ГЛАВА 1

Линейные пространства

1. Аксиомы линейного пространства

1.1. Определение. Множество $\mathcal{L}$ с определенными на нём операциями сложения элементов, которые мы в дальнейшем будем называть векторами, и умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, не выводящие сумму векторов и произведение вектора на число из множества $\mathcal{L}$, называется линейным пространством, если справедливы следующие свойства:

ВП1. коммутативность сложения: для любых векторов x и y

$$x + y = y + x;$$

ВП2. ассоциативность сложения: для любых векторов x, y и z

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

ВП3. свойство нулевого вектора: существует нулевой вектор θ такой, что для любого вектора x

$$x + \theta = x;$$

ВП4. существование противоположного вектора: для любого вектора x существует такой вектор $-x$, что

$$x + (-x) = \theta;$$

ВП5. свойство единицы: для любого вектора x

$$1 \cdot x = x;$$

ВП6. ассоциативность умножения на число: для любого вектора x и любых чисел α и β

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

ВП7. дистрибутивность относительно сложения векторов: для любых векторов x и y и любого числа α

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y;$$

ВП8. дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора x и любых чисел α и β

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$$

1.2. Аксиомы **ВП1.–ВП4.** относятся к внутреннему закону композиции $+$; аксиомы **ВП5.**, **ВП6.** относятся к внешнему закону композиции — умножению векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, а аксиомы **ВП7.**, **ВП8.** связывают свойства внутреннего закона композиции $+$ и умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$.

1.3. Предложение. *Нулевой вектор линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть существуют два вектора $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{L}$ такие, что

$$\theta_1 + a = a \quad \text{и} \quad \theta_2 + a = a \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{L}.$$

Тогда с учетом аксиомы **ВП1.** коммутативности сложения и аксиомы нулевого вектора **ВП3.** справедлива следующая цепочка равенств:

$$\theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1.$$

□

1.4. Предложение. *Противоположный вектор к вектору линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть

$$a + b = \theta \quad \text{и} \quad a + c = \theta.$$

Тогда с учетом аксиом коммутативности **ВП1.**, ассоциативности **ВП2.** и нулевого вектора **ВП3.** справедлива следующая цепочка равенств:

$$b = b + \theta = \theta + b = (a + c) + b = (c + a) + b = c + (a + b) = c + \theta = c.$$

□

1.5. Предложение. *Уравнение*

$$a + x = b \tag{1.1}$$

для любых $a, b \in \mathcal{L}$ имеет единственное решение

$$x = b + (-a). \tag{1.2}$$

Доказательство. Действительно, из (1.1), а также аксиом коммутативности **ВП1.** и ассоциативности **ВП2.** вытекают равенства

$$\begin{aligned} x = x + \theta = x + (a + (-a)) = \\ = (x + a) + (-a) = (a + x) + (-a) = b + (-a). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Поэтому если решение уравнения (1.1) существует, то оно имеет вид (1.2). Обратно справедливы следующие равенства:

$$a+(b+(-a)) = a+((-a)+b) = (a+(-a))+b = \theta+b = b+\theta = b, \tag{1.4}$$

где мы воспользовались аксиомами **ВП1.–ВП4.** □

1.6. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*

$$0 \cdot a = \theta \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8.** имеем

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a,$$

из которого в силу Предложения 1.5 и **ВП4.** вытекает равенство

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = \theta.$$

□

1.7. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*

$$k \cdot \theta = \theta \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{K}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8.** и **ВП3.** справедливы следующие равенства:

$$k \cdot \theta = k \cdot (\theta + \theta) = k \cdot \theta + k \cdot \theta.$$

Отсюда получаем

$$k \cdot \theta + k \cdot \theta = k \cdot \theta.$$

Из Предложения 1.5 и **ВП4.** имеем

$$k \cdot \theta = k \cdot \theta + (-k \cdot \theta) = \theta.$$

□

1.8. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*

$$-a = (-1) \cdot a \quad \text{для любого} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП5.**, **ВП8.** и Предложения 1.6 справедлива следующая цепочка равенств:

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = \theta \Rightarrow -a = (-1) \cdot a.$$

□

1.9. Предложение. *Аксиома* **ВП1.** *коммутативности сложения вытекает из остальных аксиом и при постулирование аксиомы единственности противоположного вектора.*

Доказательство. Действительно, в силу Предложения 1.8 и аксиомы **ВП2.** вытекает следующая цепочка равенств:

$$(a+b)+(-(b+a)) = (a+b)+(-1)\cdot(b+a) = a+b+(-1)\cdot b+(-1)\cdot a =$$
$$= a + \theta + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a = \theta,$$

Осталось воспользоваться тем, что вектор (1.2) является единственным решением уравнения (1.1) из Предложения 1.5. В данном случае $x = \theta$. Поэтому имеем

$$b + a = a + b.$$

$\square$

2. Линейная комбинация. Линейная зависимость

1.10. Определение. Пусть дано конечное число векторов линейного пространства $\mathcal{L}$: $a, b, c, \dots, q \in \mathcal{L}$ и числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa \in \mathbb{K}$, которых столько же сколько и векторов. Всякий вектор $x \in \mathcal{L}$, представимый в виде

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \kappa q,$$

называется линейной комбинацией элементов $a, b, c, \dots, q$. Говорят также, что x линейно выражается через $a, b, c, \dots, q$.

1.11. Определение. Линейная комбинация векторов $a, b, c, \dots, q \in \mathcal{L}$ называется тривиальной, если

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = \kappa = 0,$$

и называется нетривиальной, если среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

1.12. Определение. Система векторов $a, b, c, \dots, q \in \mathcal{L}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов $a, b, c, \dots, q$, равная нулевому вектору; иначе говоря, если справедливо равенство

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \kappa q = \theta,$$

где среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

1.13. Определение. Система векторов $a, b, c, \dots, q \in \mathcal{L}$ называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \kappa q = \theta$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = \kappa = 0.$$

1.14. Лемма. Система векторов, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство. Действительно, рассмотрим равенство $\alpha x = \theta$. Если $x \neq \theta$, то это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Обратно, равенство $\alpha\theta = \theta$ имеет место, например, при $\alpha = 1$. $\square$

1.15. Лемма. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.

Доказательство. Пусть известно, что в системе векторов $a, b, c, \dots, q$ часть, состоящая, например, из векторов $c, \dots, q$ линейно зависима. Тогда найдется такая их линейная комбинация, что

$$\gamma c + \dots + \kappa q = \theta$$

и числа $\gamma, \dots, \kappa$ одновременно в ноль не обращаются. Но тогда справедливо следующее равенство:

$$0a + 0b + \gamma c + \dots + \kappa q = \theta,$$

причем это нетривиальная линейная комбинация векторов. Значит, вся система векторов $a, b, c, \dots, q$ линейно зависима. □

1.16. Лемма. Если вся система векторов линейно независима, то ее любая часть векторов тоже линейно независима.

Доказательство. Действительно, пусть некоторая часть системы векторов $a, b, c, \dots, q$ является линейно зависимой, но тогда в силу леммы 1.15 и вся система векторов является линейно зависимой. Следовательно, любая часть этой системы векторов линейно независима. □

1.17. Лемма. Для того чтобы система векторов, состоящая более чем из была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы существовал какой-то вектор этой системы, линейно выражающийся через остальные векторы системы.

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов $a, b, c, \dots, q$ является линейно зависимой. Тогда существует такая линейная их комбинация

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \kappa q = \theta,$$

в которой числа $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa$ одновременно в ноль не обращаются. Например, пусть $\alpha \neq 0$. Тогда имеет место равенство

$$a = -\frac{\beta}{\alpha} b - \frac{\gamma}{\alpha} c - \dots - \frac{\kappa}{\alpha} q,$$

т.е. вектор a линейно выражается через оставшиеся векторы рассматриваемой системы.

Достаточность. Пусть, например, вектор a линейно выражается через оставшиеся векторы системы:

$$a = \beta b + \gamma c + \dots + \kappa q.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(-1)a + \beta b + \gamma c + \dots + \kappa q = \theta.$$

Это нетривиальная линейная комбинация векторов рассматриваемой системы. Значит, семейство векторов $a, b, c, \dots, q$ линейно зависимо. □

1.18. Лемма. Пусть $a_1, \dots, a_k$ какие–нибудь векторы линейного пространства $\mathcal{L}$. Пусть каждый из векторов $c_1, c_2, \dots, c_n$ того же линейного пространства $\mathcal{L}$ линейно выражаются через $a_1, \dots, a_k$:

$$c_1 = \alpha_{11}a_1 + \dots + \alpha_{k1}a_k, \tag{1.8}$$

$$c_2 = \alpha_{12}a_1 + \dots + \alpha_{k2}a_k, \tag{1.9}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{1.10}$$

$$c_n = \alpha_{1n}a_1 + \dots + \alpha_{kn}a_k. \tag{1.11}$$

Пусть, далее, $b \in \mathcal{L}$ линейно выражается через семейство векторов $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_n$:

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k + \mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n. \tag{1.12}$$

Тогда вектор $b \in \mathcal{L}$ линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_k$.

Доказательство. Действительно, из (1.8)–(1.12) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} b = (\lambda_1 + \mu_1\alpha_{11} + \dots + \mu_n\alpha_{1n})a_1 + \dots +& \\ + (\lambda_k + \mu_1\alpha_{k1} + \dots + \mu_n\alpha_{kn})a_k.& \end{aligned} \tag{1.13}$$

□

3. Теорема о базисном миноре

1.19. Определение. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Рассмотрим произвольные $k \in [1, m]$ строк матрицы A и произвольные $k \in [1, n]$ столбцов матрицы A. Определитель матрицы $B \in \mathbb{K}^{k\times k}$, образованной из элементов на пересечении выделенных k строк и k столбцов и записанная в том же порядке, что и в матрице A, называется минором порядка k данной матрицы.

$$
\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_{i_1}^m & \cdots & a_{i_2}^m & \cdots & a_{i_k}^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\
a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k}
\end{pmatrix}.
$$

1.20. Определение. Минор матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ порядка k называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка $k+1$, если они существуют, равны нулю.

1.21. Лемма. Если у матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ существуют базисный минор порядка $k \in \mathbb{N}$, а также существуют миноры порядков $k+2, \ldots, k+p$ при $p \geqslant 2$, то они все равны нулю.

Доказательство. Доказательство основано на методе математической индукции. Заметим, что минор порядка $k+2$ можно разложить, например, по первой строчке. Это разложение будет состоять из суммы определителей порядка $k+1$ с какими-то коэффициентами. Осталось заметить, что согласно определению базисного минора все миноры порядка $k+1$ равны нулю. Отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

1.22. Определение. Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор, называются базисными столбцами. Аналогичная терминология употребляется для строк.

1.23. Теорема. Теорема о базисном миноре. *Базисные столбцы матрицы линейно независимы. Всякий столбец матрицы через них линейно выражается.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор расположен на пересечении первых r строк и первых r столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Первое утверждение. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \cdots, A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Второе утверждение. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r + 1$, полученный «окаймлением» базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1,r}$ и $s \in \overline{r+1,m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора. Таким образом, во всех случаях определитель (1.14) $r+1$ порядка равен нулю.

Теперь мы можем разложить этот определитель (1.14) по s–й строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1,m},$$

причём $\mathcal{M} \neq 0$, а $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_r$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки. Отметим, что по своему построению алгебраические дополнения к элементам s–ой строчки не зависят от элементов этой строчки. Итак, имеем

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1,m}.$$

Отсюда получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \dots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.$$

□

1.24. Аналогичное утверждение имеет место для базисных строк матрицы A.

4. Линейные оболочки и подпространства

1.25. Определение. Пусть дано семейство векторов $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathcal{L}$ и числа $\alpha_1, \alpha, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$. Линейной оболочкой семейства векторов $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathcal{L}$ называется следующее множество:

$$L(b_1, b_2, \dots, b_r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_r b_r : \ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

1.26. Лемма. Пусть семейство векторов $a_1, \dots, a_p$ принадлежат линейной оболочке семейства векторов $b_1, \dots, b_r$. Тогда

$$L(a_1, \dots, a_p) \subset L(b_1, \dots, b_r).$$

Доказательство. По условию $a_j \in L(b_1, \dots, b_r)$ для любого $j = \overline{1, p}$. Поэтому найдутся такие числа

$$a_j^k \in \mathbb{K}, \quad k = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p},$$

что справедливо следующее равенство:

$$a_j = \sum_{k=1}^{r} a_j^k b_k. \tag{1.15}$$

Пусть $c \in L(a_1, \dots, a_p)$. Тогда найдутся такие числа $\alpha_j \in \mathbb{K}$ при $j = \overline{1, p}$, что в силу (1.15) справедливы следующие равенства:

$$c = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j a_j = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j \sum_{k=1}^{r} a_j^k b_k = \sum_{k=1}^{r} \beta^k a_k \in L(a_1, \dots, a_r), \tag{1.16}$$

где

$$\beta^k = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j a_j^k.$$

□

1.27. Определение. Подмножество $P \subset \mathcal{L}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейным подпространством, если

$$\alpha a + \beta b \in P$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и для всех векторов $a, b \in P$.

1.28. Примеры. Очевидно, $\mathbb{V}_1$ подпространство плоскости $\mathbb{V}_2 \supset \mathbb{V}_1$, а $\mathbb{V}_2$ подпространство пространства $\mathbb{V}_3 \supset \mathbb{V}_2$.

1.29. Лемма. Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_r)$ семейства векторов $\{a_1, \ldots, a_r\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ является его подпространством.

Доказательство. Действительно, пусть вектора $b, c \in L(a_1, \ldots, a_r)$, тогда

$$b = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k a_k, \quad c = \sum_{k=1}^{r} \beta^k a_k.$$

$$\alpha b + \beta c = \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha\alpha^k + \beta\beta^k\right) a_k = \sum_{k=1}^{r} \delta^k a_k \in L(a_1, \ldots, a_r),$$

где $\delta^k = \alpha\alpha^k + \beta\beta^k$. □

5. Теорема о двух системах векторов

1.30. Теорема. *Если семейство векторов* $\{c_1, \ldots, c_s, b_1, \ldots, b_r\}$ *принадлежит одному и тому же линейному пространству* $\mathcal{L}$, *причем*

$$c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r), \quad s > r,$$

то векторы $c_1, \ldots, c_s$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Введём обозначения.

$$\mathbf{X} = (b_1, \ldots, b_r), \quad \mathbf{Y} = (c_1, \ldots, c_s). \tag{1.17}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию найдутся такие числа a_k^j при $j = \overline{1, r}$ и $k = \overline{1, s}$, что

$$\begin{gathered} c_1 = a_1^1 b_1 + a_1^2 b_2 + \cdots + a_1^r b_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \\ c_s = a_s^1 b_1 + a_s^2 b_2 + \cdots + a_s^r b_r \end{gathered} \tag{1.18}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (1.17) и (1.19) выражение (1.18) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{1.20}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \dots + a_s^2 z^s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \dots + a_s^r z^s = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Поскольку в однородной системе линейных уравнений (1.22) число переменных s больше числа уравнений r существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $c_1, \dots, c_s$:

$$z_0^1 c_1 + \dots + z_0^s c_s = \mathbf{Y} Z_0 = \mathbf{X} A Z_0 = \mathbf{X} O = O. \tag{1.24}$$

Следовательно, векторы $c_1, \dots, c_s$ линейно зависимы. $\square$

1.31. Следствие. *Если векторы $c_1, \dots, c_s \in L(b_1, \dots, b_r)$ и линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

1.32. Определение. Пусть семейство векторов $a_1, \dots, a_k$ содержит линейно независимую подсистему, состоящую из r векторов. Число r называется рангом системы векторов $a_1, \dots, a_k$, если всякая ее подсистема из большого числа векторов линейно зависима, либо если таких подсистем нет совсем в случае, т. е. в случае $r = k$. Будем использовать следующее обозначение

$$r = \mathrm{rk}\{a_1, \dots, a_k\}.$$

1.33. Следствие. *Если векторы $c_1, \dots, c_s \in L(b_1, \dots, b_r)$ одного и того же линейного пространства $\mathfrak{L}$, то ранг системы векторов $c_1, \dots, c_s$ не выше ранга системы векторов $b_1, \dots, b_r$.*

Доказательство. Пусть $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ — это максимальное линейно независимое семейство векторов из семейства $\{c_1, \ldots, c_s\}$. В частности, имеем

$$k_p = \operatorname{rk}\{c_1, \ldots, c_s\}.$$

Пусть $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ — это максимальное линейно независимое семейство векторов из семейства векторов $\{b_1, \ldots, b_r\}$. В частности,

$$j_d = \operatorname{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

Заметим, что

$$L(b_1, \ldots, b_r) = L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}).$$

Докажите сами! Поскольку $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, то имеем

$$c_{k_1}, \ldots, c_{k_p} \in L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}),$$

причем семейства векторов $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ и $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ по построению являются линейно независимыми. Поэтому в силу следствия 1.31 получаем неравенство

$$k_p \leqslant j_d \Rightarrow \operatorname{rk}\{c_1, \ldots, c_s\} \leqslant \operatorname{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

□

1.34. Следствие. *Если векторы $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, а векторы $b_1, \ldots, b_r \in L(c_1, \ldots, c_s)$, то ранги систем векторов $b_1, \ldots, b_r$ и $c_1, \ldots, c_s$ совпадают.*

Доказательство. Действительно, дважды применяя результат следствия 1.33, получим два неравенства

$$\operatorname{rk}\{c_1, \ldots, c_s\} \leqslant \operatorname{rk}\{b_1, \ldots, b_r\} \quad \text{и} \quad \operatorname{rk}\{b_1, \ldots, b_r\} \leqslant \operatorname{rk}\{c_1, \ldots, c_s\},$$

из которых вытекает равенство

$$\operatorname{rk}\{c_1, \ldots, c_s\} = \operatorname{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

□

6. Ранг матрицы

1.35. Определение. Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых столбцов. **Обозначение**. $\operatorname{rk} A$.

1.36. Теорема. Теорема о ранге матрицы. *Ранг произвольной матрицы равен порядку ее базисного минора.*

Доказательство. Случай $\operatorname{rk} A = 0$. В этом случае $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — нулевая матрица и поэтому у нее нет отличных от нуля миноров. Поэтому порядок базисного минора этой матрицы равен тоже нулю.

Случай $\operatorname{rk} A > 0$. В этом случае матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ненулевая. Пусть M — это базисный минор порядка $r \geqslant 1$. Тогда, с одной стороны, базисные строки этой матрицы в силу теоремы о базисном миноре являются линейно независимыми. Следовательно, $\operatorname{rk} A \geqslant r$. С другой стороны, любой столбец матрицы A по той же теореме о базисном миноре линейно выражается через r базисных столбцов. Значит, по следствию 1.33 $\operatorname{rk} A \leqslant r$.

Таким образом, $\operatorname{rk} A = r$. □

1.37. Следствие. *Ранг семейства строк матрицы A равен порядку базисного минора этой матрицы.*

Доказательство. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ нулевая, то утверждение очевидно. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ не нулевая. Рассмотрим транспонированную матрицу $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Тогда строчки матрицы A перейдут в столбцы матрицы A^T. В силу результата теоремы 1.36 имеем $\operatorname{rk} A^T = r$, где r — порядок базисного минора матрицы A^T. С другой стороны, при транспонировании базисный минор переходит в базисный минор. Поэтому порядок базисного минора матрицы A^T совпадает с порядком базисного минора матрицы A. Таким образом, $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$. Осталось воспользоваться результатом теоремы 1.36. □

1.38. Следствие. *Если $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, то $\operatorname{rk} A$ не превосходит $\min\{m, n\}$.*

Доказательство. Действительно, порядок базисного минора не превосходит числа строк и числа столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Стало быть, приходим к выводу о том, что $\operatorname{rk} A = r \leqslant \min\{m, n\}$. □

7. Размерность и базис линейного пространства

1.39. Определение. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathcal{L}$ называется бесконечномерным.

1.40. Определение. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется конечномерным, если выполнены следующие два условия:

1. в $\mathcal{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;
2. любое семейство векторов из $\mathcal{L}$, состоящее из $n+1$ векторов линейно зависимо.

Число n называется размерностью линейного пространства $\mathcal{L}$ и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Линейное пространство $\{\theta\}$ называется нульмерным.

1.41. Примеры. Линейное пространство $\{\theta\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.
P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.
P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

1.42. Определение. Базисом линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимое семейство векторов $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Столбец коэффициентов X называется столбцом координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

1.43. Определение. Семейство векторов $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \in \mathcal{L}$ называется *полным*, если любой вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этого семейства.

1.44. Лемма. Если семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис линейного пространства $\mathcal{L}$, то линейная оболочка $L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.

Доказательство. Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L},$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

□

1.45. Лемма. Разложение по базису линейного пространства единственно.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2)\mathbf{e}_2 + \dots + (x^n - y^n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем

$$x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n.$$

$\square$

1.46. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении индекс встречается ровно два раза один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$

2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,

$$a_k b^k c^k,$$

хотя

$$(a_k + b_k)c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c^k.$$

Введем важный *символ Кронекера*:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Заметим, что

$$a_j \delta^j_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta^j_k = a_k.$$

1.47. Теорема. *Все базисы конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности* $\dim \mathcal{L}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathcal{L}, \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

Следовательно, в силу следствия 1.31 из теоремы 1.30 имеют место два неравенства

$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$

С другой стороны, любое семейство из $n+1$ векторов

$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$

поэтому в силу теоремы 1.30 семейство $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,

$$n = \dim \mathcal{L}.$$

$\square$

1.48. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} (x^k + y^k)\mathbf{e}_k, \quad \alpha\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha x^k \mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

8. Геометрия подпространств. Прямая сумма подпространств

1.49. Лемма. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это два подпространства в линейном пространстве $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда

1. $\dim \mathcal{Q} \leqslant \dim \mathcal{P}$;
2. если $\dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P}$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство. 1. Действительно, пусть $a_1, \ldots, a_r$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $b_1, \ldots, b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому

$$b_1, \ldots, b_s \in L(a_1, \ldots, a_r).$$

В силу следствия 1.31 из теоремы 1.30 имеем $\dim \mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim \mathcal{P}$.

2. Действительно, пусть $b_1, \ldots, b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т. е. $s = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $c \in \mathcal{P}$, что $c \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $b_1, \ldots, b_s$. Следовательно, семейство

$$b_1, \ldots, b_s, c$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. $\square$

1.50. Определение. Пусть L_1 и L_2 — произвольные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. Совокупность

$$L = \{a = a_1 + a_2 : \ a_1 \in L_1, \ a_2 \in L_2\}$$

называется суммой подпространств. **Обозначение.** $L_1 + L_2$.

1.51. Лемма. Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in L = L_1 + L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда найдутся такие $a_1, b_1 \in L_1$ и $a_2, b_2 \in L_2$, что справедливы равенства

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a_1 + \beta b_1) + (\alpha a_2 + \beta b_2) \in L_1 + L_2,$$

поскольку $\alpha a_1 + \beta b_1 \in L_1$, $\alpha a_2 + \beta b_2 \in L_2$. □

1.52. Определение. Совокупность $N = \{a : \ a \in L_1, \ a \in L_2\}$ называется пересечением подпространств L_1 и L_2. **Обозначение.** $L_1 \cap L_2$.

1.53. Лемма. $L_1 \cap L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in L_1 \cap L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда $a, b \in L_1$ и $a, b \in L_2$ и поэтому

$$\alpha a + \beta b \in L_1, \quad \alpha a + \beta b \in L_2 \Rightarrow \alpha a + \beta b \in L_1 \cap L_2.$$

□

1.54. Лемма. Объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств а в общем случае не является подпространством в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a \in L_1$, $a \notin L_2$ и $b \in L_2$, $b \notin L_1$. Тогда, вообще говоря, $a + b \notin L_1 \cup L_2$. Действительно, рассмотрим на плоскости две различные прямые, проходящие через начало некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Тогда сумма двух любых ненулевых векторов таких, что один вектор лежит на одной прямой, а другой вектор лежит на другой прямой. Тогда их сумма не будет лежать на этих прямых. □

1.55. Теорема. *Справедливо следующее равенство*:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{1.25}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\dim(L_1 \cap L_2) \equiv k, \quad \dim L_1 \equiv k + l_1, \quad \dim L_2 \equiv k + l_2.$$

В этих обозначениях нм нужно доказать, что

$$\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2, \tag{1.26}$$

поскольку

$$\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + k + l_2 - k.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$. Дополним этот базис до базисов подпространств L_1 и L_2 :

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1} - \text{базис в} \quad L_1, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2} - \text{базис в} \quad L_2. \tag{1.28}$$

Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2} \tag{1.29}$$

образуют базис в $L_1 + L_2$, откуда и будет следовать, что $\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2$.

Полнота. Прежде всего заметим, что любой вектор $x \in L_1 + L_2$ можно представить в виде линейной комбинации семейства векторов (1.29), поскольку $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и в силу (1.27), (1.28) векторы x_1 и x_2 раскладываются по базисам (1.27), (1.28).

Линейная независимость. Пусть существует нетривиальный набор чисел

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{l_1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l_2} \in \mathbb{K},$$

такой, что

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k + \beta_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \mathbf{f}_{l_1} + \gamma_1 \mathbf{g}_1 + \cdots + \gamma_{l_2} \mathbf{g}_{l_2} = \theta. \tag{1.30}$$

Равенство (1.30) можно переписать в следующем виде:

$$a := \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k + \beta_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \mathbf{f}_{l_1} = -\gamma_1 \mathbf{g}_1 - \cdots - \gamma_{l_2} \mathbf{g}_{l_2}. \tag{1.31}$$

Из (1.31) с учетом (1.27) и (1.28) вытекает, что $a \in L_1$ и $a \in L_2$, т.е. $a \in L_1 \cap L_2$. А поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$, то найдутся такие числа $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство

$$a = \delta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \delta_k \mathbf{e}_k. \tag{1.32}$$

Из равенств (1.31) и (1.32) вытекает, что

$$\delta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \delta_k \mathbf{e}_k = -\gamma_1 \mathbf{g}_1 - \cdots - \gamma_{l_2} \mathbf{g}_{l_2}. \tag{1.33}$$

По построению (см. (1.28)) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2}$ является линейно независимым семейством в линейном пространстве L_2. Поэтому равенство (1.33) возможно тогда и только тогда, когда

$$\delta_1 = \cdots = \delta_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{l_2} = 0. \tag{1.34}$$

Из (1.30) и (1.34) вытекает равенство

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k + \beta_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \mathbf{f}_{l_1} = \theta. \tag{1.35}$$

В силу (1.27) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}$ линейно независимо в L_1. Тогда равенство (1.35) возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{l_1} = 0. \tag{1.36}$$

Из (1.35) и (1.36) вытекает, что равенство (1.30) возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{l_1} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{l_2} = 0, \tag{1.37}$$

т.е. семейство векторов (1.29) линейно независимо. Стало быть, семейство (1.29) образует базис в $L_1 + L_2$. Поэтому справедливо равенство (1.26). □

1.56. Определение. Подпространства L_1 и L_2 называются дизъюнктными, если их пересечение состоит из нулевого вектора θ, т.е. если $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

1.57. Определение. Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется прямой, если представление любого вектора $x \in L$ в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ единственно. **Обозначение**. $L = L_1 \oplus L_2$.

1.58. Теорема. *Для того чтобы сумма подпространств L_1 и L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$ и $z_0 \in L_1 \cap L_2$. Для произвольного $x \in L$ справедливо следующее разложение:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2. \tag{1.38}$$

Но тогда справедливо следующее разложение:

$$x = (x_1 + z_0) + (x_2 - z_0), \quad x_1 + z_0 \in L_1, \quad x_2 - z_0 \in L_2. \tag{1.39}$$

Поскольку разложение (1.38) должно быть единственным, то с учетом (1.39) получаем равенства

$$x_1 = x_1 + z_0, \quad x_2 = x_2 - z_0 \Rightarrow z_0 = \theta. \tag{1.40}$$

Достаточность. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Предположим, что для $x \in L = L_1 + L_2$ справедливы следующие два разложения:

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2. \tag{1.41}$$

Но тогда

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in L_1 \cap L_2 = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \tag{1.42}$$

т.е. разложение любого $x \in L = L_1 + L_2$ единственно и поэтому $L = L_1 \oplus L_2$. □

1.59. Теорема. *Для того чтобы линейное пространство $\mathcal{L}$ разлагалось в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:* a) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}$, b) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2$, то согласно результату теоремы 1.58 вытекает, что $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ и $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Поэтому с учетом теоремы 1.55 имеем $\dim \mathcal{L} = \dim L_1 + \dim L_2$.

Достаточность. Поскольку $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, то нам достаточно доказать, что $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Очевидно, что $L_1 + L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$, причем в силу 1.55

$$\dim(L_1+L_2) = \dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2) = \dim L_1+\dim L_2 = \dim \mathcal{L}.$$

Поэтому в силу леммы 1.49 о монотонности размерности имеем $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. И, следовательно,

$$\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2.$$

□

9. Изоморфизм линейных пространств

1.60. Определение. Взаимно однозначное отображение

$$\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2,$$

линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ называется изоморфизмом, если для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство

$$\phi(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 \phi(x_1) + \alpha^2 \phi(x_2).$$

1.61. Лемма. Изоморфизм $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ удовлетворяет свойству

$$\phi(\theta_1) = \theta_2,$$

где $\theta_1 \in \mathcal{L}_1$ и $\theta_2 \in \mathcal{L}_2$ — соответствующие нулевые векторы.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\phi(\theta_1) = \phi(0 \cdot \theta_1) = 0 \cdot \phi(\theta_1) = \theta_2.$$

□

1.62. Теорема. *Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.*

Доказательство. Шаг 1. Построение изоморфизма. Сначала докажем, что любое линейное пространство $\mathcal{L}$ размерности $n = \dim \mathcal{L}$ изоморфно линейному пространству столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Пусть $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый фиксированный базис в $\mathcal{L}$. Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ справедливо разложение

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k. \qquad (1.43)$$

В силу единственности разложения вектора по базису и того, что любой набор чисел $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ по формуле

$$\mathbf{y} = y^k \mathbf{e}_k. \qquad (1.44)$$

порождает некоторый вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$, то определено взаимно однозначное отображение

$$\phi_E(\mathbf{x}) = X^T, \quad X^T = (x^1, \ldots, x^n), \quad \phi_E : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^{n\times 1} \tag{1.45}$$

для любого фиксированного базиса $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Пусть

$$\mathbf{x}_1 = x_1^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = x_2^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\phi_E(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = (x_1^1 + x_1^2, \ldots, x_1^n + x_2^n) = \\ = (x_1^1, \ldots, x_1^n) + (x_2^1, \ldots, x_2^n) = \phi_E(\mathbf{x}_1) + \phi_E(\mathbf{x}_2),$$

$$\phi_E(\alpha \cdot \mathbf{x}) = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n) = \alpha(x^1, \ldots, x^n) = \alpha\phi_E(\mathbf{x}).$$

Итак, ϕ_E — изоморфизм.

Шаг 2. Изоморфность двух линейных пространств одной размерности. Итак, пусть у нас имеются два изоморфизма

$$\phi_{1E_1} : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \phi_{2E_2} : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad n = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2.$$

Тогда определено взаимно однозначное отображение

$$\phi_{2E_2}^{-1} : \mathbb{K}^{1\times n} \to \mathcal{L}_2, \quad \phi_{2E_2}(\mathbf{x}) = X^T \Leftrightarrow \mathbf{x} = \phi_{2E_2}^{-1}(X^T),$$

$$\phi_{2E_2}^{-1}(X_1^T + X_2^T) = \phi_{2E_2}^{-1}((X_1 + X_2)^T) = \\ = E_2 \cdot (X_1 + X_2) = E_2 \cdot X_1 + E_2 \cdot X_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \\ = \phi_{2E_2}^{-1}(X_1^T) + \phi_{2E_2}^{-1}(X_2^T),$$

$$\phi_{2E_2}^{-1}(\alpha X^T) = \phi_{2E_2}^{-1}((\alpha X)^T) = E_2 \cdot (\alpha X) = \alpha E_2 \cdot X = \alpha \mathbf{x} = \alpha \phi_{2E_2}^{-1}(X^T).$$

Итак, $\phi_{2E_2}^{-1}$ тоже изоморфизм. Тогда имеем

$$\phi = \phi_{1E_1} \circ \phi_{2E_2}^{-1} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2.$$

Предлагаем студентам доказать несложное утверждение о том, что композиция изоморфизмов является изоморфизмом. Тогда взаимно однозначное отображение ϕ является искомым изоморфизмом. □

1.63. Теорема. *Между двумя конечномерными линейными пространствами различных размерностей не существует изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ — это два линейных пространства размерностей $n = \dim \mathcal{L}_n$ и $m = \dim \mathcal{L}_m$, причем $m < n$ и существует тем не менее изоморфизм

$$\phi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}_n$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — базис в $\mathcal{L}_m$ и, кроме того, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset \mathcal{L}_m$, где $\phi_j = \phi(\mathbf{e}_j)$. Таким образом, имеем

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset \mathcal{L}_m = L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m).$$

Значит, семейство векторов $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ линейно зависимо в $\mathcal{L}_m$ в силу доказанной ранее теоремы 1.30 о системе двух векторов, поскольку $n > m$. Таким образом, существует следующая нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору

$$c^k \phi_k = \theta_2 \Leftrightarrow c^k \phi(\mathbf{e}_k) = \phi(\theta_1) \Rightarrow \phi(c^k \mathbf{e}_k - \theta_1) = \theta_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^k \mathbf{e}_k - \theta_1 = \phi^{-1}(\theta_2) = \theta_1 \Rightarrow c^k \mathbf{e}_k = \theta_1,$$

что противоречит линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и результата леммы 1.61, а также того, что ϕ^{-1} изоморфизм, когда ϕ изоморфизм. $\square$