17}$$

Тогда функции $t \mapsto \|w(t)\|$ и $t \mapsto \left\|\frac{dw}{dt}\right\| = \|A_\lambda w(t)\|$ являются невозрастающими на $[0, +\infty)$.

Доказательство. Действуем аналогично доказательству единственности на шаге 1. Домножив скалярно на w уравнение (17), получим:

$$\left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (A_\lambda w, w) = 0. \tag{18}$$

Поскольку оператор A_λ является монотонным (см. лемму 3, п. (e)), из (18) имеем оценку

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2 \leqslant 0,$$

откуда и следует первое утверждение леммы. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что функция $\frac{dw}{dt}$ тоже удовлетворяет уравнению (17). В самом деле, решение задачи (17) непрерывно дифференцируемо по t. Но тогда (см. лекцию 1 и задачи к ней) функция $t \mapsto A_\lambda w(t)$ обладает тем же свойством и

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda w(t)) = A_\lambda \frac{dw}{dt}(t). \tag{19}$$

С другой стороны, в силу уравнения (17) имеем $\frac{dw}{dt} = -A_\lambda w$, следовательно, $\frac{dw}{dt} \in C^1([0, +\infty); H)$ и $w \in C^2([0, +\infty); H)$. (Продолжая такие рассуждения дальше, получим, что на самом деле $w \in C^\infty([0, +\infty); H)$.) Тогда уравнение (17) можно продифференцировать и с учётом (19) получить:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda \left(\frac{dw}{dt}\right) = \theta.$$

Осталось лишь сослаться на первое утверждение леммы с учётом равенства $\frac{dw}{dt}(t) = -A_\lambda w(t)$. ▲

Шаг 3. Докажем, что функции $u_\lambda(t)$ сходятся к некоторой функции (назовём её $u(t)$) при $\lambda \to +0$ локально равномерно по $t \geqslant 0$. При всех $\lambda, \mu > 0$ и $t \geqslant 0$ имеем

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = \theta$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 + (A_\lambda u_\lambda(t) - A_\mu u_\mu(t), u_\lambda(t) - u_\mu(t)) = 0. \tag{20}$$

Опуская для краткости аргумент t, можем записать (с учётом определения A_λ и п. (a_1) леммы 3):

$$\begin{gathered}(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) = \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \geqslant (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu).\end{gathered} \tag{21}$$

Из (20) и (21) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 &\leqslant -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) = \\ &= -\lambda\|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \mu\|A_\mu u_\mu\|^2 + \mu(A_\lambda u_\lambda, A_\mu u_\mu) + \lambda(A_\mu u_\mu, A_\lambda u_\lambda) \leqslant \\ &\leqslant -\lambda\|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \mu\|A_\mu u_\mu\|^2 + \mu\|A_\lambda u_\lambda\| \cdot \|A_\mu u_\mu\| + \lambda\|A_\mu u_\mu\| \cdot \|A_\lambda u_\lambda\| \leqslant \\ &\leqslant \left\{ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}\right\} \leqslant -\lambda\|A_\lambda u_\lambda\|^2 - \mu\|A_\mu u_\mu\|^2 + \frac{\mu + \lambda}{2}\left(\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\mu + \lambda}{2}\left(\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2\right).\end{aligned}$$

Итак, мы получили оценку

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leqslant (\mu + \lambda)\left(\|A_\lambda u_\lambda\|^2 + \|A_\mu u_\mu\|^2\right),$$

из которой в силу ранее доказанных неравенств $\|A_\lambda u_\lambda\| \leqslant \|Au_0\|$ (см. шаг 2, формула 16) следует, что

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda - u_\mu\|^2 \leqslant 2(\mu+\lambda)\|Au_0\|^2. \tag{22}$$

Учитывая, что $u_\lambda(0) = u_\mu(0) = u_0$, из (22) получаем

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\|^2 \leqslant 2(\mu+\lambda)\|Au_0\|^2 t,$$

или

$$\|u_\lambda(t) - u_\mu(t)\| \leqslant \sqrt{2(\mu+\lambda)t}\|Au_0\|. \tag{23}$$

Из последней оценки очевидным образом вытекает, что при каждом фиксированном $t \geqslant 0$ функция $u_\lambda(t)$ как функция аргумента λ удовлетворяет при $\lambda \to +0$ условию Коши. Следовательно, при каждом $t \geqslant 0$ существует предел

$$\lim_{\lambda \to +0} u_\lambda(t) =: u(t). \tag{24}$$

Поэтому можно перейти в (23) к пределу при $\mu \to +0$ и получить оценку

$$\|u_\lambda(t) - u(t)\| \leqslant \sqrt{2\lambda t}\|Au_0\|,$$

из которой следует, что сходимость (24) является равномерной на каждом конечном промежутке $[0, T]$. Но тогда (см. задачу 5) функция $u(t)$ непрерывна: $u \in C([0, +\infty); H)$.

Шаг 4. Предположим пока, что $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ (это ограничение будет снято на последнем шаге). Докажем, что в этом случае функции $\frac{du_\lambda}{dt}$ сходятся при $\lambda \to +0$ к некоторому пределу, причём равномерно на каждом ограниченном промежутке изменения t. Положим $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, тогда (как показано на шаге 2) $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = \theta$. Подобно шагу 3 можем получить (см. задачу 4)

$$\frac{d}{dt}\|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leqslant (\mu+\lambda)\left(\|A_\lambda v_\lambda\|^2 + \|A_\mu v_\mu\|^2\right). \tag{25}$$

Аналогично шагу 3 имеем

$$\|A_\lambda v_\lambda(t)\| \leqslant \|A_\lambda v_\lambda(0)\| = \|A_\lambda A_\lambda u_0\|, \tag{26}$$

$$\|A_\mu v_\mu(t)\| \leqslant \|A_\mu v_\mu(0)\| = \|A_\mu A_\mu u_0\|. \tag{27}$$

Поскольку $u_0, Au_0 \in \mathcal{D}(A)$, имеем

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

откуда с учётом $\|J_\lambda\| \leqslant 1$ следует

$$\|A_\lambda A_\lambda u_0\| \leqslant \|A^2 u_0\|, \quad \|A_\mu A_\mu u_0\| \leqslant \|A^2 u_0\|. \tag{28}$$

Тогда из (25)—(28) имеем

$$\frac{d}{dt}\|v_\lambda - v_\mu\|^2 \leqslant 2(\lambda+\mu)\|A^2 u_0\|^2,$$

откуда
$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \leqslant \|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\|^2 + 4t(\lambda+\mu)\|A^2 u_0\|^2. \tag{29}$$
Поскольку $v_\lambda(0) = -A_\lambda u_0 \to -Au_0$ при $\lambda \to +0$ (см. п. (d) леммы 3), имеем
$$\|v_\lambda(0) - v_\mu(0)\| \to 0 \quad \text{при } \lambda, \mu \to +0,$$
а следовательно, при $\lambda, \mu \to +0$
$$\|v_\lambda(t) - v_\mu(t)\|^2 \to 0,$$
причём оценка равномерна на любом ограниченном промежутке изменения t. Итак, $\frac{du_\lambda}{dt} \to v(t)$, причём равномерно по t на любом ограниченном подмножестве полуоси $t \geqslant 0$.

Итак, на шагах 3 и 4 мы показали, что в предположении $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ для решений семейства задач (14) верно:
$$u_\lambda(t) \to u(t) \quad \text{при } \lambda \to +0, \tag{30}$$
$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) \to v(t) \quad \text{при } \lambda \to +0, \tag{31}$$
причём сходимость равномерна по t на каждом ограниченном промежутке $[0,T]$. Значит (см. задачу 6), $u \in C^1([0,+\infty);H)$ и $\frac{du}{dt} = v$.

Шаг 5. Докажем, что при $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ функция $u(t)$ является решением исходной задачи (12). Для этого перепишем, пользуясь леммой 3 (п. (a_1)) уравнение (14) в виде
$$\frac{du_\lambda}{dt} + A(J_\lambda u_\lambda) = \theta. \tag{32}$$
Заметим, что $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ при $\lambda \to +0$. В самом деле, имеем
$$\|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)\| \leqslant \|J_\lambda u_\lambda - J_\lambda u\| + \|J_\lambda u - u\| \leqslant \|u_\lambda - u\| + \|J_\lambda u - u\| \to 0,$$
где мы воспользовались оценкой $\|J_\lambda\| \leqslant 1$ и п. (c) леммы 3. В конце шага 4 мы установили, что $\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$. Но тогда в силу (32) имеем $A(J_\lambda u_\lambda) = -\frac{du_\lambda}{dt} \to -\frac{du}{dt}$. Поскольку оператор A замкнут и $J_\lambda u_\lambda \to u$, отсюда следует, что при любом $t \geqslant 0$ верно: $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $-\frac{du}{dt} = Au$. Наконец, поскольку $u \in C^1([0,+\infty);H)$, отсюда вытекает, что $t \mapsto Au(t) \in C([0,+\infty);H)$, а следовательно, $u \in C([0,+\infty);\mathcal{D}(A))$. Наконец, оценки
$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|, \quad \left\|\frac{du}{dt}\right\| = \|Au\| \leqslant \|Au_0\|$$
вытекают из (15)—(16) с помощью предельного перехода (30)—(31).

Шаг 6. Осталось доказать теорему для случая $u_0 \in \mathcal{D}(A) \setminus \mathcal{D}(A^2)$. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 5. Пусть $u_0 \in \mathcal{D}(A)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ такое, что
$$\|u_0 - \bar{u}_0\| < \varepsilon, \quad \|Au_0 - A\bar{u}_0\| < \varepsilon. \tag{33}$$

Иными словами, $\mathcal{D}(A^2)$ плотно в $\mathcal{D}(A)$ не только по исходной норме пространства H, но и по норме графика!

Доказательство. Положим $\bar{u}_0 = J_\sigma u_0$, где $\sigma > 0$ будет выбрано ниже. Имеем

$$\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A), \quad u_0 \in \mathcal{D}(A), \quad \bar{u}_0 + \sigma A\bar{u}_0 = u_0.$$

Значит, $A\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A)$ и, следовательно, $\bar{u}_0 \in \mathcal{D}(A^2)$. С другой стороны, в силу леммы 3 имеем

$$J_\sigma u_0 \to u_0, \quad \text{при} \quad \sigma \to +0,$$

т. е. $\|\bar{u}_0 - u_0\| < \varepsilon$ для всех достаточно малых $\sigma > 0$, и

$$A_\sigma u_0 \to Au_0, \ \ \sigma \to +0, \quad \text{или} \quad AJ_\sigma u_0 \to Au_0,$$

т. е. $\|A\bar{u}_0 - Au_0\| < \varepsilon$ для всех достаточно малых $\sigma > 0$. Значит, можно выбрать такое $\sigma > 0$, что выполнены одновременно оба условия (33). ▲

Вернёмся к доказательству теоремы. Если $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, то в силу леммы 5 можно построить последовательность $\{u_{0n}\}$ такую, что $u_{0n} \in \mathcal{D}(A^2)$, а также $u_{0n} \to u_0$ и $Au_{0n} \to Au_0$ при $n \to \infty$.

В силу результата шага 5 существуют функции $u_n(t)$ — решения задач

$$\begin{cases} \dfrac{du_n}{dt} + Au_n = \theta, \\ u_n(0) = u_{0n}, \end{cases} \tag{34}$$

причём для всех $n \in \mathbb{N}$ верно:

$$u_n(t) \in C^1([0,+\infty); H), \quad u_n(t) \in C([0,+\infty); \mathcal{D}(A)).$$

Заметим, что при всех $n, m \in \mathbb{N}$ разности функций $u_n(t)$ и $u_m(t)$ удовлетворяют задачам

$$\begin{cases} \dfrac{d(u_n - u_m)}{dt} + A(u_n - u_m) = \theta, \\ u_n(0) - u_m(0) = u_{0n} - u_{0m}, \end{cases} \tag{35}$$

а поэтому в силу последнего замечания шага 5 имеем при $n, m \to \infty$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leqslant \|u_{0n} - u_{0m}\| \to 0,$$
$$\left\|\frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt}\right\| \leqslant \|Au_{0n} - Au_{0m}\| \to 0.$$

Следовательно, $u_n(t) \to u(t) \in C([0,+\infty); H)$ и $u_n'(t) \to v(t)$ равномерно на всей полупрямой $t \geqslant 0$. В свою очередь, из этого вытекает, что $u \in C^1([0,+\infty); H)$ и $u'(t) = v(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда с учётом (34) при каждом $t \geqslant 0$ имеем

$$\begin{matrix} u_n(t) \to u(t), \\ u_n'(t) \to u'(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Au_n(t) \to -u'(t),$$

откуда в силу замкнутости оператора A следует, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $Au(t) = -u'(t)$, т. е. выполнено (12). Но поскольку $u \in C^1([0,+\infty); H)$, то из (12) вытекает, что $Au(t) \in C([0,+\infty); H)$, а следовательно, $u(t) \in C([0,+\infty); \mathcal{D}(A))$.

Теорема доказана. ▲

Замечание 5. Сейчас мы построим то, что называется полугруппой операторов. При всех $t \geqslant 0$ рассмотрим отображение $u_0 \mapsto u(t)$, где $u(t)$ — значение в точке t решения задачи (12) с начальным условием u_0. Это отображение (определённое на $\mathcal{D}(A)$ и принимающее значения в $\mathcal{D}(A)$) линейно, а в силу оценки $\|u(t)\| \leqslant \|u_0\|$ оно является ограниченным с нормой не больше 1 (где норма понимается как норма оператора в пространстве H). Поскольку $\mathcal{D}(A)$ плотно в H, рассматриваемое отображение можно продолжить до ограниченного оператора $S_A(t)$, определённого на всём H и имеющего норму не более 1. При этом, очевидно, имеют место следующие свойства:

1) для любого $t \geqslant 0$ верно $S_A(t) \in L(H)$, $\|S_A(t)\| \leqslant 1$;
2) $S_A(0) = E$, $S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_2)S_A(t_1)$ при всех $t_1, t_2 \geqslant 0$;
3) $\lim_{t\to+0} \|S_A(t)u_0 - u_0\| = 0$ при всех $u_0 \in H$.

В самом деле, свойство 1) уже доказано; свойство 2) вытекает из возможности «сшить» решения задач (12); свойство 3) для $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ вытекает из непрерывности решения задачи (12), а для остальных u_0 может быть получено по непрерывности.

Семейство $S(t)$ операторов, обладающее свойствами 1)—3), называется *непрерывной полугруппой сжатий*. (Непрерывной — потому функции $S(t)u$ непрерывны при любом $u \in H$. Полугруппой — потому что свойство 2) похоже на определение группы, за исключением наличия обратного элемента. Наконец, сжатием — вопреки всей предыдущей терминологии — в теории полугрупп называется оператор S, для которого $\|S(u_1) - S(u_2)\| \leqslant \|u_1 - u_2\|$.)

Важный результат, полученный Хилле и Иосидой, заключается в том, что если, обратно, семейство линейных операторов $S(t) \in L(H)$ обладает свойствами 1)—3) и сильно непрерывно по t (т. е. для любого $v \in H$ функция $S(t)v$ непрерывна по норме), то существует единственный максимальный монотонный оператор A такой, что $S(t) \equiv S_A(t)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть L — линейное многообразие в гильбертовом пространстве H. Доказать, что оно плотно в H тогда и только тогда, когда единственным элементом, ортогональным всем элементам из L, является нулевой элемент.

2. Доказать, что область определения оператора и его график изоморфны как линейные пространства.

3. 1) Показать, что последовательность линейных операторов $\{A_n\}$ в l^2,

$$A_n x = (x^{(1)}, 2x^{(2)}, \ldots, nx^{(n)}, 0, 0, \ldots),$$

сильно сходится к некоторому неограниченному линейному оператору A, и найти этот оператор A.

2) Однозначно ли определён этот предел A?

4. Доказать неравенство (25).

5. Назовём последовательность абстрактных функций $\{u_n\}$ *локально равномерно сходящейся* на промежутке $\mathcal{T}$, если для каждой точки $t \in \mathcal{T}$ найдётся окрестность, в которой данная последовательность сходится равномерно. Доказать, что предельная функция непрерывна, если все функции последовательности $\{u_n\}$ непрерывны. (Достаточно, конечно, чтобы из $\{u_n\}$ можно было выделить локально равномерно сходящуюся подпоследовательность.)

6. Доказать, что если последовательность абстрактных функций $\{u_n\}$ сходится хотя бы в одной точке, а последовательность их производных $\{u'_n\}$ сходится равномерно, то предельная функция дифференцируема и её производная равна пределу производных.

7. Доказать подробнее свойства 2) и 3) полугруппы $S_A(t)$. (Заметим, что из свойств 2) и 3) вытекает непрерывность функции $S_A(t)u$ при любом $u \in H$.)

8*. Доказать, что если A — ограниченный оператор, то соответствующая ему полугруппа может быть представлена в виде $S_A(t) = \exp(tA)$, где экспонента понимается в виде ряда, и при добавлении отрицательных значений t (для которых рассматриваемая экспонента тоже имеет смысл) становится группой, т. е. не только выполнены свойства 1)—3) (за исключением неравенства $\|S_A(t)\| \leqslant 1$[1]), но и любой элемент имеет обратный.

[1] Это неравенство гарантируется монотонностью оператора A, которая в этой задаче не предполагается.