Лекция 7

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§ 1. Определитель второго порядка

Рассмотрим следующую систему двух уравнений относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Методом исключения переменных построим решение при некотором условии, которое будет указано далее. Найдём выражение для неизвестной x. Умножим обе части первого уравнения на b_2, а второе уравнение умножим на $-b_1$ тогда получим равенства

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Теперь сложим эти два уравнения и получим равенство

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{1.3}$$

Теперь получим выражение для неизвестной y. Умножим обе части первого уравнения в (1.1) на $-a_2$, а второе на a_1 и сложим полученные равенства. Тогда получим следующее выражение:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{1.4}$$

Предположим, что

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{1.5}$$

тогда из равенств (1.3) и (1.4) получим следующие эквивалентные равенства:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{1.6}$$

Нетрудно проверить непосредственной проверкой, что выражения (1.6) действительно удовлетворяют уравнениям (1.1).

Выражения для неизвестных x и y можно переписать в гораздо более удобном виде. Дадим определение определителя квадратной матрицы 2×2.

Определение 1. *Определителем квадратной матрицы D размера 2×2 называется следующее выражение*:

$$\det D = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{1.7}$$

Замечание 1. Правило, по которому вычисляется определитель квадратной матрицы 2×2, можно схематично представить в следующем виде:

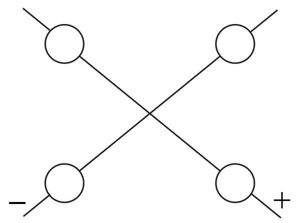

Рис. 1. Правило умножения.

ПРИМЕР 1. Вычислим определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, согласно определению 1 имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$$

Теперь рассмотрим следующие три квадратные матрицы, связанные с коэффициентами и правами частями системы уравнений (1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Согласно определению 2 имеем

$$|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad |A_1| = c_1 b_2 - c_2 b_1, \quad |A_2| = a_1 c_2 - a_2 c_1. \tag{1.9}$$

Тогда формулы (1.6) можно переписать в следующем виде:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{1.10}$$

ПРИМЕР 2. Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 5x + 4y = 12. \end{cases} \tag{1.11}$$

Составим три квадратные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители этих трёх матриц.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 4 - (-3) \cdot 12 = -28 + 36 = 8,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot 12 - (-7) \cdot 5 = 24 + 35 = 59.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то система уравнений (1.11) имеет единственное решение, которое даётся следующими формулами:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{23}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{59}{23}.$$

Мы рассмотрели полностью случай, когда $|A| \neq 0$. Что можно сказать о существовании решения системы уравнений (1.1) в том случае, когда $|A| = 0$? Рассмотрим ряд примеров.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \tag{1.12}$$

Матрица A имеет в данном случае вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Очевидно, что эта система уравнений не имеет решений. Отметим, что

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = 1 - 2 = -1, \quad |A_2| = 2 - 1 = 1.$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим теперь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases} \tag{1.13}$$

Матрица A имеет в данном случае следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0.$$

Эта система уравнений эквивалентна одному уравнению

$$x + y = 1,$$

всё множество решений которой можно записать в следующем виде:

$$x = c, \quad y = 1 - c,$$

где c — это произвольное вещественное число. Отметим, что в данном случае

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = |A_2| = 0.$$

З а м е ч а н и е 2. Могло бы показаться, что наличие бесконечного множества решений системы уравнений (1.13) связано с тем, что $|A| = |A_1| = |A_2| = 0$. Однако, это не так. Рассмотрим ещё один пример.

П Р И М Е Р 5. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1. \end{cases} \tag{1.14}$$

Очевидно, что последнее уравнение противоречиво и поэтому эта система уравнений не имеет решений, хотя

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|A| = |A_1| = |A_2| = 0.$$

Теперь мы изучим вопрос о том, что можно сказать о матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

в том случае, когда $|A| = 0$. Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 1. *Для того, чтобы*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.15}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа α и β, не равные одновременно нулю, чтобы были выполнены следующие равенства:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \quad \alpha a_2 + \beta b_2 = 0. \tag{1.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность.* Пусть найдутся такие числа α и β, не равные одновременно нулю, такие что выполнено равенство (1.16). Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда получим следующие равенства:

$$a_1 = \gamma b_1, \quad a_2 = \gamma b_2, \quad \gamma = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{1.17}$$

Поэтому отсюда вытекает следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \gamma(b_1 b_2 - b_2 b_1) = 0.$$

Необходимость. Пусть $|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $b_2 \neq 0$. Тогда имеем

$$a_1 = \frac{a_2}{b_2} b_1. \tag{1.18}$$

Положим по определению

$$\lambda := \frac{a_2}{b_2}.$$

Тогда из (1.18) вытекает следующие равенства:

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda. \tag{1.19}$$

Случай 2. Пусть $b_2 = 0$ и $b_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$a_2 b_1 = a_1 b_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{a_1}{b_1} b_2.$$

Введем число

$$\lambda := \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2.$$

Далее точно также как в первом случае приходим к следующему равенству:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda.$$

Случай 3. Пусть $b_2 = b_1 = 0$. Тогда при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ справедливо равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Определители квадратных матриц 2×2 обладают набором определенных свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

С в о й с т в о 1. Для того чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

соответствующей матрицы 2×2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

были линейно зависимы.

Доказательство.

Утверждение является непосредственным следствием леммы 1.

Свойство доказано.

Свойство 2. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}. \tag{1.20}$$

Доказательство. Является непосредственным следствием явного выражения определителя (1.7).

Свойство доказано.

Свойство 3. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1 & b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{1.21}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 b_1 + \alpha_2 c_1 \\ a_2 & \alpha_1 b_2 + \alpha_2 c_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Докажем только (1.21), поскольку (1.22) доказывается аналогичным образом. Действительно,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1 & b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) b_2 - (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2) b_1 =$$
$$= \alpha_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \alpha_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) =$$
$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Дадим определение.

Определение 2. *Функция двух вещественных переменных $f = f(x, y)$ называется полилинейной, если выполнены следующие равенства*:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \tag{1.24}$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2) \tag{1.25}$$

для любых чисел α_1, α_2 *и вещественных переменных* x, x_1, x_2, y, y_1, y_2.

ПРИМЕР 6. Например, функция $f(x,y) = xy$ является полилинейной.

Понятие полилинейности можно ввести не только для функций вещественных переменных, но и для функций от столбцов. Действительно, пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Дадим определение.

Определение 3. *Вещественная функция* $f(X,Y)$ *от двух столбцов называется полилинейной, если для любых чисел* α_1 *и* α_2 *и любых столбцов* X, X^1, X^2, Y, Y^1, Y^2 *размера* 2×1 *справедливы следующие равенства*:

$$f(\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2, Y) = \alpha_1 f(X^1, Y) + \alpha_2 f(X^2, Y), \tag{1.27}$$

$$f(X, \alpha_1 Y^1 + \alpha_2 Y^2) = \alpha_1 f(X, Y^1) + \alpha_2 f(X, Y^2). \tag{1.28}$$

ПРИМЕР 7. Самый важный для нас пример полилинейной функции — это определитель:

$$f(X,Y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1.29}$$

Докажем, например, равенство (1.27). Пусть

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, \quad X^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Справедливо равенство

$$\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 \\ \alpha_1 x_2^1 + \alpha_2 x_2^2 \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Тогда в силу свойства 3 имеем

$$f(\alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2, Y) = \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 & y_1 \\ \alpha_1 x_2^1 + \alpha_2 x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} x_1^1 & y_1 \\ x_2^1 & y_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1 \\ x_2^2 & y_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 f(X^1, Y) + \alpha_2 f(X^2, Y). \tag{1.32}$$

Поскольку определитель матрицы 2×2 является полилинейной функцией своих двух столбцов, то в дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение для определителя матрицы $A = \|A_1, A_2\|$ размера 2×2 :

$$\det A = |A| = |A_1, A_2|. \tag{1.33}$$

Тогда свойство 1 можно переформулировать так: *для того чтобы определитель* $|A| = |A_1, A_2|$ *был равен нулю, необходимо и достаточно,* *чтобы столбцы A_1 и A_2 были линейно зависимы*; свойство 2 можно переформулировать так $|A_1, A_2| = -|A_2, A_1|$; свойство 3 можно сформулировать так *определитель* $|A| = |A_1, A_2|$ *является полилинейной функцией своих столбцов*.

Заметим, что второе свойство: $|A_1, A_2| = -|A_2, A_1|$ называется свойством *кососимметричности* определителя матрицы A размера 2×2 как функции своих столбцов A_1 и A_2.

ПРИМЕР 8. Кососимметричной по y, z и полилинейной по x, y, z является функция $f(x, y, z) = x(y - z)$.

§ 2. Определитель третьего порядка

Рассмотрим следующую квадратную матрицу размера 3×3:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \|A, B, C\|, \tag{2.1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Введем понятие определителя квадратной матрицы 3×3.

Определение 4. *Определителем квадратной матрицы D размера 3×3 называется числовая функция $|D| = |A, B, C|$ столбцов A, B и C матрицы $D = \|A, B, C\|$, обладающая следующими свойствами*:

1. *числовая функция $|D| = |A, B, C|$ является полилинейной функцией столбцов A, B и C;*
2. *числовая функция $|D| = |A, B, C|$ является кососимметричной функцией столбцов A, B и C;*
3. *выполнено свойство нормировки $|D| = 1$ для столбцов*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. Отметим, что в определение определителя матрицы размера 3×3 мы положили свойства 2–4 определителя квадратной матрицы 2×2. Отметим, что из свойства 2 кососимметричности определителя вытекает важное свойство:

Лемма 2. *Если хотя бы два столбца матрицы 2×2 или 3×3 совпадают, то определитель такой матрицы равен нулю.*

Доказательство.

Для случая определителя матрицы 2×2 указанное свойство является прмым следствием формулы (1.7). Рассмотрим случай определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ размера 3×3. Пусть, например, столбцы $A = B$, тогда имеем

$$|D| = |A, A, C|.$$

В силу свойства кососимметричности определителя $|D|$ относительно столбцов матрицы D, то справедливы равенства

$$|D| = |A, B, C| = -|B, A, C| \Rightarrow |A, A, C| = -|A, A, C| \Rightarrow \\ \Rightarrow 2|A, A, C| = 0 \Rightarrow |A, A, C| = 0 \Rightarrow |A, B, C| = 0. \quad (2.3)$$

Лемма доказана.

Теперь наша задача получить явный вид определителя квадратной матрицы размера 3×3. С этой целью рассмотрим множество всех столбцов $\mathbb{K}^{3\times 1}$ длины 3, состоящих из чисел из числового поля $\mathbb{K}$. Напомним, что в нашем курсе числовое поле $\mathbb{K}$ — либо $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$. Относительно введённых ранее операций сложения столбцов и умножения столбца на числа из $\mathbb{K}$ множество $\mathbb{K}^{3\times 1}$ является линейным пространством. Введём в этом линейном пространстве так называемый канонический базис.

Определение 5. *Каноническим базисом в* $\mathbb{K}^{3\times 1}$ *называется семейство следующих трёх столбцов*:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Необходимо проверить, что это семейство столбцов действительно образуют базис в $\mathbb{K}^{3\times 1}$.

□ Действительно, семейство $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ является линейно независимым в $\mathbb{K}^{3\times 1}$, поскольку

$$\alpha^1\mathbf{e}_1 + \alpha^2\mathbf{e}_2 + \alpha^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha^1 = \alpha^2 = \alpha^3 = 0.$$

Любой столбец можно представить в виде разложения по семейству $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha^1\mathbf{e}_1 + \alpha^2\mathbf{e}_2 + \alpha^3\mathbf{e}_3. \quad \boxtimes$$

Таким образом справедливы следующие разложения по каноническому базису в $\mathbb{K}^{3\times 1}$ столбцов A, B и C :

$$A = \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad B = \sum_{\sigma_2=1}^{3} b_{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, \quad C = \sum_{\sigma_3=1}^{3} c_{\sigma_3}\mathbf{e}_{\sigma_3}. \quad (2.5)$$

Замечание 4. В равенствах (2.5) мы используем различные индексы суммирования σ_1, σ_2 и σ_3 и это существенно для нас для дальнейшего. Кроме того, мы используем нижние индексы в соответствующих суммах. Это не очень хорошо, но для первого знакомства с теорией определителей допустимо.

Теперь воспользуемся свойством полилинейности определителя как функции от столбцов и получим следующую цепочку равенств:

$$|D| = |A, B, C| = \left| \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} \mathbf{e}_{\sigma_1}, B, C \right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, B, C| = \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} \left| \mathbf{e}_{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{3} b_{\sigma_2} \mathbf{e}_{\sigma_2}, C \right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, C| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} \left| \mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \sum_{\sigma_3=1}^{3} c_{\sigma_3} \mathbf{e}_{\sigma_3} \right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} \sum_{\sigma_3=1}^{3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| . \quad (2.6)$$

Рассмотрим отдельно определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ матрицы $\|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\|$.

Наблюдение 1. $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = 0$, если хотя бы два индекса из трёх $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ совпадают.

□ Действительно, если, например, $\sigma_1 = \sigma_2$, то в определителе $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ первые два столбца совпадают. Но тогда в силу результата леммы 2 $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = 0$. ⊠

Вывод 1. В итоговой сумме (2.6) для определителя $|D|$ остаётся только следующая часть:

$$|D| = \sum_{\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} |\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| , \quad (2.7)$$

где S_3 — это конечное множество, состоящее из следующих 6 упорядоченных троек чисел:

$$\{1, 2, 3\}, \ \{2, 1, 3\}, \ \{3, 2, 1\}, \ \{1, 3, 2\}, \ \{2, 3, 1\}, \ \{3, 1, 2\}. \quad (2.8)$$

Описать конечное множество упорядоченных троек чисел S_3 можно при помощи такого понятия как *перестановка*. Но сначала рассмотрим следующий пример из классического учебника П. С. Александрова: **Боря**, **Володя** и **Шурик** сидят в лодке в определённом порядке, считая, например, от носа к корме лодки. Их можно пересадить шестью различными способами:

1. **Боря, Володя, Шурик;**
2. **Боря, Шурик, Володя;**
3. **Володя, Боря, Шурик;**
4. **Володя, Шурик, Боря;**

5. **Шурик, Володя, Боря;**
6. **Шурик, Боря, Володя.**

Теперь сопоставим Боре число 1, Володе число 2, а Шурику числу 3. Тогда упорядоченная тройка чисел $\{1, 2, 3\}$ соответствует исходному расположению Бори, Володи и Шурика в лодке. А например, число $\{2, 1, 3\}$ означает, что Боря и Володя поменялись местами, а Шурик остался на месте. Более сложная ситуация — $\{2, 3, 1\}$ означает, что Боря занял место Шурика, Шурик занял место Володи, а Володя занял место Шурика. Переход от одного порядка расположения мальчиков в лодке к другому порядку, т. е. *само действие*, называется *перестановкой.*

Обсудим теперь важный вопрос о форме записи *перестановки*. Например, перестановка может быть записана в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \textbf{Боря}, & \textbf{Володя}, & \textbf{Шурик} \\ \textbf{Володя}, & \textbf{Шурик}, & \textbf{Боря} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

— эти таблицу следует читать так, **Боря** поменялся местами с **Володей**, **Володя** с **Шуриком**, а **Шурик** с **Борей**. Отметим, что *перестановка — это операция*, т. е. *сам процесс пересаживания*, а не результат. Поэтому чтобы задать перестановку совсем не обязательно выписывать ее в виде таблицы, упорядоченной по верхнему ряду, как в (2.9), а, например, так

$$\begin{bmatrix} \textbf{Володя}, & \textbf{Боря}, & \textbf{Шурик} \\ \textbf{Шурик}, & \textbf{Володя}, & \textbf{Боря} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Теперь мы можем дать точное определение перестановки. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$ — это конечное неупорядоченное множество, состоящее из трёх чисел, т.е., например, $\{2, 1, 3\}$ — это другая форма записи того же множества N. [1])

Определение 6. *Перестановкой множества N называется взаимно однозначное отображение множества N в себя*:

$$\widehat{\sigma} : \ N \to N. \tag{2.11}$$

Обозначение. Поскольку множество $N = \{1, 2, 3\}$ — конечное, то для того чтобы задать перестановку достаточно просто указать куда отображение $\widehat{\sigma}$ переводит каждое из чисел $\{1, 2, 3\}$. Например, можно отображение $\widehat{\sigma}$ можно задать следующим образом:

$$\widehat{\sigma} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \widehat{\sigma}(1) & \widehat{\sigma}(2) & \widehat{\sigma}(3) \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \widehat{\sigma} : \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \widehat{\sigma}(2) & \widehat{\sigma}(1) & \widehat{\sigma}(3) \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

[1]) Когда мы будем считать $\{2, 1, 3\}$ упорядоченным множеством в том смысле, что число 2 является первым, число 1 — вторым, а число 3 — третьим — мы будем это особо подчеркивать.

Л е м м а 3. *На множестве $N = \{1,2,3\}$ существует ровно 6 перестановок.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Произвольная перестановка может быть записана в виде двухрядной таблицы (2.12). Подсчитаем количество вариантов заполнения второго ряда таблицы. Число $\widehat{\sigma}(1)$ может быть выбрана тремя способами — фиксируем одно из трех значений для $\widehat{\sigma}(1)$; теперь число $\widehat{\sigma}(2)$ может быть выбрано только двумя способами — фиксируем одно из двух значений для $\widehat{\sigma}(2)$; число $\widehat{\sigma}(3)$ тогда выбирается однозначно. Подсчитаем количество вариантов

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Эти шесть перестановок можно записать в виде двухрядных таблиц, для удобства упорядоченных по верхнему ряду.

$$\widehat{\varepsilon} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\widehat{\tau}_4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_5 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\tau}_6 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Кроме того, можно записать эти шесть перестановок в сокращенном виде, считая *верхний ряд таблицы упорядоченным по возрастанию*:

$$\widehat{\varepsilon} := [\ 1 \ \ 2 \ \ 3\ ], \quad \widehat{\tau}_2 := [\ 2 \ \ 1 \ \ 3\ ], \quad \widehat{\tau}_3 := [\ 3 \ \ 2 \ \ 1\ ], \tag{2.15}$$

$$\widehat{\tau}_4 := [\ 1 \ \ 3 \ \ 2\ ], \quad \widehat{\tau}_5 := [\ 2 \ \ 3 \ \ 1\ ], \quad \widehat{\tau}_6 := [\ 3 \ \ 1 \ \ 2\ ]. \tag{2.16}$$

Применяя эти шесть перестановок к упорядоченному множеству $\{1,2,3\}$ мы получим все шесть элементов (2.8) множества S_3.

Н а б л ю д е н и е 2. Среди рассмотренных шести перестановок имеется перестановка, которую естественно назвать единичной, поскольку она оставляет числа 1, 2, и 3 на своих местах:

$$\widehat{\varepsilon}: \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Н а б л ю д е н и е 3. Для этих шести перестановок определена *операция умножения.*

□ Действительно, рассмотрим две перестановки

$$\widehat{\sigma}_1 : \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_2 : \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Для этих двух перестановок имеем

$$\widehat{\sigma}_1(1) = 2, \quad \widehat{\sigma}_1(2) = 3, \quad \widehat{\sigma}_1(3) = 1, \tag{2.19}$$

$$\widehat{\sigma}_2(1) = 3, \quad \widehat{\sigma}_2(2) = 2, \quad \widehat{\sigma}_2(3) = 1. \tag{2.20}$$

Поэтому определена перестановка $\widehat{\sigma}_3 = \widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1$, которая определяется как последовательное применение перестановок $\widehat{\sigma}_1$ и $\widehat{\sigma}_2$:

$$\widehat{\sigma}_3(1) = \widehat{\sigma}_2(\widehat{\sigma}_1(1)) = \widehat{\sigma}_2(2) = 2, \tag{2.21}$$

$$\widehat{\sigma}_3(2) = \widehat{\sigma}_2(\sigma_1(2)) = \widehat{\sigma}_2(3) = 1, \tag{2.22}$$

$$\widehat{\sigma}_3(3) = \widehat{\sigma}_2(\widehat{\sigma}_1(3)) = \widehat{\sigma}_2(1) = 3. \tag{2.23}$$

Итак,

$$\widehat{\sigma}_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad \boxtimes \tag{2.24}$$

Дадим определение.

Определение 7. *Произведением двух произвольных перестановок $\widehat{\sigma}$ на $\widehat{\tau}$ называется перестановка, которая определяется следующим образом*:

$$\widehat{\sigma}\widehat{\tau} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(1)) & \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(2)) & \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}(3)) \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Наблюдение 4. Заметим, что, вообще говоря, $\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2 \neq \widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1$.

□ Действительно, вычислим $\widehat{\sigma}_4 := \widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2$ для перестановок (2.18). Имеем

$$\widehat{\sigma}_4(1) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(1)) = \widehat{\sigma}_1(3) = 1, \tag{2.26}$$

$$\widehat{\sigma}_4(2) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(2)) = \widehat{\sigma}_1(2) = 3, \tag{2.27}$$

$$\widehat{\sigma}_4(3) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{\sigma}_2(3)) = \widehat{\sigma}_1(1) = 2. \tag{2.28}$$

Итак,

$$\widehat{\sigma}_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Из сравнения (2.24) с (2.29) приходим к выводу о том, что $\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2 \neq$ $\neq \widehat{\sigma}_2\widehat{\sigma}_1$. Это свойство называется *некоммутативностью операции произведения перестановок*. ⊠

Наблюдение 5. Всегда справедливо следующее равенство $\widehat{\varepsilon}\widehat{\sigma} =$ $= \widehat{\sigma}\widehat{\varepsilon}$ для любой перестановки $\widehat{\sigma}$ и единичной перестановки $\widehat{\varepsilon}$.

Наблюдение 6. Для каждой перестановки $\widehat{\sigma}$ определена обратная перестановка $\widehat{\sigma}^{-1}$ в том смысле, что выполняются равенства

$$\widehat{\sigma}\widehat{\sigma}^{-1} = \widehat{\sigma}^{-1}\widehat{\sigma} = \widehat{\varepsilon}. \tag{2.30}$$

Более того, в обозначениях (2.13) справедливы следующие равенства:

$$\widehat{\varepsilon}^2 := \widehat{\varepsilon}\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}, \quad \widehat{\tau}_j^2 := \widehat{\tau}_j\widehat{\tau}_j = \widehat{\varepsilon} \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4, \tag{2.31}$$

$$\widehat{\tau}_5\widehat{\tau}_6 = \widehat{\tau}_6\widehat{\tau}_5 = \widehat{\varepsilon}, \tag{2.32}$$

из которых вытекает, что

$$\widehat{\varepsilon}^{-1} = \widehat{\varepsilon}, \quad \widehat{\tau}_j^{-1} = \widehat{\tau}_j \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4, \tag{2.33}$$

$$\widehat{\tau}_5^{-1} = \widehat{\tau}_6, \quad \widehat{\tau}_6^{-1} = \widehat{\tau}_5. \tag{2.34}$$

Вывод 2. Множество перестановок на множестве $N = \{1, 2, 3\}$ образуют некоммутативную группу, которая называется *симметрической группой.*

Теперь рассмотрим конечное множество S_3 и множество (2.13) и (2.14) всех перестановок на множестве $N = \{1, 2, 3\}$. Совершенно понятно, что эти два множества можно отождествить следующим образом:

$$\{1,2,3\} \leftrightarrow \widehat{\varepsilon}, \quad \{2,1,3\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_2, \quad \{3,2,1\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_3, \quad \{1,3,2\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_4, \tag{2.35}$$

$$\{2,3,1\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_5, \quad \{3,1,2\} \leftrightarrow \widehat{\tau}_6. \tag{2.36}$$

Как нетрудно заметить, что отождествления (2.35) и (2.36) основаны на результате применения той или иной перестановки к упорядоченному множеству $\{1, 2, 3\}$. Здесь мы приходим к возможности называть операцию и результат её применения к упорядоченному набору чисел $\{1, 2, 3\}$ одним и тем же названием — перестановка. В частности, введенное ранее множество S_3, состоящее из шести упорядоченных наборов чисел, мы имеем полное право называть множеством перестановок.

Для дальнейшего нам нужно ввести понятие *четной* и *нечетной* перестановок. Сначала введём операцию *транспозиции* в упорядоченном множестве $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, которая является перестановкой.

Определение 8. *Транспозицией в упорядоченном множестве* $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *называется произвольная перестановка соседних чисел.*

Определение 9. *Перестановка* $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *называется четной, если она может быть получена из перестановки* $\{1, 2, 3\}$ *четным числом транспозиций, и называется нечётной, если она может быть получена из перестановки* $\{1, 2, 3\}$ *нечётным числом транспозиций.*

Корректность определения. Строго говоря, мы должны доказать, что определение 9 корректно. Действительно, для получения последовательностью транспозиций заданной перестановки мы можем применять разное количество транспозиций и нужно доказать, что для любой фиксированной перестановки число этих перестановок либо чётное либо нечётное. Для рассмотрения этого вопроса мы отсылаем к более специальной литературе, поскольку наш курс является вводным в эту область алгебры.

Поскольку у нас число перестановок равно шести, то мы можем просто описать все *чётные* перестановки и все *нечётные* перестановки. При этом одной транспозицией можно из чётной перестановки сделать нечётную и наоборот. Поэтому число чётных перестановок совпадает с числом нечётных перестановок. Итак, всего три четные и три нечетные перестановки из S_3.

1. Перестановка $\{1, 2, 3\}$ считается чётной по определению;

2. Перестановка $\{2,1,3\}$ является нечётной, поскольку получена следующей транспозицией:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{2,1,3\};$$

3. Перестановка $\{3,2,1\}$ является нечётной, поскольку получена тремя следующими транспозициями:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\} \mapsto \{3,1,2\} \mapsto \{3,2,1\};$$

4. Перестановка $\{1,3,2\}$ является нечётной, поскольку получена одной следующей транспозицией:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\};$$

5. Перестановка $\{2,3,1\}$ является чётной, поскольку получена следующими двумя транспозициями:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{2,1,3\} \mapsto \{2,3,1\};$$

6. Перестановка $\{3,1,2\}$ является чётной, поскольку получена следующими двумя транспозициями:

$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\} \mapsto \{3,1,2\}.$$

Дадим определение знака $\operatorname{sign}\widehat{\sigma}$ перестановки $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$.

$$\operatorname{sign}\widehat{\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } \ \widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} - \text{чётная;} \\ -1, & \text{если перестановка } \ \widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} - \text{нечётная.} \end{cases} \tag{2.37}$$

Докажем следующее важное утверждение:

Л е м м а 4. *Справедливо равенство* $\operatorname{sign}(\widehat{\sigma}\widehat{\tau}) = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\operatorname{sign}\widehat{\tau}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Прежде всего заметим, что при транспозиции, очевидно, меняется чётность перестановки. Пусть перестановки $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\tau}$ можно представить в виде произведения последовательности транспозиций следующим образом:

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_n\widehat{\sigma}_{n-1}\cdots\widehat{\sigma}_1, \quad \widehat{\tau} = \widehat{\tau}_m\widehat{\tau}_{m-1}\cdots\widehat{\tau}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{\sigma}\widehat{\tau} = \widehat{\sigma}_n\widehat{\sigma}_{n-1}\cdots\widehat{\sigma}_1\widehat{\tau}_m\widehat{\tau}_{m-1}\cdots\widehat{\tau}_1. \tag{2.38}$$

Тогда согласно определению знака перестановки (2.37) имеем

$$\operatorname{sign}\widehat{\sigma} = (-1)^n, \quad \operatorname{sign}\widehat{\tau} = (-1)^m, \quad \operatorname{sign}(\widehat{\sigma}\widehat{\tau}) = (-1)^{n+m}. \tag{2.39}$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Теперь обратимся к полученной ранее формуле (2.7), которую с учетом отождествления перестановок и элементов множества S_3 можно записать в следующем виде:

$$|D| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2}c_{\sigma_3}\left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\right|. \tag{2.40}$$

Рассмотрим отдельно определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$.

Наблюдение 7. Определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ в зависимости от перестановки $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ принимает всего два значения: либо 1 либо -1.

□ Например, рассмотрим перестановку $\widehat{\sigma} = \{2, 1, 3\}$. Тогда определитель имеет следующий вид:

$$|\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3| = -\,|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = -1,$$

где мы воспользовались свойством 2 кососимметричности определителя и свойством нормировки определителя: $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = 1$. Таким образом, произвольный определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ в случае, когда $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — перестановка, отличается от определителя $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|$ только знаком. ⊠

Наблюдение 8. Справедливо следующее равенство:

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\,|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|\,, \quad \widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3. \tag{2.41}$$

□ Действительно, по аналогии с определением 8 дадим определение транспозиции в определителе матрицы D размера 3×3.

Определение 10. *Транспозицией столбцов $|A, B, C|$ определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ называется перестановка двух соседних столбцов.*

Заметим, что, с одной стороны, упорядоченная тройка столбцов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ конечным числом транспозиций столбцов может быть приведена к следующей упорядоченной тройке столбцов: $\{\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\}$, где $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — перестановка. Справедливо аналогичного содержание утверждение. Упорядоченная тройка чисел $\{1, 2, 3\}$ конечным числом транспозиций может быть приведена к следующей упорядоченной тройке чисел $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$. Эти транспозиции

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \overset{\widehat{\sigma}}{\mapsto} \{\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\},$$
$$\{1, 2, 3\} \overset{\widehat{\sigma}}{\mapsto} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

можно выбрать в точности совпадающими. Более того, пусть эта итоговая перестановка $\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ является произведением последовательности транспозиций следующего вида: [1])

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}_n \widehat{\sigma}_{n-1} \cdots \widehat{\sigma}_1. \tag{2.42}$$

Справедливо следующее очевидное равенство:

$$|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = \operatorname{sign}\{1, 2, 3\}|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|. \tag{2.43}$$

Теперь будем последовательно применять заданную последовательности транспозиций (2.42) в левой части равенства (2.43) к упорядоченной тройке столбцов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в правой части равенства (2.43) к

[1]) Очевидно, каждая транспозиция является перестановкой.

упорядоченной тройке чисел $\{1,2,3\}$. Количество этих транспозиций одно и тоже. При этом при транспозиции в определителе в левой части равенства (2.43) в силу кососимметричности меняет знак на противоположный, но и знак полученной перестановки в правой части равенства (2.43) после применения транспозиции тоже меняет знак на противоположный. Таким образом, знак равенства в выражении (2.43) после каждой транспозиции и в правой части и в левой части одновременно меняется на противоположный. В результате применения указанным образом последовательности транспозиций (2.42) мы получим искомое равенство

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = \operatorname{sign}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}\, |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| . \quad \boxtimes$$

Таким образом, из выражения (2.40) для определителя $|D|$ матрицы D и полученного равенства (2.41) мы с учетом свойства 3 нормировки определителя $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = 1$ приходим к следующему выражению для определителя:

$$|D| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\, a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3}. \tag{2.44}$$

Кроме того, знаки всех шести перестановок из S_3 нам известны:

$$\operatorname{sign}\widehat{\varepsilon} = \operatorname{sign}\{1,2,3\} = 1, \quad \operatorname{sign}\widehat{\tau}_2 = \operatorname{sign}\{2,1,3\} = -1, \tag{2.45}$$

$$\operatorname{sign}\widehat{\tau}_3 = \operatorname{sign}\{3,2,1\} = -1, \quad \operatorname{sign}\widehat{\tau}_4 = \operatorname{sign}\{1,3,2\} = -1, \tag{2.46}$$

$$\operatorname{sign}\widehat{\tau}_5 = \operatorname{sign}\{2,3,1\} = 1, \quad \operatorname{sign}\widehat{\tau}_6 = \operatorname{sign}\{3,1,2\} = 1. \tag{2.47}$$

Таким образом, из равенства (2.44) и (2.45)–(2.47) вытекает следующее равенство:

$$|D| = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2. \tag{2.48}$$

Формулы (2.44) и (2.48) называются формулами полного развёртывания определителя третьего порядка.

П р а в и л о С а р р ю с а. На рисунке указано правило вычисления произведений, входящих в формулу (2.48) со знаком «+» и входящих в формулу (2.48) со знаком «−»:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.49}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.50}$$

Со знаком «+» в формулу (2.48) входят слагаемые, полученные произведением элементов, указанных в (2.49), а со знаком «-» — входят слагаемые, полученные произведением элементов, указанных в (2.50). Можно заметить, что со знаком «+» входят слагаемые, полученные произведением элементов, расположенных на глдавной диагонали и двух «малых» диагоналей, параллельных главной, а со знаком «-» входят слагаемые, полученные произведением элементов, расположенных на побочной диагонали, и двух «малых» диагоналей, параллельных побочной.

Определитель матрицы 2×2. Заметим, что определитель матрицы 2×2 может быть записан в форме, аналогичной форме (2.44) для определителя матрицы 3×3. Прежде всего, рассмотрим множество S_2, состоящее из двух упорядоченных пар чисел

$$\{1,2\} \quad \text{и} \quad \{2,1\}. \tag{2.51}$$

Точно также как в случае определителя 3×3 мы можем ввести перестановки на неупорядоченном множестве $N = \{1,2\}$ — этих перестановок всего две:

$$\widehat{\varepsilon}: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tau_2: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.52}$$

которые можно отождествить с результатом их применения к упорядоченной паре чисел $\{1,2\}$. Точно также как и ранее вводится определение транспозиции в перестановке и знака перестановки. При этом

$$\operatorname{sign}\widehat{\varepsilon} = 1, \quad \operatorname{sign}\widehat{\tau}_2 = -1. \tag{2.53}$$

Теперь мы можем формулу (1.7) для определителя матрицы D размера 2×2 переписать в следующем эквивалентном виде:

$$|D| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\}\in S_2} \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\, a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} = |A, B|, \tag{2.54}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $n \times n$. Определитель матрицы D размера $n \times n$ при $n > 3$ вводится точно также как и определитель матрицы размера 3×3 как полилинейная, кососимметричная функция столбцов $|D| = |A_1, A_2, \ldots, A_n|$ матрицы $D = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|$, удовлетворяющая условию нормировки

$$|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = 1.$$

Далее точно также рассматривается множество S_n, состоящее из $n!$ различных упорядоченных наборов из первых n натуральных чисел, полученных перестановками из упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Знак перестановки вводится точно также как и в трехмерном случае и мы приходим к формуле полного развертывания определителя n–го порядка [1])

$$|D| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}\in S_n} \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\, a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2}\cdots a_n^{\sigma_n}, \tag{2.55}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}, \tag{2.56}$$

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad A_2 = \sum_{\sigma_2=1}^{n} a_2^{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, A_n = \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n}\mathbf{e}_{\sigma_n}, \tag{2.57}$$

причём справедливо следующее равенство, аналогичное (2.41):

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_n}| = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\,|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = \operatorname{sign}\widehat{\sigma}, \tag{2.58}$$

$$\widehat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \in S_n, \tag{2.59}$$

поскольку по третьему свойству нормировки $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = 1$.

§ 3. Свойства определителей

Докажем следующее вспомогательное утверждение:

Лемма 5. *Если $F = F(A, B, C)$ — произвольная полилинейная и кососимметрическая функция столбцов матрицы $D = \|A, B, C\|$, тогда справедливо следующее равенство*:

$$F(A, B, C) = |D| F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{3.1}$$

Доказательство.

Достаточно проследить за выводом формулы полного развертывания определителя и получить следующую формулу:

$$F(A, B, C) = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} F(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}). \tag{3.2}$$

Теперь можно доказать следующее равенство, аналогичное равенству (2.41)

$$F(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}) = \operatorname{sign}\widehat{\sigma} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{3.3}$$

Из формул (3.2) и (3.3) вытекает следующее равенство:

$F(A, B, C) =$

[1]) В этой формуле мы вынуждены перейти к правильным обозначениям и, в частности, использовать два индекса — один снизу, нумерующий столбец A_k матрицы D, и один вверху, нумерующий строчку в столбце, в которой расположен элемент.

$$= \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} \operatorname{sign}\widehat{\sigma} F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)|D|. \quad (3.4)$$

Лемма доказана.

Введём операцию транспонирования матрицы.

Определение 11. *Матрица* $A^T = \{\widetilde{a}_j^k\}_m^n$ *называется транспонированной к матрице* $A = \{a_k^j\}_n^m$, *если элементы этих матриц связаны следующим равенством*:

$$\widetilde{a}_j^k = a_k^j \quad \textit{для всех} \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}. \quad (3.5)$$

ПРИМЕР 9. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего нам понадобится явный вид для транспонированной матрицы D^T к матрице D :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 6. $|D^T| = |D|$.

Доказательство.

Введём следующие обозначения:

$$D^T = \|\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}\|,$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Согласно формулам (2.44) и (2.48) справедливы следующие равенства:

$$|D^T| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign}\widehat{\sigma}\widetilde{a}_{\sigma_1}\widetilde{b}_{\sigma_2}\widetilde{c}_{\sigma_3} =$$
$$= \widetilde{a}_1\widetilde{b}_2\widetilde{c}_3 - \widetilde{a}_2\widetilde{b}_1\widetilde{c}_3 - \widetilde{a}_3\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1 - \widetilde{a}_1\widetilde{b}_3\widetilde{c}_2 + \widetilde{a}_2\widetilde{b}_3\widetilde{c}_1 + \widetilde{a}_3\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2 =$$
$$= a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 = |D|. \quad (3.7)$$

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает следующая:

Лемма 7. *При перестановке любых строк в определителе матрицы* D *размера* 3×3 *определитель меняет знак.*

Доказательство.

В силу результата леммы 6 справедливо равенство $|D| = |D^T|$. При этом строки матрицы D являются столбцами матрицы D^T с теми же самыми номерами. При этом перестановка строк матрицы D соответствует перестановка соответствующих столбцов матрицы D^T и при этом $|D^T|$ меняет знак. Но тогда в силу равенства $|D| = |D^T|$ определитель $|D|$ тоже меняет знак.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Лемма 8. *Имеет место следующее равенство*:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.8}$$

Доказательство.

Воспользуемся формулой (2.48) полного развёртывания определителя, в которой положим $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$ и получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.7) полного развертывания определителя второго порядка.

Лемма доказана.

§ 4. Алгебраические дополнения и дополнительные миноры

Отметим, что формулы (2.44) и (2.55) полного развертывания определителей третьего и n–го порядков удобны для теоретических рассуждений, но не всегда удобны для вычисления определителей. В этом разделе мы получим рекуррентные формулы для вычисления определителей. Для этого нам понадобятся понятия *алгебраического дополнения* и *дополнительного минора*. Пусть задана матрица $D = \|A, B, C\|$, где столбцы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Разложим сначала столбец A по каноническому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$A = \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k. \tag{4.1}$$

С учётом (4.1) и определения 4 определителя третьего порядка мы приходим к следующей цепочки равенств:

$$|D| = |A, B, C| = \left|\sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k, B, C\right| = \sum_{k=1}^{3} a_k A_{a_k}, \quad A_{a_k} := |\mathbf{e}_k, B, C|. \tag{4.2}$$

Вычислим определитель A_k для каждого $k = 1, 2, 3$.

□ Действительно, имеем

$$A_{a_1} = |\mathbf{e}_1, B, C| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.3}$$

где мы воспользовались формулой (3.8). Справедлива цепочка равенств

$$A_{a_2} = |\mathbf{e}_2, B, C| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

где мы переставили местами первую и вторую строчки определителя и воспользовались результатом леммы 7. Далее, имеем

$$A_{a_3} = |\mathbf{e}_3, B, C| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{4.5}$$

где мы совершили две перестановки строк в определителе. ⊠

Итак, из формул (4.7)–(4.10) вытекает искомая *формула разложения определителя третьего порядка по первому столбцу*:

$$|D| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

З а м е ч а н и е 5. Давайте обсудим знаки в формуле (4.11) при трёх слагаемых. С этой целью заметим, что знак при определителе второго порядка в формуле (4.8) для A_{a_1} совпадает с выражением $(-1)^{1+1}$, причём элемент a_1 располагается на пересечении 1–й строчки и 1–го столбца в матрице D. Аналогичным образом убеждаемся, что в формуле (4.9) для A_{a_2} знак при определителе второго порядка совпадает с числом $(-1)^{1+2}$, причём элемент a_2 располагается на пересечении первого столбца и второй строчки в матрице D. Наконец, в формуле (4.10) для A_{a_3} знак при определителе второго порядка совпадает с числом $(-1)^{1+3}$, причём элемент a_3 располагается на пересечении первого столбца и третьей строчки.

Формулу (4.11) можно переписать в следующем виде:

$$|D| = \sum_{k=1}^{3} a_k A_{a_k}, \quad A_{a_k} := (-1)^{1+k} M_{a_k}, \tag{4.7}$$

$$M_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{a_2} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{a_3} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.8}$$

Дадим определение.

Определение 12. *Определитель A_{a_k} называется алгебраическим дополнением элемента a_k первого столбца A матрицы $D = \|A, B, C\|$, а определитель M_{a_k} называется дополнительным минором к элементу a_k.*

Правило вычисления дополнительных миноров. Для того чтобы получить дополнительный минор M_{a_1} элемента нужно из определителя третьего порядка вычеркнуть первый столбец и первую строчку. Собрать в определитель второго порядка оставшиеся элементы в том же порядке и этот определитель второго порядка и будет дополнительным минором. Аналогичным образом для того чтобы получить дополнительный минор M_{a_2} нужно из определителя третьего порядка вычеркнуть первый столбец и вторую строчку, а для того чтобы получить M_{a_3} нужно из определителя второго порядка вычеркнуть первый столбец и третью строчку:

$$M_{a_1} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{a_2} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{a_3} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Получим теперь формулы разложения определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ по второму и третьему столбцу. Сначала получим формулу разложения по второму столбцу.

$$B = \sum_{k=1}^{3} b_k \mathbf{e}_k, \quad |D| = |A, B, C| = \left| A, \sum_{k=1}^{3} b_k \mathbf{e}_k, C \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} b_k B_{b_k}, \quad B_{b_k} = |A, \mathbf{e}_k, C| = -|\mathbf{e}_k, A, C|, \tag{4.9}$$

где последнее равенство получено перестановкой первого и второго столбцов. Справедливы следующие равенства:

$$B_{b_1} = -|\mathbf{e}_1, A, C| = -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

$$B_{b_2} = -|\mathbf{e}_2, A, C| = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} B_{b_3} = -|\mathbf{e}_3, A, C| = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & a_3 & c_3 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Таким образом, из равенств (4.9)–(4.12) приходим к следующей формуле:

$$|D| = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

Введём дополнительные миноры M_{b_1}, M_{b_2} и M_{b_3} как определители матриц 2×2, полученных из матрицы D вычёркиванием соответствующих строк и столбцов, на пересечении которых располагаются элементы b_1, b_2 и b_3 второго столбца B:

$$M_{b_1} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{b_2} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{b_3} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

По аналогии с определением 12 определители B_{b_1}, B_{b_2} и B_{b_3} назовём *алгебраическими дополнениями* соответствующих элементов второго столбца матрицы D, а определители M_{b_1}, M_{b_2} и M_{b_3} назовём *дополнительными минорами* к соответствующим элементам второго столбца матрицы D. Нетрудно заметить, что имеют место следующие равенства:

$$B_{b_k} = (-1)^{2+k} M_{b_k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.14}$$

Наконец, аналогичным образом устанавливаются следующие формулы разложения определителя матрицы D по элементам третьего столбца:

$$C = \sum_{k=1}^{3} c_k \mathbf{e}_k, \quad |D| = |A, B, C| = \sum_{k=1}^{3} c_k C_{c_k}, \tag{4.15}$$

$$C_{c_k} := |A, B, \mathbf{e}_k| = -|A, \mathbf{e}_k, B| = |\mathbf{e}_k, A, B|, \tag{4.16}$$

$$C_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.17}$$

$$C_{c_2} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.18}$$

$$C_{c_3} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{4.19}$$

$$|D| = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4.20}$$

По аналогии введём дополнительные миноры M_{c_1}, M_{c_2} и M_{c_3} к соответствующим элементам последнего столбца, как определители матриц 2×2, полученных вычеркиванием столбца и строчки, на пересечении которых расположены соответствующие элементы третьего столбца C:

$$M_{c_1} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.21}$$

$$M_{c_2} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{4.22}$$

$$M_{c_3} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{4.23}$$

$$C_{c_k} = (-1)^{3+k} M_{c_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{4.24}$$

Определители C_{c_k} называются *алгебраическими дополнениями* к элементам c_k третьего столбца C, а определители M_{c_k} называются *дополнительными минорами* к соответствующим элементам третьего столбца.

Теперь наша задача получить разложение определителя матрицы D по её строчкам. Сначала получим формулу разложения определителя матрицы D по первой строчке. С этой целью воспользуемся равенством

$$|D| = |D^T|, \quad D^T = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{a}_3 & \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся формулой (4.11) разложения определителя по первому столбцу и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} |D| = |D^T| = \widetilde{a}_1 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{vmatrix} - \widetilde{a}_2 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{vmatrix} + \widetilde{a}_3 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \end{vmatrix} = \\ = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ = a_1 A_{a_1} + b_1 B_{b_1} + c_1 C_{c_1}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Аналогичным образом получаем из формул (4.13) и (4.20) получаем следующие формулы разложения определителя матрицы D по второй и третьей строчке:

$$|D| = a_2 A_{a_2} + b_2 B_{b_2} + c_2 C_{c_2}, \tag{4.26}$$

$$|D| = a_3 A_{a_3} + b_3 B_{b_3} + c_3 C_{c_3}. \tag{4.27}$$

Фальшивые разложения определителя. Рассмотрим матрицу 3×3, полученной из матрицы D заменой первого столбца столбцом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{D} = \begin{pmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\widetilde{D}$ мы разложим по первому столбцу и получим следующее равенство:

$$|\widetilde{D}| = x A_{a_1} + y A_{a_2} + z A_{a_3}. \tag{4.28}$$

Отметим, что если

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

то определитель $|\widetilde{D}| = 0$, поскольку у него в этих случаях будут два одинаковых столбца. Отсюда и из (4.28) приходим к следующим равенствам:

$$b_1 A_{a_1} + b_2 A_{a_2} + b_3 A_{a_3} = 0, \quad c_1 A_{a_1} + c_2 A_{a_2} + c_3 A_{a_3} = 0. \tag{4.30}$$

Эти равенства называются *фальшивыми разложениями* определителя. Аналогичным образом можно получить и все оставшиеся фальшивые разложения по столбцам:

$$a_1 B_{b_1} + a_2 B_{b_2} + a_3 B_{b_3} = 0, \quad c_1 B_{b_1} + c_2 B_{b_2} + c_3 B_{b_3} = 0, \tag{4.31}$$

$$a_1 C_{c_1} + a_2 C_{c_2} + a_3 C_{c_3} = 0, \quad b_1 C_{c_1} + b_2 C_{c_2} + b_3 C_{c_3} = 0. \tag{4.32}$$

Кроме того, справедливы следующие фальшивые разложения определителя по строчкам:

$$a_2 A_{a_1} + b_2 B_{b_1} + c_2 C_{c_1} = 0, \quad a_3 A_{a_1} + b_3 B_{b_1} + c_3 C_{c_1} = 0, \tag{4.33}$$

$$a_1 A_{a_2} + b_1 B_{b_2} + c_1 C_{c_2} = 0, \quad a_3 A_{a_2} + b_3 B_{b_2} + c_3 C_{c_2} = 0, \tag{4.34}$$

$$a_1 A_{a_3} + b_1 B_{b_3} + c_1 C_{c_3} = 0, \quad a_2 A_{a_3} + b_2 B_{b_3} + c_2 C_{c_3} = 0. \tag{4.35}$$

Алгебраические дополнения и дополнительные миноры в случае определителя порядка n. Рассмотрим определитель матрицы $D = \|A_1, A_2, \cdots, A_n\|$ размера $n \times n$: $|D| = |A_1, A_2, \cdots, A_n|$. Разложим k–й столбец A_k по базису

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$|D| = \left| A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j, \quad \mathcal{A}_k^j := |A_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, A_n|.$$

Теперь вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_k^j$ элемента a_k^j.

$\square$ Действительно,

$$\mathcal{A}_k^j = |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & 0 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & 0 & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & 1 & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & 0 & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Теперь многократно переставляя k–й столбец мы получим следующий определитель

$$\mathcal{A}_k^j = |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ = (-1)^{k-1}\, |\mathbf{e}_j, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Теперь многократно мы должны переставить j–ую строчку. В результате получим равенство

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой для вычисления блочной матрицы, аналогичной формуле (8), и получить следующую формулу:

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j, \tag{4.36}$$

где символом $\overline{M}_k^j$ мы обозначили *дополнительный минор* к элементу a_k^j. Черта сверху означает, что мы из определителя $\det A$ вычеркнули j–ю строчку и k–й столбец:

$$\overline{M}_k^j = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ \hline a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{array}\right|.$$

Минор $\overline{M}_k^j$ — это определитель $(n-1)$–го порядка.
Теорема 1. *Справедливы следующие формулы*:

$$|D| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \overline{M}_k^j a_k^j = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \overline{M}_k^j a_k^j. \tag{4.37}$$

Фальшивое разложение определителя порядка n. Рассмотрим определитель

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n|, \tag{4.38}$$

у которого вместо столбца A_k находится столбец B_p, который зададим его разложением по арифметическому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ следующим образом:

$$B_p = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathbf{e}_j. \tag{4.39}$$

После подстановки (4.39) в (4.38) получим равенство

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \, |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathcal{A}_k^j, \tag{4.40}$$

где $\mathcal{A}_k^j$ — это алгебраическое дополнение элемента a_k^j матрицы A.

Теперь возьмём в качестве $B_p = A_p$. Тогда если $p \neq k$ мы получим равенство

$$0 = |A_1, \ldots, A_{k-1}, A_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j,$$

поскольку в определителе два столбца равны в этом случае.

Таким образом, справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Справедливы следующие формулы*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} |D|, & \text{если} \quad p = k; \\ 0, & \text{если} \quad p \neq k. \end{cases} \tag{4.41}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^q \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} |D|, & \text{если} \quad q = j; \\ 0, & \text{если} \quad q \neq j. \end{cases} \tag{4.42}$$

§ 5. Важные теоремы об определителях

Справедлива следующая:

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы определитель квадратной матрицы* 3×3

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа α, β, γ, *не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = O, \tag{5.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 6. Выражение (5.2) эквивалентно следующим равенствам:

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Пусть выполнено равенство (5.2). Без ограничения общности предположим, что $\alpha \neq 0$, тогда справедливо следующее равенство:

$$A = -\frac{\beta}{\alpha} B - \frac{\gamma}{\alpha} C.$$

Подставим это выражение для определителя, записанного как функция от столбцов матрицы:

$$|D| = |A, B, C| = \left| -\frac{\beta}{\alpha} B - \frac{\gamma}{\alpha} C, B, C \right| = \\ = -\frac{\beta}{\alpha} |B, B, C| - \frac{\gamma}{\alpha} |C, B, C| = 0,$$

поскольку в определителях $|B, B, C|$ и $|C, B, C|$ имеются два одинаковых столбца.

Необходимость. Пусть $|D| = 0$. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $a_1 = b_1 = c_1 = 0$. Докажем, что в этом случае найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

□ Действительно, рассмотрим следующее уравнение с неизвестными x, y, z :

$$x\begin{pmatrix}0\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix}0\\a_2x+b_2y+c_2z\\a_3x+b_3y+c_3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_2x+b_2y+c_2z=0,\\a_3x+b_3y+c_3z=0.\end{cases} \tag{5.5}$$

Поскольку эта система однородных уравнений, в которой число неизвестных больше числа уравнений, то существует нетривиальное решение этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Второй случай. Пусть $|a_1|+|b_1|+|c_1|>0$. Без ограничения общности пусть $a_1\neq 0$. В противном случае мы можем переставить местами столбцы. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$0=|D|=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=|A,B,C|=\left|A,B-\frac{b_1}{a_1}A,C-\frac{c_1}{a_1}A\right|. \tag{5.6}$$

Проведём вычисления.

$$B-\frac{b_1}{a_1}A=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\\frac{b_1}{a_1}a_2\\\frac{b_1}{a_1}a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\\b_3-\frac{b_1}{a_1}a_3\end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

$$C-\frac{c_1}{a_1}A=\begin{pmatrix}0\\c_2-\frac{c_1}{a_1}a_2\\c_3-\frac{c_1}{a_1}a_3\end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Продолжим цепочку равенств (5.6).

$$0 = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 & c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ a_3 & b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 & c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 & c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 & c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{vmatrix} = a_1|D_1, D_2| \Rightarrow |D_1, D_2| = 0, \quad (5.9)$$

поскольку $a_1 \neq 0$, где

$$D_1 = \begin{pmatrix} b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix}.$$

В силу результата леммы 1 этой лекции найдутся такие числа β и γ, не равные одновременно нулю, что

$$\beta D_1 + \gamma D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\left(b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2\right) + \gamma\left(c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2\right) = 0, \\ \beta\left(b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3\right) + \gamma\left(c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3\right) = 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Но тогда будет выполнено следующее равенство тоже

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Заметим, что

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \beta\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = \beta\left[B - \frac{b_1}{a_1}A\right], \quad (5.12)$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \gamma\left[C - \frac{c_1}{a_1}A\right]. \quad (5.13)$$

Таким образом, в силу равенств (5.11)–(5.13) вытекает следующее равенство:

$$\beta\left[B - \frac{b_1}{a_1}A\right] + \gamma\left[C - \frac{c_1}{a_1}A\right] = O, \quad (5.14)$$

из которого вытекает равенство

$$\alpha A+\beta B+\gamma C=O, \quad \alpha=-\frac{b_1}{a_1}\beta-\frac{c_1}{a_1}\gamma, \tag{5.15}$$

причём $|\beta|+|\gamma|>0$ и тем более $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0$.

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является следующая:

Лемма 9. *Для того чтобы однородная система уравнений $DX=O$ имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы $|D|=0$.*

Доказательство.

В силу результата леммы **??** необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения у однородной системы уравнений — это линейная зависимость столбцов матрицы $D=\|A,B,C\|$, что в силу теоремы 3 эквивалентно равенству $|D|=0$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Теорема 4. *Если $A=\|A_1,A_2,A_3\|$ и $B=\|B_1,B_2,B_3\|$ — две квадратные матрицы размера 3×3, то $|AB|=|A||B|$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам удобно использовать два индекса в формуле (2.55) полного развертывания определителя. Итак, пусть

$$A=\|A_1,A_2,A_3\| \quad \text{и} \quad B=\|B_1,B_2,B_3\|,$$

$$A_1=\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ b_1^3 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ b_2^3 \end{pmatrix}, \quad B_3=\begin{pmatrix} b_3^1 \\ b_3^2 \\ b_3^3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $C:=AB$, тогда согласно известному результату первой лекции имеем

$$C=\|C_1,C_2,C_3\|, \quad C_k=AB_k=\sum_{\sigma_k=1}^{3}A_{\sigma_k}b_k^{\sigma_k} \quad \text{при} \quad k=1,2,3. \tag{5.16}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$|C|=|C_1,C_2,C_3|=\left|\sum_{\sigma_1=1}^{3}A_{\sigma_1}b_1^{\sigma_1},\sum_{\sigma_2=1}^{3}A_{\sigma_2}b_2^{\sigma_2},\sum_{\sigma_3=1}^{3}A_{\sigma_3}b_3^{\sigma_3}\right|=$$

$$=\sum_{\sigma_1=1}^{3}\sum_{\sigma_2=1}^{3}\sum_{\sigma_3=1}^{3}b_1^{\sigma_1}b_2^{\sigma_2}b_3^{\sigma_3}\left|A_{\sigma_1},A_{\sigma_2},A_{\sigma_3}\right|. \tag{5.17}$$

При выводе этого равенства мы воспользовались полилинейностью определителя, а в силу кососимметричности определителя имеем

$$|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| = 0 \quad \text{для всех} \quad \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \tag{5.18}$$

с повторениями, поскольку тогда в этом определителе будет по меньшей мере два одинаковых столбца. Следовательно, точно также как и при выводе формулы полного развёртывания определителя из (5.17) приходим к следующей формуле:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} \, |A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| \,. \tag{5.19}$$

Точно также как при доказательстве формулы (2.41) приходим к равенству

$$|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| = \operatorname{sign} \widehat{\sigma} \, |A_1, A_2, A_3| \,. \tag{5.20}$$

Следовательно, из формул (5.19) и (5.20) вытекает следующая цепочка равенств:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \\ = |A_1, A_2, A_3| \sum_{\widehat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign} \widehat{\sigma} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} = |A||B|. \tag{5.21}$$

Теорема доказана.

§ 6. Обратная матрица

Справедлива следующая:

Теорема 5. *Квадратная матрица D размера 3×3 обратима, тогда и только тогда, когда $|D| \neq 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица D обратима и D^{-1} — обратная. Тогда имеет место следующее равенство:

$$DD^{-1} = I_3 \Rightarrow |D||D^{-1}| = |I_3| = 1 \Rightarrow |D| \neq 0. \tag{6.1}$$

Достаточность. Пусть $|D| \neq 0$ и матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Рассмотрим матрицу $D^\vee$, составленную из соответствующих алгебраических дополнений к элементам матрицы D^T :

$$D^\vee = \begin{pmatrix} A_{a_1} & A_{a_2} & A_{a_3} \\ B_{b_1} & B_{b_2} & B_{b_3} \\ C_{c_1} & C_{c_2} & C_{c_3} \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$DD^\vee = D^\vee D = |D| I_3. \tag{6.4}$$

□ Действительно, докажем, например, равенство $DD^{\vee} = |D| I_3$. В силу (4.7), (4.9), (4.15), (4.25)–(4.27), (4.30)–(4.35) справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered}
\{DD^{\vee}\}_1^1 = a_1 A_{a_1} + b_1 B_{b_1} + c_1 C_{c_1} = |D|,\\
\{DD^{\vee}\}_2^1 = a_1 A_{a_2} + b_1 B_{b_2} + c_1 C_{c_2} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}_3^1 = a_1 A_{a_3} + b_1 B_{b_3} + c_1 C_{c_3} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}_1^2 = a_2 A_{a_1} + b_2 B_{b_1} + c_2 C_{c_1} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}_2^2 = a_2 A_{a_2} + b_2 B_{b_2} + c_2 C_{c_2} = |D|,\\
\{DD^{\vee}\}_3^2 = a_2 A_{a_3} + b_2 B_{b_3} + c_2 C_{c_3} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}_1^3 = a_3 A_{a_1} + b_3 B_{b_1} + c_3 C_{c_1} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}_2^3 = a_3 A_{a_2} + b_3 B_{b_2} + c_3 C_{c_2} = 0,\\
\{DD^{\vee}\}_3^3 = a_3 A_{a_3} + b_3 B_{b_3} + c_3 C_{c_3} = |D|. \quad \boxtimes
\end{gathered}$$

Итак, если $|D| \neq 0$, то обратная матрица существует и имеет следующий вид:

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} D^{\vee} \Rightarrow |D^{\vee}| = |D|^2.$$

Теорема доказана.

Формулы Крамера. Справедлива следующая важная теорема, которая носит название формулы Крамера вычисления решения системы трёх уравнений относительно трёх переменных:

Теорема 6. *Если определитель*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6.5}$$

то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3, \end{cases} \tag{6.6}$$

имеет единственное решение этой системы уравнений, которое имеет следующий вид:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{6.7}$$

Доказательство.

Сейчас ограничимся доказательством единственности. Именно,докажем, что если решение существует, то оно даётся указанными формулами. Запишем систему уравнений (6.6) в следующем эквивалентном виде:

$$xA + yB + zC = d, \quad D = \|A, B, C\|, \tag{6.8}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} |d, B, C| &= |xA + yB + zC, B, C| = \\ &= x\,|A, B, C| + y\,|B, B, C| + z\,|C, B, C| = x\,|A, B, C|\,, \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned} |A, d, C| &= |A, xA + yB + zC, C| = \\ &= x|A, A, C| + y|A, B, C| + z|A, C, C| = y|A, B, C|, \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} |A, B, d| &= |A, B, xA + yB + zC| = \\ &= x|A, B, A| + y|A, B, B| + z|A, B, C| = z|A, B, C|. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Поскольку при $|D| \neq 0$ решение рассматриваемой системы уравнений существует, а значит имеет вид (6.7).

Теорема доказана.

§ 7. Необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов

Справедлива следующая важная:

Теорема 7. *Для того чтобы два вектора* $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ *и* $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, *заданные координатами относительно общей декартовой системе координат в пространстве* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.1}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны. Тогда они линейно зависимы и поэтому найдутся такие числа α_1 и α_2, что выполнено равенство

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0, \tag{7.2}$$

которое в координатах можно переписать в следующем виде:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{7.3}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис, то из (7.3) вытекают следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0, \tag{7.4}$$

которые можно переписать в виде равенств для столбцов

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Но тогда из леммы 1 вытекает, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.8}$$

Осталось воспользоваться равенством $|D^T| = |D|$.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (7.1). Если все числа $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, то вектор $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ и поэтому коллинеарен любому вектору, в частности, вектору $\mathbf{a}_2$. Пусть теперь хотя бы одно число из трёх отлично от нуля. Пусть, например, $x_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_2 = \frac{x_2}{x_1} y_1 \Leftrightarrow \lambda := \frac{x_2}{x_1}, \quad x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1. \tag{7.9}$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_2 x_1 = z_1 x_2 \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1. \tag{7.10}$$

Итак, имеем

$$\mathbf{a}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3 = \lambda (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3) = \lambda \mathbf{a}_1. \tag{7.11}$$

Значит, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Справедливо следующее важное следствие:

Л е м м а 10. *Для того чтобы два вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на плоскости, заданные координатами $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2\}$ относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на плоскости, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим общую декартову систему координат в пространстве $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к рассматриваемой плоскости. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ имеют координаты

$$\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, 0\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, 0\}.$$

Осталось теперь применить результат теоремы 7 при $z_1 = z_2 = 0$ и получить утверждение леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая:

Теорема 8. *Для того чтобы три вектора* $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$, *заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.13}$$

Доказательство.

Как нами было ранее доказано, три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ компланарны, тогда и только тогда, когда найдутся такие числа α_1, α_2 и α_3, что

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0. \tag{7.14}$$

Из (7.14) вытекает следующее равенство:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\mathbf{e}_1 + \\ + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{7.15}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис, то из (7.15) вытекают следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \\ = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0, \tag{7.16}$$

которые можно переписать в виде столбцов

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0. \tag{7.17}$$

Из результата теоремы 3 вытекает, что равенство (7.17) эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Осталось воспользоваться равенством $|D^T| = |D|$.

Лемма доказана.