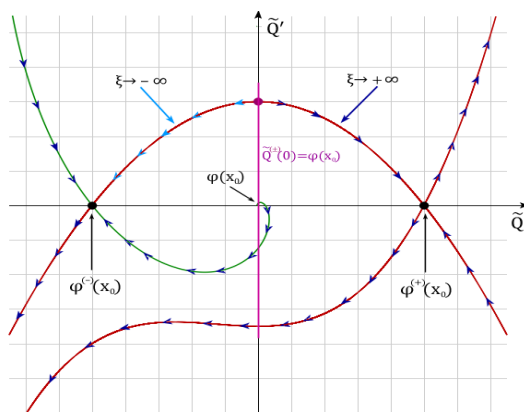
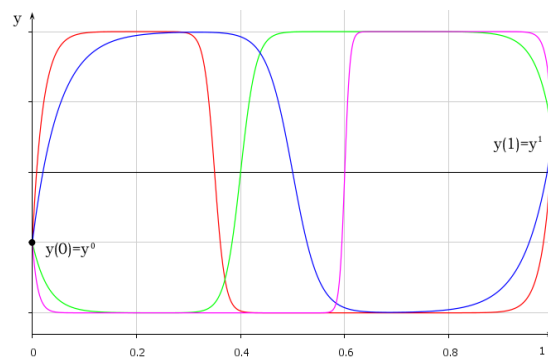
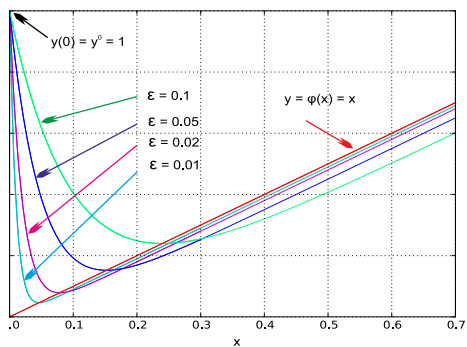


# Асимптотические методы в примерах и задачах

В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов,  
В.Т. Волков, Н.Т. Левашова, Е.В. Полежаева



## Содержание

<b>Глава 1. Введение</b>	<b>3</b>
§1. Понятие об асимптотических методах . . . . .	3
§2. Асимптотический ряд и формальная асимптотика . . . . .	3
§3. Регулярные и сингулярные возмущения . . . . .	5
§4. Асимптотическое приближение по малому параметру реше- ний дифференциальных уравнений . . . . .	8
<b>Глава 2. Задача Коши для сингулярно возмущенного диф- ференциального уравнения</b>	<b>14</b>
§1. Предварительные замечания . . . . .	14
§2. Теорема А.Н. Тихонова . . . . .	15
§3. Метод пограничных функций А.Б. Васильевой . . . . .	20
§4. Алгоритм построения асимптотического приближения для сингулярно возмущенного уравнения . . . . .	22
<b>Глава 3. Краевая задача</b>	<b>34</b>
§1. Асимптотика решения краевой задачи с пограничными слоями	34
§2. Асимптотика решения краевой задачи с внутренним пере- ходным слоем (контрастная структура) . . . . .	47
<b>Глава 4. Нестационарные контрастные структуры: движение фронтов</b>	<b>62</b>
§1. Движущиеся фронты в уравнении реакция-диффузия: пред- варительные замечания . . . . .	62
§2. Движущиеся фронты в уравнении реакция-диффузия: ал- горитм построения асимптотического приближения . . . . .	63
§3. Движущиеся фронты в задачах с адвекцией . . . . .	74
<b>Список литературы</b>	<b>75</b>

## Глава 1. Введение

### §1. Понятие об асимптотических методах

Рассмотрим две задачи. Задача  $A_0 : L_0 u = f_0$  — невозмущенная задача (упрощенная модель),  $L_0$  — заданный оператор,  $f_0$  заданная функция,  $u = u(x)$ ,  $x \in D$  — искомая функция.

Задача  $A_\varepsilon : L_0 u + \varepsilon L_1 u = f_0 + \varepsilon f_1$  — задача с возмущениями оператора ( $\varepsilon L_1$ ) и правой части ( $\varepsilon f_1$ ) (расширенная модель),  $\varepsilon$  — малый параметр, в дальнейшем считаем  $\varepsilon > 0$ .

Пусть  $u_\varepsilon(x)$ ,  $x \in D$  — решение задачи  $A_\varepsilon$ ;  $D_1$  — подобласть области  $D$  (в частности,  $D_1 = D$ ), Функция  $U(x, \varepsilon)$  определена в  $D_1$ .

**Определение.** Функция  $U(x, \varepsilon)$  называется асимптотическим приближением для  $u_\varepsilon(x)$  в  $D_1$ , если:

$$\sup_{x \in D_1} \|u_\varepsilon(x) - U(x, \varepsilon)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$$

Если при этом  $\sup_{x \in D_1} \|u_\varepsilon(x) - U(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^k)$ , то говорят, что функция  $U(x, \varepsilon)$  является асимптотическим приближением для  $u_\varepsilon(x)$  в  $D_1$  с точностью порядка  $\varepsilon^k$ . Запись  $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$  означает, что  $\exists$  числа  $c > 0$  и  $\varepsilon_0 > 0$ , такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  выполняется неравенство  $\|\alpha(\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^2$ .

Под *асимптотическим методом* понимается тот или иной способ построения асимптотического приближения  $U(x, \varepsilon)$  для решения  $u_\varepsilon(x)$  задачи  $A_\varepsilon$ . Как правило, построение  $U(x, \varepsilon)$  проводится с помощью решения более простых задач, чем исходная задача  $A_\varepsilon$ .

### §2. Асимптотический ряд и формальная асимптотика

Очень часто для получения асимптотического приближения решения  $u_\varepsilon(x)$  задачи  $A_\varepsilon$  строится ряд по степеням  $\varepsilon$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon) \tag{1}$$

(где  $u_k(x, \varepsilon)$  — ограниченные функции), такой, что  $n$ -ая частичная сумма ряда

$$U_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon), \quad n = 1, 2, \dots$$

является асимптотическим приближением для решения  $u_\varepsilon(x)$  в области  $D$  с точностью порядка  $\varepsilon^{n+1}$ , т.е.

$$\sup_{x \in D} \|u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{2}$$

**Определение.** Ряд (1), удовлетворяющий условию (2), называется *асимптотическим рядом* для функции  $u_\varepsilon(x)$  (или асимптотическим разложением функции  $u_\varepsilon(x)$ ) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в области  $D$ .

Асимптотический метод — это, как правило, способ (алгоритм) построения асимптотического ряда для решения  $u_\varepsilon(x)$  задачи  $A_\varepsilon$ . Отметим важный момент: асимптотический ряд (1) может не сходиться к функции  $u_\varepsilon(x)$  и даже может быть расходящимся. В самом деле, сходимость ряда (1) к функции  $u_\varepsilon(x)$  означает, что

$$\|u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

Асимптотический ряд (1) по определению удовлетворяет условию (2), т.е.  $\forall n \exists c > 0, \varepsilon_0 > 0 : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и выполняется неравенство:

$$\sup_{x \in D} \|u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1} \quad (4)$$

Хотя и сомножитель  $\varepsilon^{n+1}$  в правой части (4) стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  (если  $0 < \varepsilon < 1$ ), тем не менее, из неравенства (4) не следует условие (3), поскольку  $c = c(n)$  зависит от  $n$ , и эта зависимость может быть такой, что  $c(n)\varepsilon^{n+1}$  не стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Пример задачи, для которой асимптотический ряд не является сходящимся, приведен в [1].

Сформулируем еще одно определение. Рассмотрим задачу

$$A_\varepsilon : L_\varepsilon u := L_0 u + \varepsilon L_1 u - (f_0 + \varepsilon f_1) = 0, \quad x \in D$$

Пусть функция  $U(x, \varepsilon)$  удовлетворяет условию  $L_\varepsilon U = \delta(x, \varepsilon)$ , где  $\sup_{x \in D} \|\delta(x, \varepsilon)\| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Определение.** Функция  $\delta(x, \varepsilon)$  называется *невязкой*, а про функцию  $U(x, \varepsilon)$  говорят, что она является *асимптотическим приближением по невязке* для решения задачи  $A_\varepsilon$ . Функцию  $U(x, \varepsilon)$  называют также *формальной асимптотикой*.

Во многих сингулярно возмущенных задачах сначала строят ряд (1), который удовлетворяет условию: его частичная сумма  $U_n(x, \varepsilon)$  является асимптотическим решением задачи по невязке, причем невязка  $\delta_n(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ , а затем доказывают, что существует точное решение  $u_\varepsilon(x)$  задачи  $A_\varepsilon$ , для которого ряд (1) является асимптотическим рядом.

Следует отметить, важный момент: из того, что  $L_\varepsilon U = \delta(x, \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  не следует, что  $U(x, \varepsilon)$  является асимптотическим приближением  $u_{\varepsilon 0}(x)$  задачи  $A_\varepsilon$ . Приведем простой пример:

$$A_\varepsilon : \varepsilon \frac{du}{dx} = u + \varepsilon^n, \quad 0 \leq x \leq a, \quad u(0, \varepsilon) = 0.$$

Точное решение задачи  $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^n \cdot \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^n$ . Функция  $U(x, \varepsilon) = 0$  является асимптотическим приближением по невязке (формальной асимптотикой):

$$L_\varepsilon U = \varepsilon \frac{dU}{dx} - U - \varepsilon^n = -\varepsilon^n \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , причем невязка  $\delta = O(\varepsilon^n)$ .

Вместе с тем,  $u_\varepsilon - U(x, \varepsilon) = \varepsilon^n \cdot \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^n \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0 \forall x > 0$ , т.е. ни на каком промежутке  $0 < x \leq a$  функция  $U(x, \varepsilon) = 0$  не является асимптотическим приближением для решения  $u_\varepsilon(x)$  задачи  $A_\varepsilon$ .

### §3. Регулярные и сингулярные возмущения

При построении математических моделей физических объектов, характеризующихся различными масштабами по пространству, либо различными скоростями протекающих в системе процессов, часто возникают задачи, содержащие малые параметры. В этих случаях естественно поставить вопрос: если упростить математическую модель, положив малый параметр равным нулю (т.е. пренебречь влиянием некоторых процессов или составных частей физической системы), получим ли мы решение, приближенно описывающее исходный объект моделирования?

Рассмотрим 2 примера.

*Пример 1.* Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\varepsilon y + 1, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

$0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр, точным решением которой является функция  $y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x}$ .

В данном случае слагаемое  $\varepsilon y$  можно считать малой добавкой к *вырожденной* (т.е. при  $\varepsilon = 0$ ) задаче,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 1 \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

решением которой является  $\bar{y}(x) = x$ .

Давайте сравним эти решения. Для этого разложим точное решение в ряд по параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^2 - \frac{1}{6} \varepsilon^3 x^3 + \dots \right) = \\ &= x - \frac{1}{2} \varepsilon x^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что на любом конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$  разность

$$y(x, \varepsilon) - \bar{y}(x) = -\frac{1}{2}\varepsilon x^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 x^3 + \dots \quad \xrightarrow{\quad} \quad 0$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , т.е. решение вырожденного уравнения *равномерно* близко к точному на любом конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$ .

*Пример 2.* Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= -y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

решением которой является функция  $y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ .

Если же положить  $\varepsilon = 0$ , то получим *вырожденное уравнение*

$$f(x, y, 0) \equiv -y = 0,$$

решение которого  $\bar{y}(x) \equiv 0$  не близко к точному решению  $y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$  в окрестности точки  $x = 0$ . Таким образом, решение вырожденного уравнения не будет равномерно близко к точному ни на каком конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$ .

Характерной особенностью подобных задач является наличие *пограничного слоя*, т.е. области вблизи начальной (или внутренней) точки, где происходит очень резкое изменение решения (см. рис. 1).

Сформулируем общее определение. Пусть математическая модель в некоторой области  $D$  изменения переменных описывается уравнением

$$L_\varepsilon y = 0, \tag{5}$$

где оператор  $L_\varepsilon$  зависит от малого параметра  $\varepsilon$ . Обозначим решение этой задачи  $y_\varepsilon$ .

Положив параметр  $\varepsilon$  равным нулю, получим *вырожденное* (т.е. при  $\varepsilon = 0$ ) *уравнение*  $L_0 y = 0$ , решение которого обозначим  $\bar{y}$ .

**Определение.** Задача (5) называется *регулярно возмущенной*, если решение  $\bar{y}$  вырожденного уравнения  $L_0 y = 0$  дает равномерное в области  $D$  приближение для решения  $y_\varepsilon$  задачи (5). В противном случае задача (5) называется *сингулярно возмущенной*.

Примером регулярно возмущенной задачи является задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$ , малый параметр  $\varepsilon$  в котором находится в правой части, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(y, x, \varepsilon) \\ y(0, \varepsilon) &= y^0, \end{aligned} \tag{6}$$

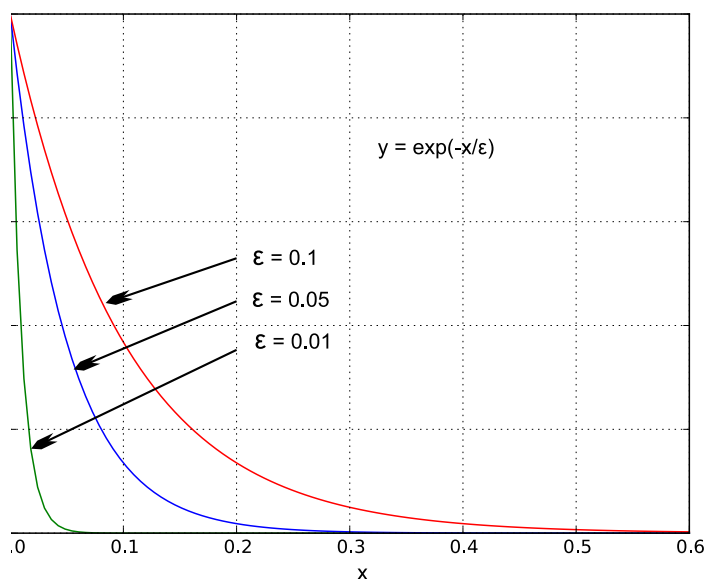


Рис. 1. Пограничный слой.

где  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$  - малый параметр.

Если же малый параметр входит в уравнение как множитель при производной (старшей производной), например

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= f(y, x, \varepsilon) \\ y(0, \varepsilon) &= y^0, \end{aligned} \quad (7)$$

то вырожденной уравнение  $f(y, x, 0) = 0$  уже не будет дифференциальным, и его решение  $\bar{y}(x)$ , вообще говоря, не удовлетворяет начальному условию, т.е. не дает равномерного на всем отрезке  $0 \leq x \leq H$  приближения для решения задачи (7).

*Замечание* (о геометрическом смысле термина “сингулярное возмущение”). Так как параметр  $\varepsilon$  считается достаточно малым, то левую часть уравнения (7) можно рассматривать как некоторое “малое” возмущение к вырожденной задаче  $f(y, x, 0)$ , решение которой получить существенно проще, чем решение полной задачи (7). Возникает вопрос: будет ли это решение близко к точному решению (7)? Как установлено выше, искомая близость имеет место, если исключить некоторую окрестность начальной точки. Таким образом, отличие точного решения от решения вырожденного уравнения носит сингулярный характер и проявляется лишь в окрестности одной точки.

В случае же регулярного возмущения, решения задач при  $\varepsilon = 0$  (невозмущенной) и при малых  $\varepsilon > 0$  (возмущенной) равномерно близки на сегменте, включающем начальную точку.

#### §4. Асимптотическое приближение по малому параметру решения дифференциального уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(y, x, \varepsilon), \quad 0 < x \leq H, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ y(0, \varepsilon) &= y^0(\varepsilon), \end{aligned} \quad (8)$$

Полагая  $\varepsilon = 0$ , получим *вырожденную* задачу

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(y, x, 0) \\ y(0) &= y^0, \end{aligned} \quad (9)$$

решение которой  $\bar{y}(x)$ , как было отмечено выше, дает равномерное на отрезке  $0 \leq x \leq H$  приближение решения задачи (8), т.е.  $|y(x, \varepsilon) - \bar{y}(x)| = \alpha(\varepsilon)$ , где  $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Чтобы уточнить полученное приближение, будем искать решение задачи (8) в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots \quad (10)$$

Подставим это разложение в (8) и представим правую часть уравнения (8) и начальное условие также в виде рядов по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} + \varepsilon \frac{dy_1}{dx} + \dots &= f(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots, x, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv f(y_0, x, 0) + \varepsilon [f_y(y_0, x, 0) \cdot y_1(x) + f_\varepsilon(y_0, x, 0)] + \dots \end{aligned}$$

$$y^0 = y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \dots$$

Приравнивая теперь члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  в правых и левых частях уравнения и начального условия в (8), получим последовательность задач для определения функций  $y_i(x)$  в (10).

$$\varepsilon^0 : \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dy_0}{dx} &= f(y_0, x, 0) \\ y_0(0) &= y^0. \end{aligned}$$

Эта задача совпадает с (9). Потребуем, чтобы ее решение  $y_0(x) = \bar{y}(x)$  существовало на отрезке  $0 \leq x \leq H$  и было единственным. Далее,



$$\varepsilon^1 : \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_y(y_0(x), x, 0) \cdot y_1 + f_\varepsilon(y_0(x), x, 0) \\ y_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Задача для  $y_1(x)$  является линейной и ее решение может быть получено в квадратурах, например, методом вариации постоянной.

Аналогично находятся следующие члены ряда (10), причем задачи для  $y_n(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$  также будут линейными:

$$\varepsilon^n : \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dy_n}{dx} &= f_y(y_0(x), x, 0) \cdot y_n + f_n(x) \\ y_n(0) &= 0. \end{aligned}$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть:

1. в некоторой области  $D = \{|y| < b, 0 \leq x \leq H, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$  пространства переменных  $(y, x, \varepsilon)$  функция  $f(y, x, \varepsilon)$  является непрерывной вместе со всеми частными производными до  $n + 1$ -го порядка;
2. вырожденная задача (9) имеет на отрезке  $0 \leq x \leq H$  единственное решение  $y_0(x)$ .

Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ) на сегменте  $0 \leq x \leq H$  существует единственное решение  $y = y(x, \varepsilon)$  задачи (8), причем имеет место оценка

$$|y(x, \varepsilon) - Y_n(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1},$$

где  $C > 0$  – некоторая постоянная, не зависящая от параметра  $\varepsilon$ , а  $Y_n(x, \varepsilon)$  – частичная сумма ряда (10).

Доказательство этой теоремы мы не приводим. Его можно найти, например, в книге А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова “Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений” [2]. Далее проиллюстрируем результат на конкретных примерах.

Вернемся к примерам.

*Пример 1.* Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\varepsilon y + 1, \\ y(0) &= 0 \end{aligned},$$

$0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр.

Для точного решения уже было получено асимптотическое разложение:

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} = x - \frac{1}{2} \varepsilon x^2 + \frac{1}{6} \varepsilon^2 x^3 + \dots$$

Теперь попробуем получить этот результат, не выписывая точное решение. Будем строить решение в виде ряда по параметру  $\varepsilon$ :

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Подставляя этот ряд в правую часть уравнения и в начальное условие, и приравнивая теперь коэффициенты при степенях параметра в правой левой частях уравнения и начального условия, получаем последовательность задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \rightarrow \begin{cases} \frac{dy_0}{dx} = 1 \\ y_0(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = x; \\ \varepsilon^1 : \quad & \rightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_0(x) = -x \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = -\frac{x^2}{2}; \\ \varepsilon^2 : \quad & \rightarrow \begin{cases} \frac{dy_2}{dx} = -y_1(x) = \frac{x^2}{2} \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = \frac{x^3}{6}; \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Таким образом, решение исследуемой задачи (первые 3 члена ряда по степеням параметра  $\varepsilon$ ) имеет вид

$$y(x, \varepsilon) = x - \varepsilon \frac{x^2}{2} + \varepsilon^2 \frac{x^3}{6} + \dots,$$

что, как легко видеть, совпадает разложением в ряд Маклорена точного решения.

*Замечание 1.* Если рассматривать задачу не на конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$ , а на асимптотически большом (порядка  $\frac{1}{\varepsilon}$ ), или бесконечном промежутке, то предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = y_0(x)$  уже может не быть равномерным по  $x$ .

*Замечание 2.* Предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = y_0(x)$ , о котором говорится в теореме 1, имеет место на конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$ , где  $H$  – некоторая постоянная, причем на указанном множестве это предельный переход является равномерным относительно  $x \in [0, H]$ . Таким образом, в случае регулярного возмущения решение вырожденного уравнения дает равномерное на отрезке приближение для точного решения.

Однако, в случае сингулярного возмущения это не так и, более того, решение вырожденного уравнения может быть вообще не близко к точному решению.

*Пример 2.* Рассмотрим другую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= -y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

решением которой является функция  $y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ .

Если же положить  $\varepsilon = 0$ , то получим вырожденное уравнение

$$f(x, y, 0) \equiv -y = 0,$$

решение которого  $\bar{y}(x) \equiv 0$  уже не близко к точному решению  $y(x, \varepsilon) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$  в окрестности точки  $x = 0$ . Таким образом, получить асимптотическое приближение решения, действуя описанным выше способом, невозможно.

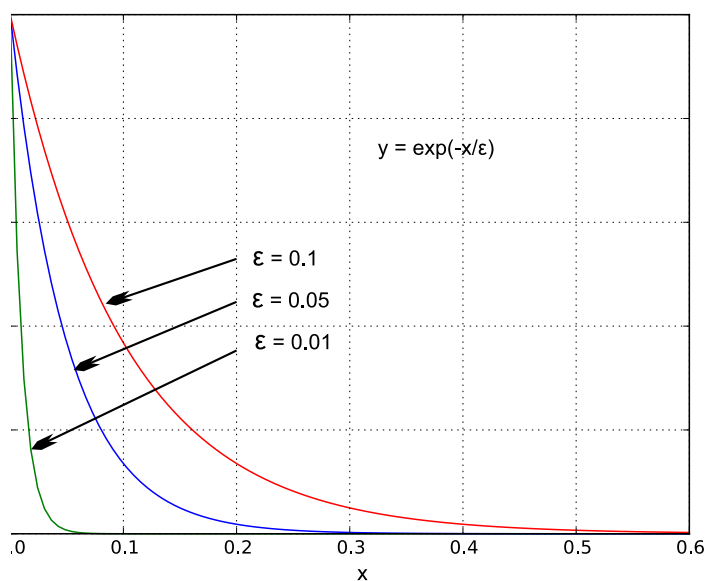


Рис. 2.

Возникают вопросы:

1. при каких условиях решение вырожденного уравнения близко к точному;

2. как получить асимптотическое приближение решения по малому параметру.

Соответствующие задачи рассмотрены в главе 2, где сформулированы ответы на эти вопросы.

*Пример 3.* Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0, & 0 < x \leq H \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1, \end{aligned}$$

точное решение которой  $y(x) = \sin x$ . Внесем в уравнение малое регулярное возмущение

$$\begin{aligned} y'' + y + (2\varepsilon + \varepsilon^2)y &= 0, & 0 < x \leq H \\ y(0, \varepsilon) &= 0, \quad y'(0, \varepsilon) = 1, \end{aligned} \tag{11}$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр, и будем строить приближенное решение задачи Коши (11) на отрезке  $0 \leq x \leq H$  в виде ряда

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots$$

Подставляя записанный ряд в уравнение и начальное условие, и приравнявая коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , получим последовательность задач для определения членов ряда:

$$\varepsilon^0 : \rightarrow \begin{aligned} y_0'' + y_0 &= 0 \\ y_0(0) &= 0, \quad y_0'(0) = 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_0(x) = \sin x$$

$$\varepsilon^1 : \rightarrow \begin{aligned} y_1'' + y_1 + 2y_0 &\equiv y_1'' + y_1 + 2\sin x = 0 \\ y_1(0) &= 0, \quad y_1'(0) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) = -\sin x + x \cos x$$

$$\varepsilon^2 : \rightarrow \begin{aligned} y_2'' + y_2 + 2y_1 + y_0 &= 0 \\ y_2(0) &= 0, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) = \sin x - x \cos x - \frac{x^2}{2} \sin x$$

.....

Легко видеть, что функция  $y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) = \sin x + \varepsilon(-\sin x + x \cos x) + \varepsilon^2(\sin x - x \cos x - \frac{x^2}{2} \sin x)$  удовлетворяет уравнению и начальным условиям с точностью  $O(\varepsilon^2)$ .

Точное решение задачи (11) есть  $y(x, \varepsilon) = \frac{\sin(1 + \varepsilon)x}{1 + \varepsilon}$ . Убедитесь сами, что первые три члена асимптотического разложения указанной функции по малому параметру  $\varepsilon$  совпадают с полученным выше приближенным решением, т.е. частичная сумма построенного ряда дает равномерное на конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$  приближение для точного решения.

*Замечание.* В рассмотренном примере 3, как точное решение возмущенного уравнения, так и решение вырожденного уравнения являются периодическими функциями (периоды – соответственно  $\frac{2\pi}{\varepsilon + 1}$  и  $2\pi$  – асимптотически близки). Однако полученное нами асимптотическое приближение содержит малые непериодические слагаемые вида  $\varepsilon x \cos x$  и  $\varepsilon^2 x^2 \sin x$ , т.е. уже не является периодической функцией! Это означает, что рассмотренный способ построения асимптотического ряда дает равномерное приближение для решения начальной задачи лишь на конечном отрезке  $0 \leq x \leq H$ , но не может быть использован для получения равномерного приближения периодического решения.

В случае периодической задачи нужно использовать другие подходы, например, *метод усреднения* Крылова-Боголюбова, с которым можно ознакомиться, например, в книге Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского “Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний”.

## Глава 2. Задача Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения

### §1. Предварительные замечания

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= x - y, & x \in (0, H] \\ y(0) &= 1 + 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

Ее точное решение

$$y(x) = (1 + 4\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + x - \varepsilon$$

при  $\varepsilon \rightarrow +0$  стремится к решению  $y_0(x) = x$  вырожденного уравнения при  $x \in (0, H]$ , где  $H > 0$ — любое, причем равномерно при  $0 < x_0 \leq x \leq H$ . Оказывается, такая ситуация не всегда имеет место.

Рассмотрим другую задачу

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = x + y; \quad y(0) = 1 + 3\varepsilon, \quad (13)$$

точным решением которой является

$$y(x) = (1 + 4\varepsilon)e^{\frac{x}{\varepsilon}} - x - \varepsilon,$$

Очевидно, что  $y(x) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , т.е. точное решение не стремится к решению  $y_0(x) = -x$  вырожденного уравнения ни при каком  $x > 0$ . Такое поведение связано с устойчивостью или неустойчивостью решения  $y_0(x)$  вырожденного уравнения как стационарного решения задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x). \quad (14)$$

**Определение.** Стационарное решение  $y = y_0(x)$  задачи (14) называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что если  $|y^0 - y_0(x_0)| < \delta$ , то при всех  $x > x_0$  существует решение  $y(x)$  начальной задачи (14), и выполняется неравенство  $|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ .

Напомним теорему Ляпунова о признаке устойчивости решения задачи (14) по первому приближению.

Пусть функция  $f(y, x)$  непрерывна вместе с производной по переменной  $y$  в некоторой окрестности  $|y - y_0| \leq \delta$  и пусть при  $x \geq x_0$  существует решение  $y_0(x)$  уравнения  $f(y, x) = 0$ . Если при этом  $f_y(y_0, x) < 0$  при

$x \geq x_0$ , то решение  $y_0(x)$  – устойчиво, а если  $f_y(y_0, x) > 0$  при  $x \geq x_0$ , то решение  $y_0(x)$  – неустойчиво.

Так, в задаче (12)  $f_y = -1$ , и решение вырожденного уравнения устойчиво, а в задаче (13)  $f_y = 1$ , и решение вырожденного уравнения неустойчиво. Более точно условия, при которых решение вырожденного уравнения дает приближение к точному решению при  $x \in (0; H]$ , сформулированы ниже.

## §2. Теорема А.Н. Тихонова

Как мы видели, для задачи Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= F(y, x, \varepsilon), & 0 < x \leq H \\ y(0, \varepsilon) &= y^0, & \varepsilon > 0 \text{ – малый параметр} \end{aligned}, \quad (15)$$

при  $\varepsilon = 0$ , вообще говоря, не удовлетворяется дополнительное условие, т.е. решение вырожденного уравнения не дает равномерного приближения точного решения.

**Условие 1.** Пусть функция  $F(y, x)$  непрерывна вместе с производными первого порядка в некоторой области  $(y, x) \in \bar{D} = \{a \leq y \leq b, 0 \leq x \leq H\}$ .

Положим  $\varepsilon = 0$  и получим вырожденное уравнение  $F(y, x, 0) = 0$ .

**Условие 2.** Пусть вырожденное уравнение  $F(y, x, 0) = 0$  имеет в области  $\bar{D}$  изолированное решение  $\bar{y} = \varphi(x)$ , причем  $F_y(\varphi(x), x, 0) < 0$ .

*Замечание.* Корней вырожденного уравнения может быть несколько, выбираем какой-либо, удовлетворяющий Условию 2.

Рассмотрим так называемое *присоединенное уравнение*

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, x, 0), \quad \tau > 0.$$

Условие 2 означает, что стационарная точка  $z = \varphi(x)$  присоединенного уравнения *устойчива*, т.е. любая интегральная кривая, начинающаяся вблизи этой точки, стремится к ней при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Насколько начальная точка должна быть близка к корню  $z = \varphi(x)$ , определяется в следующем требовании:

**Условие 3.** Пусть начальное значение  $y^0$  принадлежит области влияния корня  $z = \varphi(x)$  присоединенного уравнения при  $x = 0$ , т.е. существует решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{d\tau} &= F(\tilde{z}, 0, 0), & \tau > 0 \\ \tilde{z}(0) &= y^0 \end{aligned}$$

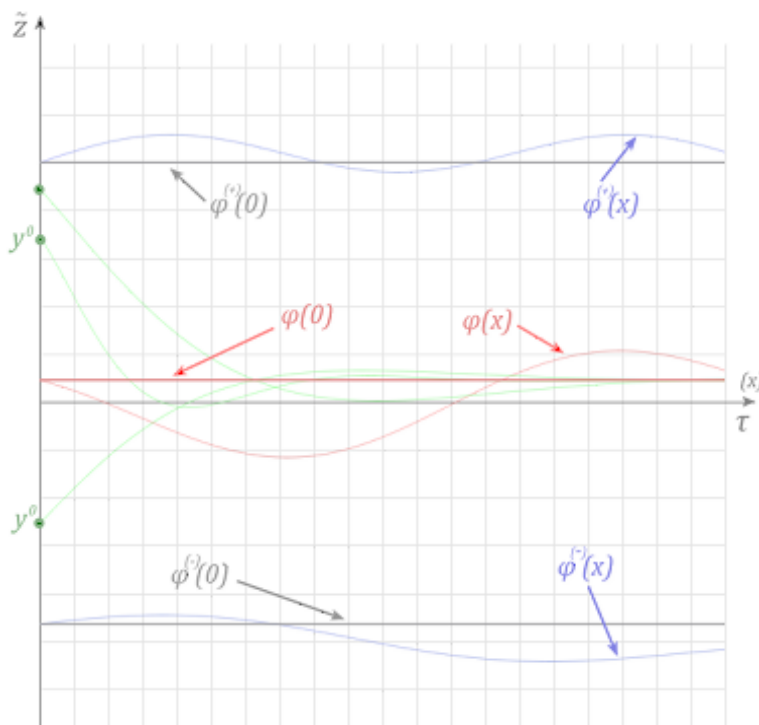
такое, что  $\tilde{z}(\tau) \rightarrow \varphi(0)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ .

*Замечание.* Если вырожденное уравнение имеет три изолированных корня  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi(x) < \varphi^{(+)}(x)$  и  $F_y(\varphi(x), x) < 0$ , то областью влияния устойчивого корня  $z = \varphi(x)$  является интервал  $\varphi^{(-)}(0) < y^0 < \varphi^{(+)}(0)$  (см. рис. 2)

**Теорема 2.** Пусть выполнены Условия 1-3. Тогда существует единственное решение  $y = y(x, \varepsilon)$  задачи (15) такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \bar{y}(x) = \varphi(x), \quad 0 < x \leq H.$$

*Замечание.* Предельный переход для функции  $y(x, \varepsilon)$  не является равномерным относительно  $x$  на отрезке  $0 \leq x \leq H$ . Можно доказать, что равномерный предельный переход имеет место на отрезке  $x_0 \leq x \leq H$  при любом фиксированном  $x_0 > 0$ .





*Пример 1.* Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= 2 - y \\ y(0, \varepsilon) &= 1 = y^0 \end{aligned} \quad (16)$$

решение которой легко выписывается:

$$y(x, \varepsilon) = 2 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Функция в правой части уравнения (15) есть  $F(y, \varepsilon) = 2 - y$ . Полагая в (16)  $\varepsilon = 0$ , получим вырожденное уравнение  $F(y, 0) \equiv 2 - y = 0$ , которое имеет единственное (следовательно, изолированное) решение  $\bar{y}(x) = \varphi(x) \equiv 2$ . Так как  $\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=\varphi(x) \equiv 2} = -1 < 0$ , то корень вырожденного уравнения является устойчивым.

Присоединенное уравнение

$$\frac{dz}{d\tau} = 2 - z, \quad \tau > 0$$

в данном случае имеет единственную стационарную точку  $z \equiv 2$ . Так как других корней у уравнения (16) нет, то областью влияния устойчивого корня вырожденного уравнения  $z = 2$  является вся плоскость  $(x, z)$ , и начальное значение  $y^0 = 1$  принадлежит этой области влияния. Структуру области влияния можно изучить и непосредственно: решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{d\tau} &= F(\tilde{z}, 0) \equiv 2 - \tilde{z} & \tau > 0 \\ \tilde{z}(0) &= y^0 \end{aligned}$$

есть  $\tilde{z} = 2 + (y^0 - 2) \cdot e^{-\tau} \rightarrow \varphi(0) = 2$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  для любого значения  $y^0$ .

Суммируя сказанное выше, на основании теоремы Тихонова можно утверждать, что имеет место предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \equiv 2, \quad 0 < x \leq H.$$

В справедливости последнего утверждения при любом  $H > 0$  можно легко убедиться непосредственно, вычислив предел точного решения (17):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (2 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) = 2, \quad x > 0.$$

Кроме того, на множестве  $x \geq x_0 > 0$  имеет место

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{x \geq x_0 > 0} |y(x, \varepsilon) - \varphi(x)| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{x \geq x_0 > 0} \left| (2 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}) - 2 \right| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{x \geq x_0 > 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{-\frac{x_0}{\varepsilon}} = 0, \end{aligned}$$

т.е. предельный переход является равномерным относительно  $x$  на указанном множестве.

Все вышесказанное можно видеть на рис. 3, где построены графики решения задачи (16) при различных значениях параметра  $\varepsilon$ .

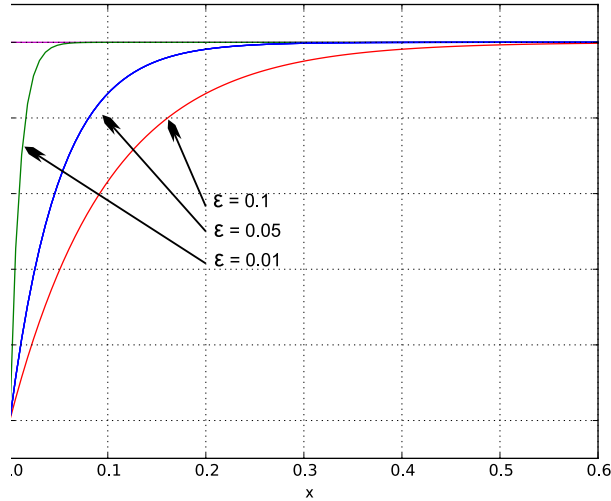


Рис. 3. Решение задачи (16)

*Пример 2.* Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= y^2 - y \equiv F(y, \varepsilon) \\ y(0, \varepsilon) &= y^0 = h \neq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Выясним, для каких начальных значениях  $y(0, \varepsilon) = h$  точное решение  $y(x, \varepsilon)$  близко к решению вырожденного уравнения  $F(y, 0) = 0$  при  $x > 0$ .

Соответствующее вырожденное уравнение  $F(y, 0) \equiv y^2 - y = 0$  имеет два изолированных корня: устойчивый  $\varphi_1(x) \equiv 0$ , так как

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=\varphi_1(x) \equiv 0} = (2y - 1) \Big|_{y=0} = -1 < 0,$$

и неустойчивый  $\varphi_2(x) \equiv 1$ , так как

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{y=\varphi_2(x) \equiv 1} = (2y - 1) \Big|_{y=1} = 1 > 0.$$

Присоединенное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{d\tau} &= F(\tilde{z}, 0) \equiv \tilde{z}^2 - \tilde{z}, & \tau > 0 \\ \tilde{z}(0) &= h \end{aligned}$$

имеет устойчивую стационарную точку  $\tilde{z} \equiv 0$ , областью притяжения которого является полуплоскость  $\tilde{z} < 0$  и полоса  $0 < \tilde{z} < 1$ . Поэтому для начальных значений  $h < 0$  и  $0 < h < 1$  в соответствии с теоремой А.Н. Тихонова при каждом  $0 < x \leq H$  имеет место предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \varphi_1(x) \equiv 0$ . Если же  $h > 1$  (начальное значение вне области влияния корня  $\varphi_1(x) \equiv 0$ ), то условия теоремы нарушены, и предельный переход, вообще говоря, невозможен. Проиллюстрируем этот результат, выписав точное решение задачи Коши

$$y(x, \varepsilon) = \frac{he^{-x/\varepsilon}}{he^{-x/\varepsilon} + 1 - h}.$$

Если  $h < 0$  или  $0 < h < 1$ , то знаменатель дроби не обращается в нуль на полупрямой  $x > 0$ . Поэтому решение определено при всех  $x > 0$ , и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = 0$ . В случае  $y(0, \varepsilon) = h > 1$  знаменатель дроби обращается в нуль при  $x = x_0$ , где  $x_0$  – решение уравнения  $e^{-x/\varepsilon} = 1 - \frac{1}{h}$  (оно разрешимо для всех  $h > 1$ , так как  $0 < 1 - \frac{1}{h} < 1$ ). Это означает, что решение исследуемой задачи Коши  $y(x, \varepsilon)$  существует лишь на интервале  $0 < x < x_0$ , а в точке  $x = x_0$  разрушается, причем  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x, \varepsilon) = +\infty$ .

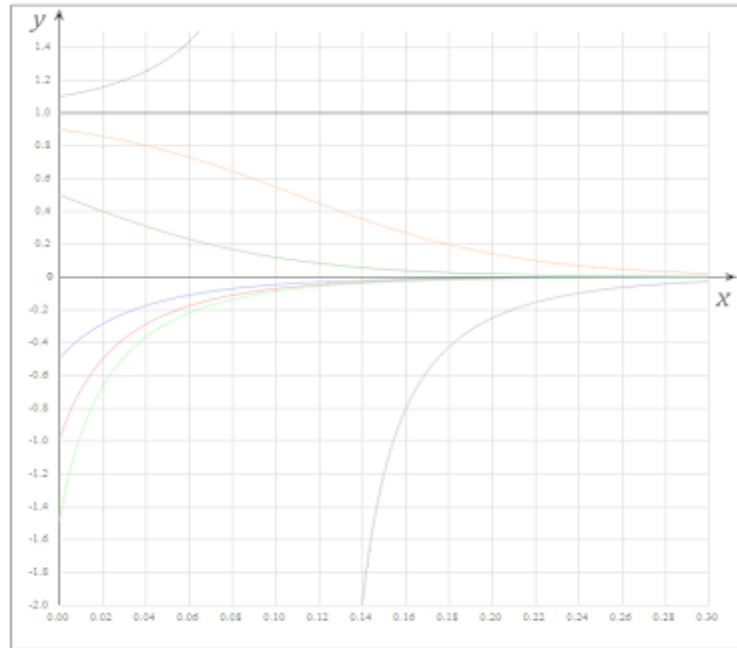


Рис. 4. Решение задачи (17) при различных  $y^0$ .

### §3. Метод пограничных функций А.Б. Васильевой

Детальное рассмотрение этого вопроса содержится, например, в книге А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова “Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений” [2]. Здесь мы проиллюстрируем основные идеи на примере.

*Пример.* Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= x - y \equiv F(y, x), & x > 0 \\ y(0) &= 1 = y^0 \end{aligned} \quad (18)$$

Точным решением ее является  $y(x, \varepsilon) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \cdot e^{-x/\varepsilon}$ . На Рис. 5 представлены графики решения задачи (18) при различных значениях параметра  $\varepsilon$ .

Заметим, что имеет место предельный переход  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(x, \varepsilon) = \varphi(x) \equiv x$  при каждом фиксированном  $x > 0$ , где  $\varphi_0(x) \equiv x$  — устойчивый корень вырожденного уравнения  $F(x, z, 0) = 0$ , что соответствует результату,

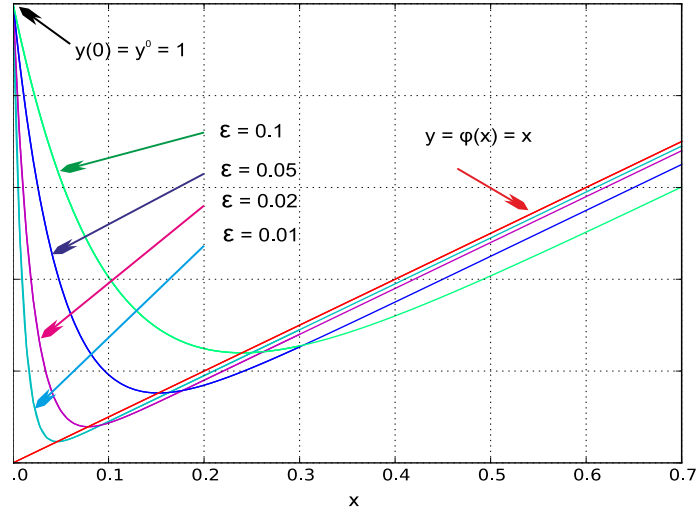


Рис. 5. Решение задачи (18) при различных значениях параметра  $\varepsilon$ .

сформулированному в теореме А.Н. Тихонова. Однако если  $x > 0$  является асимптотически малым (т.е.  $0 < x < x_0$ , где  $x_0 \sim \varepsilon$ ), то величина  $e^{-x/\varepsilon}$  конечна, и отличие решения  $y(x, \varepsilon)$  от корня  $\varphi_0(x) \equiv 1$  вырожденного уравнения не мало. Поэтому в областях  $0 < x < x_0 \sim \varepsilon$  и  $x \gg x_0$  разложения в точного решения  $y(x, \varepsilon)$  в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon > 0$  будут различны.

Пусть  $x > 0$  фиксировано и не является асимптотически малым (т.е.  $x \gg x_0$ ). Тогда при  $\varepsilon \rightarrow +0$  имеет место  $e^{-x/\varepsilon} = o(\varepsilon^n)$ , где  $n$  – любое натуральное число, и для точного решения получаем “регулярное разложение” (регулярный ряд)  $\bar{y}(x, \varepsilon) = x - \varepsilon + o(\varepsilon^n)$ , или с точностью до членов первого порядка  $\bar{y}(x, \varepsilon) = x - \varepsilon + o(\varepsilon)$ .

Вблизи начальной точки, т.е. при  $0 < x < x_0 \sim \varepsilon$  величина  $e^{-x/\varepsilon} \sim 1$ , поэтому разложение в ряд точного решения будет содержать кроме регулярной части еще “пограничные функции”, зависящие от “быстрой” переменной  $\tau = \frac{x}{\varepsilon}$ , которые экспоненциально быстро убывают при  $x \rightarrow +\infty$ . Действительно, соответствующий ряд с точностью до членов первого порядка по  $\varepsilon$  имеет вид

$$y(x, \varepsilon) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \cdot e^{-x/\varepsilon} = x - \varepsilon + o(\varepsilon) + e^{-\tau} + \varepsilon \cdot e^{-\tau} + o(\varepsilon) \equiv \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon).$$

Возникает вопрос: можно ли получить асимптотическое разложение

решения (т.е. члены записанного выше ряда), не находя точного решения в явном виде, а решая, как и в случае регулярного возмущения, некоторую последовательность более простых задач? Оказывается, что при определенных условиях это возможно. Если представить решение в виде суммы двух рядов по степеням малого параметра – регулярного  $\bar{y}(x, \varepsilon)$  и пограничного  $\Pi z(\rho, \varepsilon)$  – то, подставив эти ряды в уравнение и начальное условие и приравняв коэффициенты при степенях параметра  $\varepsilon$  отдельно в регулярной части (зависящей от переменной  $x$ ) и погранслошной части (зависящей от “быстрой” переменной  $\tau = \frac{x}{\varepsilon}$ ), получим последовательность задач для определения членов разложения.

#### §4. Алгоритм построения асимптотического приближения для сингулярно возмущенного уравнения

##### 3.1 Краткая теория

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= F(y, x, \varepsilon), & x > 0 \\ y(0) &= y^0 \end{aligned} \quad (19)$$

Предположим, что выполнены все условия Теоремы 1, в частности:

- а) вырожденное уравнение  $F(y, x) = 0$  имеет изолированное решение  $\bar{y} = \varphi(x)$ , причем  $F_y(\varphi(x), x) < 0$ ;
- б)  $y^0$  принадлежит области влияния устойчивого корня присоединенного уравнения.

Будем строить асимптотическое приближение решения задачи (18) в виде

$$y(x, \varepsilon) = \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon},$$

где

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \dots + \varepsilon^n \bar{y}_n(x) + \dots, \quad (20)$$

$$\Pi(\tau, \varepsilon) = \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau) + \dots \quad (21)$$

– регулярный и пограничный ряды.

Подставив (20) и (21) в (18), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{d\Pi}{d\tau} &= F(\bar{y} + \Pi, x, \varepsilon) = F(\bar{y}, x, \varepsilon) + \left[ F(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi, \varepsilon\tau) - \right. \\ &\left. - F(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau, \varepsilon) \right] \equiv \bar{F}(x, \varepsilon) + \Pi F(\tau, \varepsilon) \end{aligned} \quad (22)$$

$$y(0) + \Pi(0) = y^0$$

Теперь, разложив обе части равенств (22) в ряды по степеням  $\varepsilon$ , и приравняв коэффициенты рядов отдельно, зависящие от  $x$  и от  $\tau$ , получим набор задач для определения членов асимптотического приближения. Далее все функции, зависящие от аргумента  $(\bar{y}_0(x), x, 0)$  будем обозначать символом “-”, а именно,  $f(\bar{y}_0(x), x, 0) \equiv \bar{f}(x)$ , а функции, зависящие от аргумента  $(\Pi_0(\tau) + \bar{y}_0(0), 0, 0)$  – символом “~”, например,  $f(\Pi_0(\tau) + \bar{y}_0(0), 0, 0) \equiv \tilde{f}(\tau)$ .

*Замечание 1* (разложение регулярной части (22)):

$$\begin{aligned} F(\bar{y}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) &= F(\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \dots, x, \varepsilon) = \\ &= F|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left. \frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots = \\ &= F(\bar{y}_0(x), x, 0) + \varepsilon [F_y(\bar{y}_0(x), x, 0) \cdot \bar{y}_1 + F_\varepsilon(\bar{y}_0(x), x, 0)] + \dots \end{aligned}$$

*Замечание 2* (разложение погранслошной части (22)):

$$\begin{aligned} \bar{y}_0(\tau\varepsilon) + \varepsilon \bar{y}_1(\tau\varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(\tau\varepsilon) + \dots + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots = \\ = \bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon [\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + \bar{y}_1(0) + \Pi_1(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), x, \varepsilon) &= F(\bar{y}(\tau\varepsilon, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \tau\varepsilon, \varepsilon) = \\ &= F(\bar{y}_0(\tau\varepsilon) + \varepsilon \bar{y}_1(\tau\varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(\tau\varepsilon) + \dots + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots, \tau\varepsilon, \varepsilon) = \\ &= F|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left. \frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots = F(\bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0, 0) + \\ &+ \varepsilon \cdot [F_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0, 0) \cdot (\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + \bar{y}_1(0) + \Pi_1(\tau)) + \\ &+ F_x(\bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0, 0) \cdot \tau + F_\varepsilon(\bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0, 0)] + \dots = \\ &= \tilde{F}(\tau) + \varepsilon \cdot [\tilde{F}_y(\tau) \cdot (\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + \bar{y}_1(0) + \Pi_1(\tau)) + \tilde{F}_x(\tau) \cdot \tau + \tilde{F}_\varepsilon(\tau)] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\bar{y}(x, \varepsilon), x, \varepsilon) &= F(\bar{y}(\tau\varepsilon, \varepsilon), \tau\varepsilon, \varepsilon) = \\ &= F(\bar{y}_0(\tau\varepsilon) + \varepsilon \bar{y}_1(\tau\varepsilon) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(\tau\varepsilon) + \dots, \tau\varepsilon, \varepsilon) = \\ &= F|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left. \frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \dots = F(\bar{y}_0(0), 0, 0) + \\ &+ \varepsilon \cdot [F_y(\bar{y}_0(0), 0, 0) \cdot (\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + \bar{y}_1(0)) + F_x(\bar{y}_0(0), 0, 0) \cdot \tau + F_\varepsilon(\bar{y}_0(0), 0, 0)] + \dots = \\ &= \bar{F}(0) + \varepsilon \cdot [\bar{F}_y(0) \cdot (\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + \bar{y}_1(0)) + \bar{F}_x(0) \cdot \tau + \bar{F}_\varepsilon(0)] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi F(\tau, \varepsilon) &= \tilde{F} + [F(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon) + \Pi, \varepsilon\tau) - F(\bar{y}(\varepsilon\tau, \varepsilon), \varepsilon\tau)] = \\ &= \tilde{F} + \varepsilon \cdot [\tilde{F}_y \cdot \Pi_1(\tau) + (\tilde{F}_y - \bar{F}_y) \cdot (\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + \bar{y}_1(0)) + \\ &+ (\tilde{F}_x - \bar{F}_x) \cdot \tau + (\tilde{F}_\varepsilon - \bar{F}_\varepsilon)] + \dots \end{aligned}$$





Обозначим  $Y_n(x, \varepsilon) = \bar{y}_0(x) + \varepsilon\bar{y}_1(x) + \dots + \varepsilon^n\bar{y}_n(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon\Pi_1(\tau) + \dots + \varepsilon^n\Pi_n(\tau)$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3** . Пусть функция  $F(y, x)$  имеет непрерывные производные до  $n + 1$  порядка и выполнены условия Теоремы 2.

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\max_{0 \leq x \leq H} |y(x, \varepsilon) - Y_n(x, \varepsilon)| < C \cdot \varepsilon^{n+1}.$$

Для доказательства теоремы нужно построить *верхнее*  $\beta(x)$  и *нижнее*  $\alpha(x)$  решения, т.е. найти функции, удовлетворяющие условиям:

1.  $\alpha(x) < \beta(x), \quad 0 \leq x \leq H;$
2.  $L_\varepsilon[\alpha] \equiv \varepsilon \frac{d\alpha}{dx} - F(\alpha(x), x) < 0, \quad 0 \leq x \leq H,$   
 $L_\varepsilon[\beta] \equiv \varepsilon \frac{d\beta}{dx} - F(\beta(x), x) > 0, \quad 0 \leq x \leq H;$
3.  $\alpha(0) \leq y^0 \leq \beta(0).$

Построение верхнего и нижнего решений производится путем модификации  $n + 1$  приближения полученной асимптотики (см. [1]). При выполнении условий 1.-3. существует точное решение  $y(x, \varepsilon)$  задачи (18), причем  $\alpha(x) \leq y(x, \varepsilon) \leq \beta(x)$ .

### 3.2 Примеры решения задач

#### Пример 1.

Рассмотрим еще раз разобранный выше пример с точки зрения развитого алгоритма.

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dy}{dx} &= x - y \equiv F(y, x), & x > 0 \\ y(0) &= 1 = y^0. \end{aligned} \quad (27)$$

Точным решением (27) является  $y(x, \varepsilon) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \cdot e^{-x/\varepsilon}$ . Анализ точного решения, проведенный выше, позволил получить асимптотическое представление решения

$$y(x, \varepsilon) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \cdot e^{-x/\varepsilon} = x - \varepsilon + e^{-\tau} + \varepsilon \cdot e^{-\tau} + o(\varepsilon) \equiv Y_1(x, \varepsilon) + o(\varepsilon).$$

Построим теперь асимптотику решения (27), пользуясь полученными формулами и не выписывая точное решение.

Вырожденное уравнение  $0 = F(\bar{y}_0(x), x) = x - y = 0$  имеет решение  $y = \varphi(x) = x$  для которого выполняется  $F_y(\bar{y}_0(x), x) = -1 < 0$ .

Присоединенное уравнение

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}}{d\tau} &= F(\tilde{u}, 0) = 0 - \tilde{u}, & \tau > 0 \\ \tilde{u}(0) &= y^0 = 1\end{aligned}$$

решается точно  $\tilde{u} = e^{-\tau}$  и имеет устойчивую точку покоя  $\tilde{u} = \varphi(0) = 0$ , причем начальное условие  $y^0 = 1$  попадает в область влияния этой точки покоя. Таким образом, все условия Теоремы 2 выполнены.

Регулярные члены определяются из (23):

$$\begin{aligned}\bar{y}_0 : \quad 0 &= F(\bar{y}_0(x), x) = x - y = 0 & \Rightarrow & \quad \bar{y}_0 = \varphi(x) = x \\ \bar{y}_1 : \quad \frac{d\bar{y}_0}{dx} &= 1 = F_y(\bar{y}_0(x), x) \cdot \bar{y}_1 \equiv -1 \cdot \bar{y}_1 & \Rightarrow & \quad \bar{y}_0 = -1.\end{aligned}$$

Пограничные функции найдем из (24) и (26) :

$$\Pi_0 : \quad \begin{aligned}\frac{d\Pi_0}{d\tau} &= F(\Pi_0(\tau) + \bar{y}_0(0), 0) \equiv 0 - (\Pi_0 + 0) = -\Pi_0 & \Rightarrow \\ \Pi_0(0) &= y^0 - \bar{y}_0(0) = 1\end{aligned}$$

$$\Pi_0 = e^{-\tau}, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon};$$

$$\Pi_1 : \quad \begin{aligned}\frac{d\Pi_1}{d\tau} &= F_y(\Pi_0(\tau) + \bar{y}_0(0), 0) \cdot \Pi_1 + h_1(\tau) = -1 \cdot \Pi_1 & \Rightarrow \\ \Pi_1(0) &= -\bar{y}_1(0) = 1\end{aligned}$$

$$\Pi_1 = e^{-\tau}, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon},$$

где  $h_1(\tau) = (\tilde{F}_y - \bar{F}_y) \cdot (\bar{y}'_0(0) \cdot \tau + y_1(0)) + (\tilde{F}_x - \bar{F}_x) \cdot \tau = 0$ .

Таким образом,

$$Y_1(x, \varepsilon) = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) = x - \varepsilon + e^{-\tau} + \varepsilon \cdot e^{-\tau},$$

и для решения получаем асимптотическое представление

$$y(x, \varepsilon) = Y_1(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2) = x - \varepsilon + e^{-\tau} + \varepsilon \cdot e^{-\tau} + O(\varepsilon^2),$$

совпадающее с полученным ранее из других соображений.

### **Пример 2.**

Построим асимптотическое приближение решения задачи

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = x - y; \quad y(0) = 1 + 3\varepsilon. \quad (28)$$

Вырожденное уравнение  $x - y = 0$  не является дифференциальным, откуда  $y_0(x) = x$ . Нетрудно проверить, что функция  $y_0(x)$  не удовлетворяет начальному условию задачи.

Для описания поведения решения в окрестности точки  $x = 0$  введем растянутую переменную  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$  и будем строить асимптотическое представление решения в виде

$$Y_2 = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi), \quad (29)$$

где  $\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)$  – регулярная часть,  $\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)$  – пограничные функции в окрестности точки  $x = 0$ .

Подставим сумму (29) в уравнение (28)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) + \frac{d}{d\xi} (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + O(\varepsilon^3) = \\ = x - (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

и выделим отдельно задачи для каждой из частей асимптотического представления.

*Регулярная часть.*

$$\varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) = x - (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)). \quad (30)$$

*Пограничные функции.*

$$\frac{d}{d\xi} (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) = - (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)). \quad (31)$$

*Начальное условие.*

$$\bar{y}_0(0) + \varepsilon \bar{y}_1(0) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(0) + \Pi_0(0) + \varepsilon \Pi_1(0) + \varepsilon^2 \Pi_2(0) = 1 + 3\varepsilon. \quad (32)$$

*Решение уравнений для регулярной части.*

Приравнявая в уравнении (30) отдельно коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned} x - \bar{y}_0 &= 0, \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_0 = x; \\ \frac{d\bar{y}_0}{dx} &= -\bar{y}_1(x), \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_1(x) = -1; \\ \frac{d\bar{y}_1}{dx} &= -\bar{y}_2(x), \quad \Rightarrow \quad \bar{y}_2(x) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что все последующие слагаемые регулярной части равны нулю.

*Решение уравнений для пограничных функций.*

Приравнявая в уравнении (31) и условии (32) отдельно коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_0}{d\xi} &= -\Pi_0(\xi), \quad \bar{y}_0(0) + \Pi_0(0) = 1 \Rightarrow \Pi_0(\xi) = e^{-\xi}; \\ \frac{d\Pi_1}{d\xi} &= -\Pi_1(\xi), \quad \bar{y}_1(0) + \Pi_1(0) = 3 \Rightarrow \Pi_1(\xi) = 4e^{-\xi}; \\ \frac{d\Pi_2}{d\xi} &= -\Pi_2(\xi), \quad \bar{y}_2(0) + \Pi_2(0) = 0 \Rightarrow \Pi_2(\xi) = 0.\end{aligned}\quad (33)$$

Заметим, что все последующие слагаемые погранслошной части равны нулю.

Итак, мы построили асимптотическое приближение решения задачи (28) в виде

$$Y_2 = x + e^{-\xi} + \varepsilon \left( -1 + 4e^{-\xi} \right). \quad (34)$$

*Точное решение.*

Для задачи (28) можно получить точное решение задачи :

$$\begin{aligned}y(x) &= (1+3\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \int_0^x e^{\frac{s}{\varepsilon}} \frac{s}{\varepsilon} ds = (1+3\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \left( xe^{\frac{x}{\varepsilon}} - \varepsilon e^{\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon \right) = \\ &= (1+4\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + x - \varepsilon.\end{aligned}\quad (35)$$

Нетрудно убедиться, что точное решение совпадает с построенным асимптотическим приближением (34).

**Пример 3.**

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = e^x - y; \quad y(0) = 2 + \varepsilon. \quad (36)$$

Будем строить асимптотическое представление решения в виде

$$Y_2 = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi). \quad (37)$$

Подставим сумму (37) в уравнение (36)

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) + \frac{d}{d\xi} (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + O(\varepsilon^3) = \\ = e^x - (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + O(\varepsilon^3)\end{aligned}$$

и выделим отдельно задачи для каждой из частей асимптотического представления.

*Регулярная часть.*

$$\varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) = e^x - (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)). \quad (38)$$

*Пограничные функции.*

$$\frac{d}{d\xi} (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) = - (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)). \quad (39)$$

*Начальное условие.*

$$\bar{y}_0(0) + \varepsilon \bar{y}_1(0) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(0) + \Pi_0(0) + \varepsilon \Pi_1(0) + \varepsilon^2 \Pi_2(0) = 2 + \varepsilon. \quad (40)$$

*Решение уравнений для регулярной части.*

Приравнявая в уравнении (38) отдельно коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned} e^x - \bar{y}_0 &= 0, & \Rightarrow & \bar{y}_0 = e^x; \\ \frac{d\bar{y}_0}{dx} &= -\bar{y}_1(x), & \Rightarrow & \bar{y}_1(x) = -e^x; \\ \frac{d\bar{y}_1}{dx} &= -\bar{y}_2(x), & \Rightarrow & \bar{y}_2(x) = e^x. \end{aligned}$$

Нетрудно догадаться, как выглядят все последующие слагаемые регулярной части.

*Решение уравнений для пограничных функций.*

Приравнявая в уравнении (39) и условии (40) отдельно коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0}{d\xi} &= -\Pi_0(\xi), & \bar{y}_0(0) + \Pi_0(0) = 2 & \Rightarrow \Pi_0(\xi) = e^{-\xi}; \\ \frac{d\Pi_1}{d\xi} &= -\Pi_1(\xi), & \bar{y}_1(0) + \Pi_1(0) = 1 & \Rightarrow \Pi_1(\xi) = 2e^{-\xi}; \\ \frac{d\Pi_2}{d\xi} &= -\Pi_2(\xi), & \bar{y}_2(0) + \Pi_2(0) = 0 & \Rightarrow \Pi_2(\xi) = -e^{-\xi}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, как выглядят все последующие слагаемые пограничной части.

Итак, мы построили асимптотическое приближение решения в виде

$$Y_2 = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2) e^x + (1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2) e^{-\xi}. \quad (41)$$

*Точное решение.*

Точное решение задачи (36) дается формулой

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon + 1} e^x + \frac{1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon + 1} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

Первое слагаемое отвечает регулярной части, второе – функциям переходного слоя. Подставив в последнюю формулу представление Маклорена

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots,$$

получим:

$$y(x, \varepsilon) = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots) e^x + (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \dots) (1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2) e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

Выделяя в этом представлении слагаемые порядка  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим сумму (41)

**Пример 4.**

Построим асимптотическое приближение решения задачи

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = -y + 2\varepsilon xy; \quad y(0) = 1. \quad (42)$$

Заметим, что условие устойчивости выполнено при  $0 \leq x < \frac{1}{2\varepsilon}$ :  $f_y = -1 + 2\varepsilon x < 0$ , и эта область тем больше, чем меньше  $\varepsilon$ . Будем строить асимптотическое представление решения в виде

$$Y_2 = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi). \quad (43)$$

Подставим сумму (43) в уравнение (42)

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) + \frac{d}{d\xi} (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + O(\varepsilon^3) = \\ = -(\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + \\ + 2\varepsilon x (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (44)$$

и выделим отдельно задачи для каждой из частей асимптотического представления.

*Регулярная часть.*

$$\varepsilon \frac{d}{dx} (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) = - (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)) + 2\varepsilon x (\bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x)). \quad (45)$$

*Пограничные функции.*

Выделяя в (44) погранслоиные слагаемые, необходимо заменить переменную  $x$  на её выражение через  $\xi$ , т.е.  $x = \varepsilon \xi$ :

$$\frac{d}{d\xi} (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) = - (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)) + 2\varepsilon(\varepsilon \xi) (\Pi_0(\xi) + \varepsilon \Pi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Pi_2(\xi)). \quad (46)$$

*Начальное условие.*

$$\bar{y}_0(0) + \varepsilon \bar{y}_1(0) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(0) + \Pi_0(0) + \varepsilon \Pi_1(0) + \varepsilon^2 \Pi_2(0) = 1. \quad (47)$$

*Решение уравнений для регулярной части.*

Приравнивая в уравнении (45) отдельно коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned} -\bar{y}_0 &= 0, & \Rightarrow & \bar{y}_0 = 0; \\ \frac{d\bar{y}_0}{dx} &= -\bar{y}_1(x) + 2\bar{y}_0(x), & \Rightarrow & \bar{y}_1(x) = 0; \\ \frac{d\bar{y}_1}{dx} &= -\bar{y}_2(x) + 2\bar{y}_1(x), & \Rightarrow & \bar{y}_2(x) = 0, \end{aligned}$$

и все последующие слагаемые регулярной части также равны нулю.

*Решение уравнений для пограничных функций.*

Приравнивая в уравнении (46) и условии (47) отдельно коэффициенты при  $\varepsilon^0$ ,  $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0}{d\xi} &= -\Pi_0(\xi), & \bar{y}_0(0) + \Pi_0(0) &= 1 \Rightarrow \Pi_0(\xi) = e^{-\xi}; \\ \frac{d\Pi_1}{d\xi} &= -\Pi_1(\xi), & \bar{y}_1(0) + \Pi_1(0) &= 0 \Rightarrow \Pi_1(\xi) = 0; \\ \frac{d\Pi_2}{d\xi} &= -\Pi_2(\xi) + 2\xi\Pi_0(\xi), & \bar{y}_2(0) + \Pi_2(0) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{d\Pi_2}{d\xi} &= -\Pi_2(\xi) + 2\xi e^{-\xi}, & \bar{y}_2(0) + \Pi_2(0) &= 0 \Rightarrow \Pi_2(\xi) = \xi^2 e^{-\xi}. \end{aligned}$$

Итак, асимптотическое приближение решения задачи (42) содержит только погранслойные функции:

$$Y_2 = \varepsilon e^{-\xi} + \varepsilon^2 \xi^2 e^{-\xi}. \quad (48)$$

Точное решение задачи можно получить методом разделения переменных

$$\varepsilon \frac{dy}{y} = (-1 + 2\varepsilon x) dx \Rightarrow y = C e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \cdot e^{x^2},$$

а с учетом начального условия и обозначения  $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$

$$y = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \cdot e^{x^2} = e^{-\xi} \cdot e^{\varepsilon^2 \xi}.$$

Легко видеть, что первые два слагаемых разложения решения по формуле Маклорена по степеням  $\varepsilon$

$$y = e^{-\xi} \cdot (1 + \varepsilon^2 \xi^2 + \dots).$$

совпадают с суммой (48).

### 3.3 Контрольные вопросы

!!!!!! СЮДА, возможно, НАДО ЧТО-ТО ДОБАВИТЬ !!!!!

### 3.4 Задачи для самостоятельного решения и зачета

В следующих задачах построить регулярные и пограничные функции нулевого и первого порядков (для задач 1.–3. также и второго порядка). Записать асимптотическое приближение решения с точностью  $O(\varepsilon)$  (в задачах 1.–3. с точностью  $O(\varepsilon^2)$ ).

Найти точное решение задачи и сравнить полученное асимптотическое приближение с первыми членами разложения решения по формуле Маклорена при  $\varepsilon = 0$ .



1.  $\varepsilon y' = -(x+1)(y-1+3\varepsilon), \quad y(0) = 1+2\varepsilon$
2.  $\varepsilon y' = (1-\varepsilon x)(1-y), \quad y(0) = -1+3\varepsilon$
3.  $\varepsilon y' = (x+1)(-2y+\varepsilon y^2), \quad y(0) = -3+2\varepsilon$
4.  $\varepsilon y' = y^2 - e^{2x} + \varepsilon e^x, \quad y(0) = \varepsilon$
5.  $\varepsilon y' = -y^2 + (x+1)^2 - \varepsilon, \quad y(0) = 3+5\varepsilon$
6.  $\varepsilon y' = y^2 - (x+1)^2 + \varepsilon, \quad y(0) = -\varepsilon$
7.  $\varepsilon y' = (x+1)y - y^2, \quad y(0) = 2+\varepsilon$
8.  $\varepsilon y' = y^2 - (x+1)y, \quad y(0) = -1-\varepsilon$
9.  $\varepsilon y' = -(x+1)y + \varepsilon y^2, \quad y(0) = 1+5\varepsilon$
10.  $\varepsilon y' = -(x+1)y, \quad y(0) = 1$
11.  $\varepsilon y' = (\varepsilon x+1)y - y^2, \quad y(0) = 1-\varepsilon$

## Глава 3. Краевая задача

### §1. Асимптотика решения краевой задачи с пограничными слоями

#### 3.1 Предварительные замечания

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = y - 1, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0.5 \end{cases} \quad (49)$$

Уравнение (49) легко интегрируется, и решение краевой задачи (49) имеет вид:

$$y(x, \varepsilon) = 1 + \frac{0.5e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1}{1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \cdot e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 0.5}{1 - e^{-\frac{2}{\varepsilon}}} \cdot e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} \quad (50)$$

График этой функции при различных значениях параметра  $\varepsilon$  представлен на рис. 1.

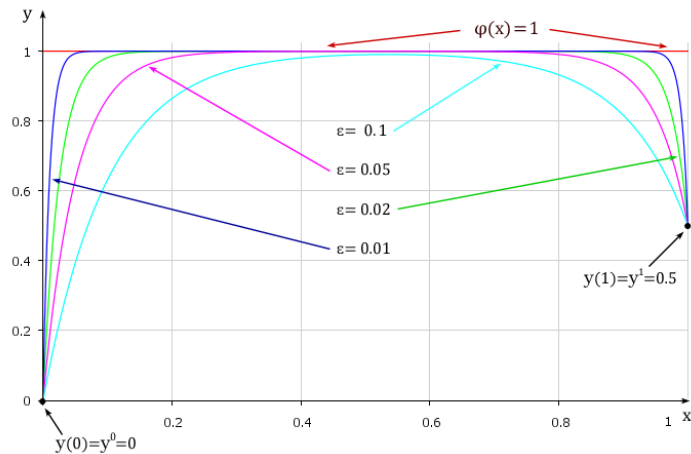


Рис 1. Пограничные слои в решении задачи (49) при различных  $\varepsilon$ .

Обозначим  $e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = \alpha(\varepsilon)$ . Очевидно, что  $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , причем  $\alpha(\varepsilon) = o(\varepsilon^N)$ , где  $N$  – любое натуральное число. Поэтому при малых  $\varepsilon$  функцию (50) с точностью  $O(\varepsilon^N)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(x, \varepsilon) &= 1 + e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (0.5\alpha - 1) (1 + \alpha^2 + \dots) + \\ &+ e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} (\alpha - 0.5) (1 + \alpha^2 + \dots) = 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - 0.5 e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^N). \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическое приближение решения задачи (49) с точностью  $O(\varepsilon^N)$  ( $N$  – любое натуральное число) дается формулой

$$y(x, \varepsilon) = 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - 0.5e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + O(\varepsilon^N). \quad (51)$$

Из полученного представления ясно видна структура решения: вдали от границ решение близко к ”вырожденному”, т.е. решению уравнения (49) при  $\varepsilon = 0$  или  $f(y, x) = 0$ , которое не удовлетворяет, вообще говоря, граничным условиям; вблизи правой и левой границ наблюдаются узкие пограничные слои.

Очевидно, что точное решение получить не всегда возможно, поэтому возникает вопрос: как получить асимптотическое приближение решения, не выписывая это решение в явном виде.

### 3.2 Краткая теория

Вернемся к общей постановке задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = y^0, & y(1) = y^1 \end{cases} \quad (52)$$

Сформулируем ряд условий.

**Условие 1.** Функция  $f(y, x)$  – достаточно гладкая (или бесконечно дифференцируема) в области  $D = \{y \in (A; B), x \in (0; 1)\}$ .

**Условие 2.** Граничные условия  $y^0, y^1 \in (A; B)$ .

**Условие 3.** Вырожденное уравнение  $f(y, x) = 0$  имеет на отрезке  $x \in [0; 1]$  хотя бы одно решение  $y = \varphi(x) \in D$  для которого выполнено неравенство

$$f_y(\varphi(x), x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in [0; 1].$$

**Замечание 1.** Для построения асимптотики порядка  $N$  необходимо потребовать существование производных у функции  $f(y, x)$  до порядка  $N + 1$ .

**Замечание 2.** Вырожденное уравнение  $f(y, x) = 0$  является алгебраическим, т.е. его решение  $y = \varphi(x)$ , вообще говоря, не удовлетворяет

граничным условиям.

Представим  $y$  в виде суммы трех рядов:

$$y = \bar{y}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon) + R(\rho, \varepsilon), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \rho = \frac{x-1}{\varepsilon} \quad (53)$$

регулярного

$$\bar{y}(x, \varepsilon) = \bar{y}_0(x) + \varepsilon \bar{y}_1(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2(x) + \dots \quad (54)$$

левого пограничного

$$\Pi(\tau, \varepsilon) = \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \varepsilon^2 \Pi_2(\tau) + \dots \quad (55)$$

и правого пограничного

$$R(\rho, \varepsilon) = R_0(\rho) + \varepsilon R_1(\rho) + \varepsilon^2 R_2(\rho) + \dots \quad (56)$$

Подставим (54) – (56) в (52), приравняв коэффициенты при степенях  $\varepsilon$  отдельно зависящие от  $x$ ,  $\tau$  и  $\rho$ , получим уравнения для определения членов асимптотических рядов.

*Регулярная часть.*

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : & \rightarrow 0 = f(\bar{y}_0(x), x) \\ \varepsilon^1 : & \rightarrow 0 = f_y(\bar{y}_0(x), x) \cdot \bar{y}_1(x) \\ \varepsilon^2 : & \rightarrow \bar{y}_0''(x) = f_y(\bar{y}_0(x), x) \cdot \bar{y}_2(x) + \frac{1}{2} f_{yy}(\bar{y}_0(x), x) \cdot \bar{y}_1^2(x) \\ & \dots \\ \varepsilon^n : & \rightarrow \bar{y}_{n-2}''(x) = f_y(\bar{y}_0(x), x) \cdot \bar{y}_n(x) + \bar{f}_n(x), \end{aligned} \quad (57)$$

где  $\bar{f}_n(x)$  – известные функции. В силу Условия 3 все уравнения (57) разрешимы единственным образом. Заметим, что  $\bar{y}_0(x) = \varphi(x)$ .

*Пограничные функции.*

Представим  $f(y, x)$  в виде  $f = \bar{f} + \Pi f + Rf$ , где

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f(\bar{y}(x, \varepsilon), x) \\ \Pi f &= f(\bar{y}(\tau\varepsilon, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon), \tau\varepsilon) - f(\bar{y}(\tau\varepsilon, \varepsilon), \tau\varepsilon) \\ Rf &= f(\bar{y}(\rho\varepsilon + 1, \varepsilon) + R(\rho, \varepsilon), \rho\varepsilon + 1) - f(\bar{y}(\rho\varepsilon + 1, \varepsilon), \rho\varepsilon + 1), \end{aligned} \quad (58)$$

и  $\tau = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \rho = \frac{x-1}{\varepsilon}.$

Далее подробно рассмотрим только процедуру нахождения левых пограничных функций. Для этого разложим  $\Pi f$  в ряд по степеням  $\varepsilon$

$$\Pi f = f(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0) + \varepsilon \{f_y(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0) \cdot [\Pi_1(\tau) + \varphi'(0)\tau + \bar{y}'_1(0)] + f_x(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0)\tau - f_y(\varphi(0), 0) \cdot [\varphi'(0)\tau + \bar{y}'_1(0)] - f_x(\varphi(0), 0)\tau\} + \dots$$

и подставим его и (55) в уравнение и граничные условия (52). В результате получим:

$$\varepsilon^0 : \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d\tau^2} = f(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0) \Rightarrow \quad (59)$$

$$\Pi_0(0) = y^0 - \varphi(0), \Pi_0(+\infty) = 0.$$

Введем новую функцию  $\tilde{u} = \Pi_0(\tau) + \varphi(0)$ . Тогда (59) примет вид

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tau^2} = f(\tilde{u}, 0); \quad \tilde{u}(0) = y^0, \quad \tilde{u}(+\infty) = \varphi(0) \quad (60)$$

Заметим, что, если обозначить  $\tilde{u}' = z$  и переписать (60) в виде эквивалентной системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = z \\ \frac{dz}{d\tau} = f(\tilde{u}, 0) \end{cases}$$

то в силу Условия 3 точка покоя  $\tilde{u} = \varphi(0)$  является седлом, через которое проходят две сепаратрисы, уравнения которых можно записать так

$$z^2 = 2 \int_{\varphi(0)}^{\tilde{u}} f(u, 0) du$$

Соответствующая фазовая картинка изображена на рис. 2.

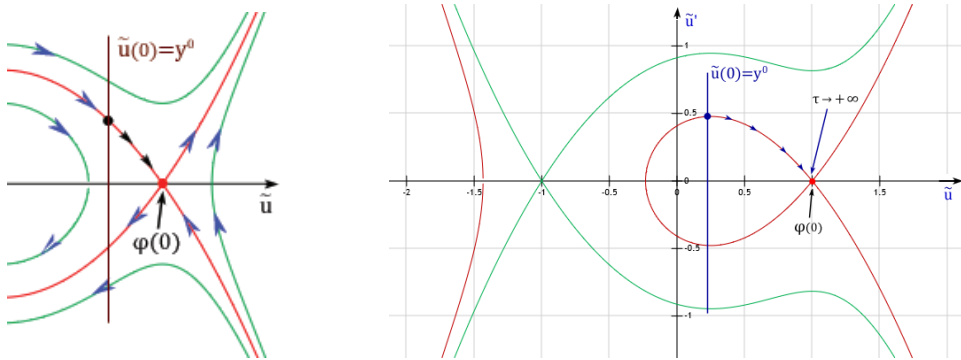


Рис. 2

Фазовая плоскость уравнения (60)

**Условие 4<sub>0</sub>.** *Граничные условия  $y^0$  таково, что прямая  $\tilde{u} = y^0$  не пересекает сепаратрису, входящую в седло  $(\varphi(0), 0)$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ .*

Это условие обеспечивает разрешимость задачи (60) и экспоненциальную оценку для пограничной функции при  $\tau \rightarrow +\infty$ :

$$|\tilde{u}(\tau) - \varphi(0)| < C \exp(-\kappa\tau) \quad \text{или} \quad |\tilde{\Pi}_0(\tau)| < C \exp(-\kappa\tau) \quad (\tau \rightarrow +\infty),$$

где  $C$  и  $\kappa$  – положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

Продолжая процесс, получим

$$\varepsilon^1 : \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Pi_1}{d\tau^2} = f_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \cdot \Pi_1 + h_1(\Pi_0, \tau) \\ \Pi_1(0) = -\tilde{y}_1(0), \quad \Pi_1(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (61)$$

где

$$h_1(\Pi_0(\tau), \tau) = f_y(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0) \cdot [\varphi'(0)\tau + \bar{y}_1(0)] + f_x(\varphi(0) + \Pi_0(\tau), 0)\tau$$

– известная функция. Далее

$$\varepsilon^k : \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \Pi_k}{d\tau^2} = f_y(\bar{y}_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \cdot \Pi_k + h_k(\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{(k-1)}, \tau) \\ \Pi_k(0) = -\tilde{y}_k(0), \quad \Pi_k(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (62)$$

где  $h_k(\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{(k-1)}, \tau)$ ,  $k = 2, 3, \dots$  – известные функции.

Задачи (61)–(62) являются линейными, их решения могут быть выписаны точно и удовлетворяют экспоненциальным оценкам

$$|\Pi_k(\tau)| < C \exp(-\kappa\tau) \quad (\tau \rightarrow +\infty) \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

где  $C$  и  $\kappa$  – положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

Итак, все левые пограничные функции построены. Погранфункции на правом конце отрезка строятся аналогично. В частности, для  $R_0(\rho)$  получим уравнение, аналогичное (59) ( $\rho = (x - 1)/\varepsilon$ ):

$$\varepsilon^0 : \rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 R_0}{d\rho^2} = f(\varphi(1) + R_0, 1) \\ R_0(0) = y^1 - \varphi(1), \quad R_0(-\infty) = 0. \end{cases} \quad (63)$$

Если ввести новую функцию  $\tilde{v} = R_0(\rho) + \varphi(1)$ , тогда (63) примет вид

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{d\rho^2} = f(\tilde{v}, 1); \quad \tilde{v}(0) = y^1, \quad \tilde{v}(-\infty) = \varphi(1). \quad (64)$$

Фазовая плоскость уравнения (64) представлена на рис. 3.

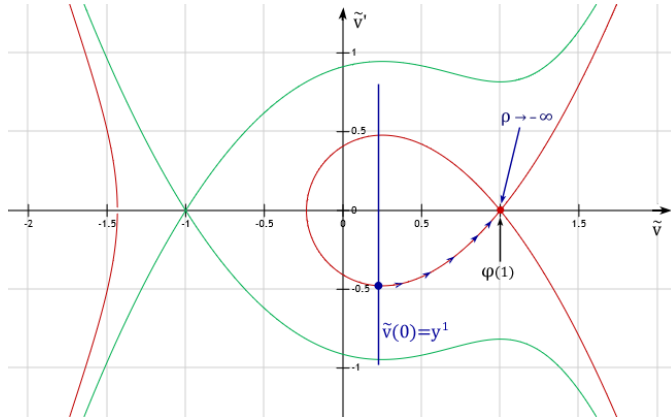


Рис. 3 Фазовая плоскость уравнения (64)

**Условие 4<sub>1</sub>.** *Граничные условия  $y^1$  таково, что прямая  $\tilde{v} = y^1$  пересекает сепаратрису, входящую в седло  $(\varphi(1), 0)$  при  $\rho \rightarrow -\infty$ .*

Дальнейшие построения  $R_k(\rho)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  полностью повторяют процедуру нахождения погранфункций  $\Pi_k$  с заменой  $\tau$  на  $\rho$  и  $x = 0$  на  $x = 1$ , где это необходимо. Для функций  $R_k(\rho)$  справедливы экспоненциальные оценки убывания при  $\rho \rightarrow -\infty$ .

### 3.3 Примеры решения задач

#### Пример 1.

Вернемся к рассмотренному выше примеру

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = y - 1, & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (65)$$

и проведем процедуру построения асимптотики, используя полученные выше формулы.

В нашем случае  $f(y, x) = y - 1$ , т.е. Условия 1 и 2, очевидно, выполнены.

Вырожденное уравнение  $f(y, x) \equiv y - 1 = 0$  имеет единственное решение  $\varphi(x) \equiv 1$ , для которого выполняется Условие 3:

$$f_y(\varphi(x), x) = 1 > 0.$$

Уравнения (57) дают

$$y_0(x) = \varphi(x) \equiv 1; \quad y_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из (58) получим

$$\Pi f = \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k(\tau) + \dots, \quad Rf = R_0(\rho) + \varepsilon R_1(\rho) + \dots + \varepsilon^k R_k(\rho) + \dots,$$

и задачи (59) для левой погранфункции  $\Pi_0$  имеет вид:

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d\tau^2} = \Pi_0; \quad \Pi_0(0) = -1, \quad \Pi_0(+\infty) = 0$$

и решением которой является

$$\Pi_0(\tau) = -e^{-\tau}, \quad \tau = \frac{x}{\varepsilon}.$$

В следующих приближениях задачи (62) выглядят так:

$$\frac{d^2 \Pi_k}{d\tau^2} = \Pi_k; \quad \Pi_k(0) = 0, \quad \Pi_k(+\infty) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$\Pi_k(\tau) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аналогично,

$$\frac{d^2 R_0}{d\rho^2} = R_0; \quad R_0(0) = -\frac{1}{2}, \quad R_0(-\infty) = 0$$

решением которой является

$$R_0(\tau) = -\frac{1}{2} e^\rho, \quad \tau = \frac{x-1}{\varepsilon},$$

и в следующих порядках по  $\varepsilon$

$$R_k(\rho) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots$$



Таким образом, получаем асимптотическое представление решения (65)

$$y(x, \varepsilon) = 1 - e^{-\tau} - \frac{1}{2} e^{\rho} + o(\varepsilon^N) = 1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - \frac{1}{2} e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + o(\varepsilon^N),$$

где  $N$  – любое натуральное число. Очевидно, что это представление полностью совпадает с выражением (51), полученным в результате анализа точного решения.

**Пример 2.**

Построить асимптотическое приближение первого порядка решения краевой задачи

$$\varepsilon^2 u'' = u - \varepsilon x^2 + 2\varepsilon^3, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = -1 + 5\varepsilon, \quad u(1) = 2\varepsilon. \quad (66)$$

Будем строить асимптотическое приближение решения (66) в виде

$$U_1 = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l) + \Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r), \quad (67)$$

где  $\xi_l = \frac{x}{\varepsilon}$  и  $\xi_r = \frac{x-1}{\varepsilon}$ ; функции  $\Pi_i^l(\xi_l)$ ,  $i = 0, 1$  описывают погранслоем в окрестности точки  $x = 0$ , а функции  $\Pi_i^r(\xi_r)$ ,  $i = 0, 1$  – в окрестности точки  $x = 1$ .

Подставим сумму (67) в уравнение (66) и выделим отдельно задачи для каждой из частей асимптотического представления.

*Регулярная часть:*

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} (\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x)) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) - \varepsilon x^2 + 2\varepsilon^3. \quad (68)$$

*Погранслоенная часть в окрестности точки  $x = 0$ :*

$$\frac{d^2}{d\xi_l^2} (\Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l)) = \Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l) - \varepsilon^3 \xi_l^2 + 2\varepsilon^3, \quad (69)$$

$$\Pi_0^l(0) + \varepsilon \Pi_1^l(0) + \bar{u}_0(0) + \varepsilon \bar{u}_1(0) = -1 + 5\varepsilon, \quad \xi_l > 0, \quad x = \varepsilon \xi_l.$$

*Погранслоенная часть в окрестности точки  $x = 1$ :*

$$\frac{d^2}{d\xi_r^2} (\Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r)) = \Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r) - \varepsilon - 2\varepsilon^2 \xi_r - \varepsilon^3 \xi_r^2 + 2\varepsilon^3, \quad (70)$$

$$\Pi_0^r(0) + \varepsilon \Pi_1^r(0) + \bar{u}_0(1) + \varepsilon \bar{u}_1(1) = 2\varepsilon, \quad \xi_r < 0, \quad x = 1 + \varepsilon \xi_r.$$

*Решение уравнения для регулярной части.*

Приравнивая в уравнении (68) коэффициенты при  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , получим

$$\bar{u}_0(x) = 0, \quad \bar{u}_1(x) = x^2. \quad (71)$$

*Левый погранслой. Окрестность точки  $x = 0$ .*

*Нулевое приближение.*

Положив в (69)  $\varepsilon = 0$ , получим задачу для функции  $\Pi_0^l(\xi_l)$

$$\frac{d^2 \Pi_0^l}{d\xi_l^2} = \Pi_0^l, \quad \xi_l > 0, \quad \Pi_0^l(0) = -1, \quad \Pi_0^l(+\infty) = 0 \quad (72)$$

решение которой

$$\Pi_0^l(\xi_l) = -e^{-\xi_l}.$$

*Первое приближение.*

Приравнивая в (69) коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , получим задачу для определения функции  $\Pi_1^l(\xi_l)$

$$\frac{d^2 \Pi_1^l}{d\xi_l^2} = \Pi_1^l, \quad \xi_l > 0, \quad \Pi_1^l(0) = 5, \quad \Pi_1^l(+\infty) = 0. \quad (73)$$

Решение задачи (73)

$$\Pi_1^l = 5e^{-\xi_l}.$$

*Правый погранслой. Окрестность точки  $x = 1$ .*

*Нулевое приближение.*

Положив в (70)  $\varepsilon = 0$ , получим задачу для функции  $\Pi_0^r(\xi_r)$ :

$$\frac{d^2 \Pi_0^r}{d\xi_r^2} = \Pi_0^r, \quad \xi_r < 0, \quad \Pi_0^r(0) = 0, \quad \Pi_0^r(-\infty) = 0, \quad (74)$$

решение которой

$$\Pi_0^r(\xi_r) = 0.$$

*Первое приближение.*

Приравнивая в (70) коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , получим задачу для определения функции  $\Pi_1^r(\xi_r)$

$$\frac{d^2 \Pi_1^r}{d\xi_r^2} = \Pi_1^r - 2\xi_r - 1, \quad \xi_r < 0, \quad \Pi_1^r(0) = 2, \quad \Pi_1^r(-\infty) = 0. \quad (75)$$

Ее решение

$$\Pi_1^r = 2\xi_r + 1.$$

Окончательно, асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (66) имеет вид:

$$U_1 = x^2 - e^{-\xi_l} + 5e^{-\xi_l} + 2\xi_r + 1.$$

С учетом  $\xi_r = \frac{x-1}{\varepsilon}$ ,  $\xi_l = \frac{x}{\varepsilon}$ , получим

$$U_1 = x^2 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + 5e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + 2\frac{x-1}{\varepsilon} + 1$$

### **Пример 3.**

Построить асимптотическое приближение первого порядка решения краевой задачи

$$\varepsilon^2 u'' = (x+1)u + \varepsilon u^2, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1 + \varepsilon, \quad u(1) = 1 - 2\varepsilon \quad (76)$$

Будем искать асимптотическое представление решения в виде

$$U_1 = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l) + \Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r), \quad (77)$$

где  $\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x)$  – регулярная часть;  $\Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l)$  – пограничная функция в окрестности точки  $x = 0$ ;  $\Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r)$  – пограничная функция в окрестности точки  $x = 1$ , а  $\xi_l = \frac{x}{\varepsilon}$  и  $\xi_r = \frac{x-1}{\varepsilon}$ .

Подставив сумму (77) в уравнение (76), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} (\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x)) + \frac{d^2}{d\xi_l^2} (\Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l)) + \frac{d^2}{d\xi_r^2} (\Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r)) = \\ & = (x+1)(\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l) + \Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r)) + \varepsilon (\bar{u}_0(x) + \\ & + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon \Pi_1^l(\xi_l) + \Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon \Pi_1^r(\xi_r))^2 \end{aligned}$$

и выделим отдельно задачи для каждой из частей асимптотического представления.

*Регулярная часть.*

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} (\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x)) = (\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x))((x+1) + \varepsilon(\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x))) \quad (78)$$

Погрансло́йная часть в окрестности точки  $x = 0$ .

$$\frac{d^2}{d\xi_l^2}(\Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon\Pi_1^l(\xi_l)) = (\Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon\Pi_1^l(\xi_l))(1 + \varepsilon\xi_l + \varepsilon(\Pi_0^l(\xi_l) + \varepsilon\Pi_1^l(\xi_l))) \quad (79)$$

$$\Pi_0^l(0) + \varepsilon\Pi_1^l(0) + \bar{u}_0(0) + \varepsilon\bar{u}_1(0) = 1 + \varepsilon, \quad \xi_l > 0, \quad x = \varepsilon\xi_l$$

Погрансло́йная часть в окрестности точки  $x = 1$ .

$$\frac{d^2}{d\xi_r^2}(\Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon\Pi_1^r(\xi_r)) = (\Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon\Pi_1^r(\xi_r))(2 + \varepsilon\xi_r + \varepsilon(\Pi_0^r(\xi_r) + \varepsilon\Pi_1^r(\xi_r))) \quad (80)$$

$$\Pi_0^r(0) + \varepsilon\Pi_1^r(0) + \bar{u}_0(1) + \varepsilon\bar{u}_1(1) = 1 - 2\varepsilon, \quad \xi_r < 0, \quad x = 1 + \varepsilon\xi_r$$

Решение уравнений для регулярной части.

Приравнивая в уравнении (78) коэффициенты при  $\varepsilon^0$  и  $\varepsilon^1$ , получим

$$\bar{u}_0(x)(1+x) = 0,$$

$$\bar{u}_1(x)(1+x) = -\bar{u}_0^2(x), \quad \Rightarrow \bar{u}_i = 0, \quad i = \overline{1, 2}$$

Решение уравнений для пограничных функций: левый погрансло́й, окрестность точки  $x = 0$ .

Нулевое приближение.

Приравнивая в (79) коэффициенты при  $\varepsilon^0$ , получим задачу для функции  $\Pi_0^l(\xi_l)$ :

$$\frac{d^2\Pi_0^l}{d\xi_l^2} = \Pi_0^l, \quad \xi_l > 0, \quad \Pi_0^l(0) = 1, \quad \Pi_0^l(+\infty) = 0. \quad (81)$$

Решение задачи (81) выписывается в явном виде. Учитывая дополнительные условия, получаем

$$\Pi_0^l(\xi_l) = e^{-\xi_l}.$$

Первое приближение.

Приравнивая в (79) коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , получим задачу для определения функции  $\Pi_1^l(\xi_l)$ .

$$\frac{d^2\Pi_1^l}{d\xi_l^2} = \Pi_1^l + \xi_l e^{-\xi_l} + e^{-2\xi_l}, \quad \Pi_1^l(0) = 1, \quad \Pi_1^l(+\infty) = 0. \quad (82)$$

Задача (82) – линейная, и ее решение

$$\Pi_1^l = \frac{1}{12}[e^{-\xi_l}(-3\xi_l^2 - 3\xi_l + 8) + 4e^{-2\xi_l}]$$

*Правый погранслои. Окрестность точки  $x = 1$ .*

*Нулевое приближение.*

Приравнивая в (80) коэффициенты при  $\varepsilon^0$ , получим задачу для функции  $\Pi_0^r(\xi_r)$ :

$$\frac{d^2\Pi_0^r}{d\xi_r^2} = \Pi_0^r, \quad \xi_r < 0, \quad \Pi_0^r(0) = 1, \quad \Pi_0^l(-\infty) = 0. \quad (83)$$

Решение задачи (83) выписывается в явном виде. Учитывая дополнительные условия, получаем

$$\Pi_0^r(\xi_r) = e^{\xi_r}.$$

*Первое приближение.*

Приравнивая в (80) коэффициенты при  $\varepsilon^1$ , получим задачу для определения функции  $\Pi_1^r(\xi_r)$ .

$$\frac{d^2\Pi_1^r}{d\xi_r^2} = \xi_r\Pi_0^r + (\Pi_0^r)^2 + 2\Pi_1^r, \quad \Pi_1^r(0) = -2, \quad \Pi_1^r(-\infty) = 0, \quad (84)$$

решение которой

$$\Pi_1^r = -\frac{1}{2}[2e^{-\xi_r}(\xi_r + 2) + e^{2\sqrt{2}\xi_r}].$$

Окончательно, асимптотическое разложение первого порядка задачи (76) имеет вид:

$$U_1 = e^{-\xi_l} + \varepsilon \frac{1}{12}[e^{-\xi_l}(-3\xi_l^2 - 3\xi_l + 8) + 4e^{-2\xi_l}] + e^{\xi_r} - \varepsilon \frac{1}{2}[2e^{-\xi_r}(\xi_r + 2) + e^{2\sqrt{2}\xi_r}].$$

С учетом  $\xi_r = \frac{x-1}{\varepsilon}$ ,  $\xi_l = \frac{x}{\varepsilon}$  получим

$$U_1 = e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{12}[e^{-\frac{x}{\varepsilon}}(-3\frac{x^2}{\varepsilon} - 3\frac{x}{\varepsilon} + 8) + 4e^{-2\frac{x}{\varepsilon}}] + e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{2}[2e^{-\frac{x-1}{\varepsilon}}(\frac{x-1}{\varepsilon} + 2) + e^{2\sqrt{2}\frac{x-1}{\varepsilon}}].$$

### 3.3 Контрольные вопросы

!!!!!! СЮДА, возможно, НАДО ЧТО-ТО ДОБАВИТЬ !!!!!

### 3.4 Задачи для самостоятельного решения и зачета

Постройте асимптотическое приближение первого порядка решения краевой задачи

1.  $\varepsilon^2 u'' = u - x + \varepsilon(x - u), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 7\varepsilon. \quad (85)$

## §2. Асимптотика решения краевой задачи с внутренним переходным слоем (контрастная структура)

В данном разделе рассматривается алгоритм построения асимптотики решения типа контрастной структуры, т.е. решения краевой задачи, которое близко к некоторым различным уровням справа и слева от некоторой точки, а в окрестности этой точки наблюдается узкий внутренний переходный слой (см. рис. 4)

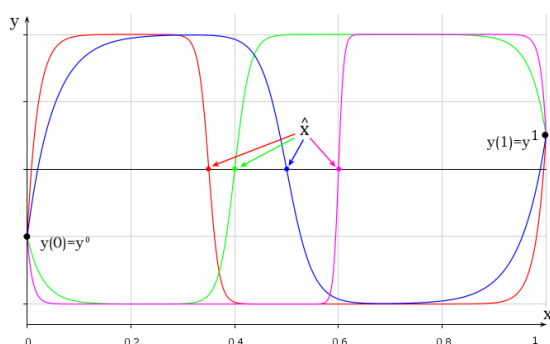


Рис. 4

Основная идея построения асимптотики заключается в том, что решение задачи комбинируется из двух решений краевой задачи на отрезках  $[0; \hat{x}]$  и  $[\hat{x}; 1]$ . Заметим, что точка, в окрестности которой локализован переходный слой, заранее неизвестна и определяется в процессе построения асимптотики.

### 2.1 Предварительные замечания

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = f(u, x) \quad (x\text{- параметр}), \quad (86)$$

или эквивалентную систему

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = z \\ \frac{dz}{d\xi} = f(u, x) \end{cases} \quad (87)$$

Функция  $f(u, x)$  такова, что уравнение  $f(u, x) = 0$  имеет 3 корня  $\varphi^{(-)}(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\varphi^{(+)}(x)$ , причем

- 1)  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi(x) < \varphi^{(+)}(x)$
- 2)  $f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x) > 0, \quad f_u(\varphi(x), x) < 0$

Это означает, что точки покоя  $(\varphi^{(\pm)}(x), 0)$  уравнения (86) или (87) являются точками покоя типа седла, а  $(\varphi(x), 0)$  – точка покоя типа центра.

Фазовые траектории  $z = z(u, x)$  задаются уравнениями

$$z \frac{dz}{du} = f(u, x) \quad \implies \quad z^2 = 2F(u, x) + C,$$

где  $F(u, x)$  – какая-либо первообразная функции  $f(u, x)$ , а *сепаратрисы* – траектории, проходящие через седла  $(\varphi^{(\pm)}(x), 0)$  – уравнениями

$$z^2 = 2 \int_{\varphi^{(\pm)}(x)}^u f(\theta, x) d\theta.$$

Возможный вид фазовой плоскости представлен на рис.5

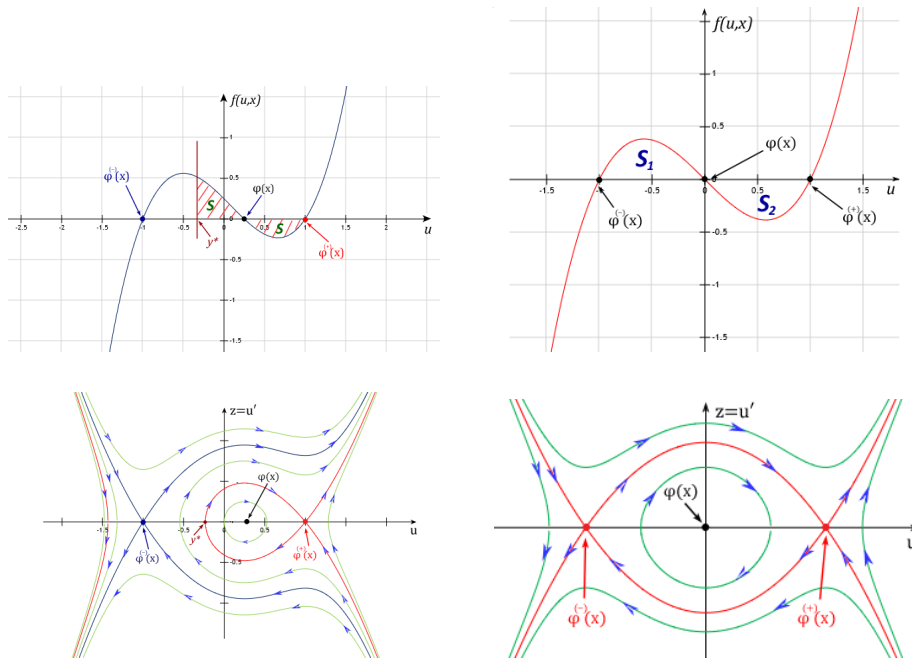


Рис. 5



На рис. 6 представлена фазовая плоскость при различных  $x$  для частного случая

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = (u^2 - 1)(u - x),$$

т.е.  $f(u, x) = (u^2 - 1)(u - x)$ ,  $\varphi^{(-)}(x) = -1$ ,  $\varphi^{(+)}(x) = 1$ ,  $\varphi(x) = x$ .

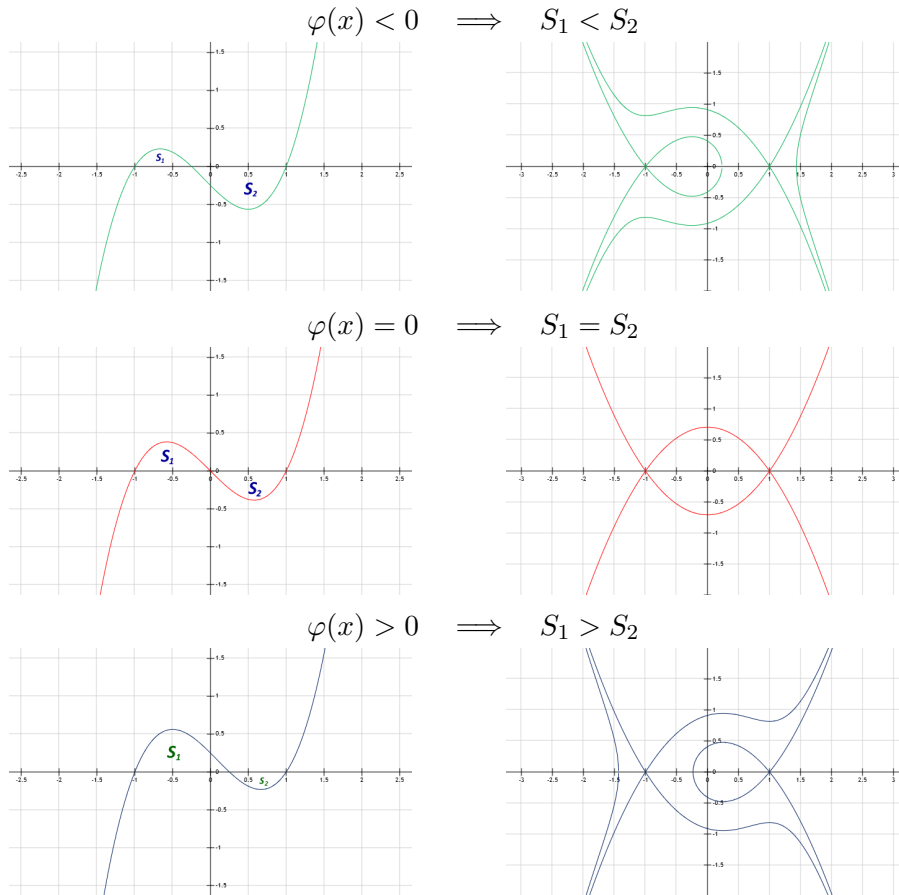


Рис. 6

Заметим, что при некоторых значениях  $x$  площади под "положительной" и над "отрицательной" частью кривой  $f(u, x)$  (см. рис. 6) могут быть равны. В этом случае сепаратрисы проходят из седла в седло, и между ними на фазовой плоскости образуется "ячейка". Аналитически

условие существования "ячейки" можно записать так:

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi(x)} f(u, x) du = \int_{\varphi^{(+)}(x)}^{\varphi(x)} f(u, x) du \iff \int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x) du = 0$$

В рассматриваемом примере условием существования ячейки является

$$\varphi(x) = 0 \implies x = 0.$$

2.2 Алгоритм построения асимптотики решения с внутренним переходным слоем.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = f(y, x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = y^0, & y(1) = y^1 \end{cases} \quad (88)$$

Сформулируем ряд условий.

**Условие 1.** Функция  $f(y, x)$  – достаточно гладкая (или бесконечно дифференцируемая) в области  $D = \{y \in (A; B), x \in (0; 1)\}$ .

*Замечание.* Для построения асимптотики порядка  $N$  необходимо потребовать существование производных  $y$  функции  $f(y, x)$  до порядка  $N + 1$ .

**Условие 2.** Граничные условия  $y^0, y^1 \in (A; B)$ .

**Условие 3.** Вырожденное уравнение  $f(y, x) = 0$  имеет на отрезке  $x \in [0; 1]$  3 корня  $\varphi^{(-)}(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\varphi^{(+)}(x)$ , причем

- 1)  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi(x) < \varphi^{(+)}(x)$
- 2)  $f_y(\varphi^{(\pm)}(x), x) > 0, \quad f_y(\varphi(x), x) < 0$

**Условие 4.** Пусть уравнение

$$\text{а) } I(x) \equiv \int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x) du = 0$$

имеет решение  $x_0 \in (0; 1)$ , причем

$$\text{б) } \frac{dI}{dx}(x_0) \equiv \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} f_x(u, x_0) du \neq 0.$$

**Условие 5<sub>0</sub>** и **Условие 5<sub>1</sub>** – аналогичны рассмотренным выше Условиям 4<sub>0</sub> и 4<sub>1</sub>, обеспечивающим существование погранслоя вблизи границ  $x = 0$  и  $x = 1$ .

Будем искать решение (88) в виде контрастной структуры, т.е. такое решение, которое близко к различным уровням справа и слева от некоторой точки  $\hat{x}$ , а в окрестности этой точки наблюдается узкий внутренний переходный слой (см. рис. 7). Заметим, что точка  $\hat{x}$  заранее неизвестна, и определим ее положение пересечением решения  $y(x, \varepsilon)$  и среднего корня вырожденного уравнения  $\varphi(x)$  и будем искать ее в виде ряда

$$\hat{x}(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (89)$$

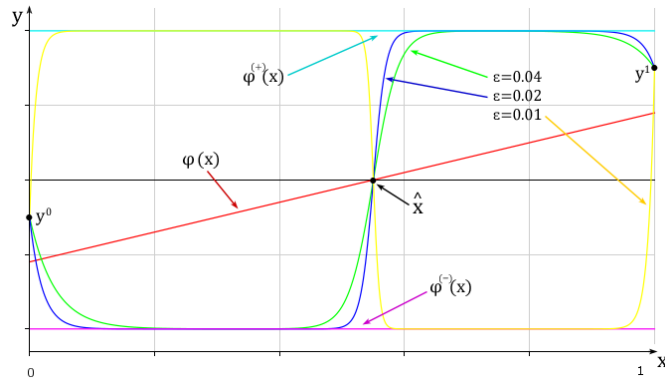


Рис. 7

Рассмотрим 2 краевые задачи.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y^{(-)}}{dx^2} = f(y^{(-)}, x), & x \in (0, \hat{x}) \\ y^{(-)}(0) = y^0, \quad y^{(-)}(\hat{x}) = \varphi(\hat{x}) \end{cases} \quad (90)$$

и

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y^{(+)}}{dx^2} = f(y^{(+)}, x), & x \in (\hat{x}, 1) \\ y^{(+)}(\hat{x}) = \varphi(\hat{x}), \quad y^{(+)}(1) = y^1 \end{cases} \quad (91)$$

Асимптотика решения каждой из сформулированных задач строится по схеме, изложенной выше для краевой задачи. Представим  $y^{(\pm)}$  в виде сумм:

$$y^{(-)} = \bar{y}^{(-)}(x, \varepsilon) + \Pi(\tau, \varepsilon) + Q^{(-)}(\xi, \varepsilon), \quad \text{где } \tau = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \xi = \frac{(x - \hat{x})}{\varepsilon} < 0 \quad (92)$$

и

$$y^{(+)} = \bar{y}^{(+)}(x, \varepsilon) + R(\rho, \varepsilon) + Q^{(+)}(\xi, \varepsilon), \quad \text{где } \rho = \frac{x - 1}{\varepsilon}, \quad \xi = \frac{(x - \hat{x})}{\varepsilon} > 0, \quad (93)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(\pm)}(x, \varepsilon) &= \bar{y}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{y}_1^{(\pm)}(x) + \varepsilon^2 \bar{y}_2^{(\pm)}(x) + \dots \\ \Pi(\tau, \varepsilon) &= \Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \varepsilon^2 \Pi_2(\tau) + \dots \\ R(\rho, \varepsilon) &= R_0(\rho) + \varepsilon R_1(\rho) + \varepsilon^2 R_2(\rho) + \dots \\ Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon) &= Q_0^{(\pm)}(\xi) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi) + \varepsilon^2 Q_2^{(\pm)}(\xi) + \dots \end{aligned} \quad (94)$$

Назначение указанных рядов аналогично тому, что было для краевой задачи. Отметим только, что теперь появился ряд (94), который описывает внутренний переходный слой.

Очевидно, что решения  $y^{(-)}$  и  $y^{(+)}$  задач (90) – (91) уже согласованы до непрерывности в точке  $\hat{x}$ . Потребуем также непрерывного согласования их производных в точке  $\hat{x}$  (условие  $C^{(1)}$ – сшивания):

$$\varepsilon \frac{d\bar{y}^{(-)}}{dx}(\hat{x}, \varepsilon) + \frac{dQ^{(-)}}{d\xi}(0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{d\bar{y}^{(+)}}{dx}(\hat{x}, \varepsilon) + \frac{dQ^{(+)}}{d\xi}(0, \varepsilon) \quad (95)$$

Обозначим

$$H(\hat{x}, \varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{d\bar{y}^{(-)}}{dx}(\hat{x}, \varepsilon) + \frac{dQ^{(-)}}{d\xi}(0, \varepsilon) - \varepsilon \frac{d\bar{y}^{(+)}}{dx}(\hat{x}, \varepsilon) - \frac{dQ^{(+)}}{d\xi}(0, \varepsilon), \quad (96)$$

тогда условие  $C^{(1)}$ – сшивания будет

$$H(\hat{x}, \varepsilon) = 0 \quad (97)$$

Подставив сюда  $\hat{x}(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$  из (89), представим (96) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$H(\hat{x}, \varepsilon) = H_0(\hat{x}) + \varepsilon H_1(\hat{x}) + \dots = H_0(x_0) + \varepsilon \left[ H_1(x_0) + \frac{dH_0}{d\hat{x}}(x_0) \cdot x_1 \right] + \dots, \quad (98)$$

где

$$\begin{aligned}
H_0(\hat{x}) &= \left. \frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=\hat{x}} - \left. \frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=\hat{x}}, & H_0(x_0) &= \left. \frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=x_0} - \left. \frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=x_0}; \\
H_1(\hat{x}) &= \left. \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=\hat{x}} - \left. \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=\hat{x}} + \frac{d\bar{y}_0^{(-)}}{dx}(\hat{x}) - \frac{d\bar{y}_0^{(+)}}{dx}(\hat{x}), \\
H_1(x_0) &= \left. \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=x_0} - \left. \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0, x=x_0} + \frac{d\bar{y}_0^{(-)}}{dx}(x_0) - \frac{d\bar{y}_0^{(+)}}{dx}(x_0).
\end{aligned}$$

Таким образом, чтобы выполнить условие  $C^{(1)}$ -сшивания на каждом шаге построения асимптотики, необходимо потребовать обращения в ноль соответствующего коэффициента ряда (98).

Процедура определения членов асимптотических рядов  $\Pi(\tau, \varepsilon)$  и  $R(\rho, \varepsilon)$  полностью повторяет изложенную в первой части лекции. Ввиду экспоненциальных оценок погранфункций ясно, что левый  $\Pi(\tau, \varepsilon)$  и правый  $R(\rho, \varepsilon)$  погранслои экспоненциально малы в окрестности точки  $\hat{x}$ . Поэтому далее сосредоточимся на процедуре построения функций  $Q^{(\pm)}(\xi, \varepsilon)$ , описывающих внутренний переходный слой.

*Регулярная часть.*

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 : & \rightarrow 0 = f(\bar{y}_0^{(\pm)}(x), x) \\
\varepsilon^1 : & \rightarrow 0 = f_y(\bar{y}_0^{(\pm)}(x), x) \cdot \bar{y}_1^{(\pm)}(x) \\
\varepsilon^2 : & \rightarrow \bar{y}_0''^{(\pm)}(x) = f_{yy}(\bar{y}_0^{(\pm)}(x), x) \cdot \bar{y}_2^{(\pm)}(x) + \frac{1}{2} f_{yy}(\bar{y}_0^{(\pm)}(x), x) \cdot \bar{y}_1^{(\pm)2}(x) \\
& \dots \\
\varepsilon^n : & \rightarrow \bar{y}_{n-2}''^{(\pm)}(x) = f_y(\bar{y}_0^{(\pm)}(x), x) \cdot \bar{y}_n^{(\pm)}(x) + \bar{f}_n^{(\pm)}(x),
\end{aligned} \tag{99}$$

где  $\bar{f}_n^{(\pm)}(x)$  – известные функции, индексы  $(-)$  и  $(+)$  относятся к областям  $(0, \hat{x})$  и  $(\hat{x}, 1)$  соответственно.

В силу Условия 3 все уравнения (99) разрешимы единственным образом и в нулевом приближении в качестве решения возьмем

$$\begin{aligned}
y_0^{(-)}(x) &= \varphi^{(-)}(x), & x &\in [0, \hat{x}) \\
y_0^{(+)}(x) &= \varphi^{(+)}(x), & x &\in (\hat{x}, 1]
\end{aligned} \tag{100}$$

Функции внутреннего слоя: нулевое приближение.

В нулевом приближении получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_0^{(-)}}{d\xi^2} &= f(\varphi^{(-)}(\hat{x}) + Q_0^{(-)}(\xi), \hat{x}), & \xi < 0 \\ Q_0^{(-)}(0) &= \varphi(\hat{x}) - \varphi^{(-)}(\hat{x}), & Q_0^{(-)}(-\infty) &= 0, \end{aligned} \quad (101)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_0^{(+)}}{d\xi^2} &= f(\varphi^{(+)}(\hat{x}) + Q_0^{(+)}(\xi), \hat{x}), & \xi > 0 \\ Q_0^{(+)}(0) &= \varphi(\hat{x}) - \varphi^{(+)}(\hat{x}), & Q_0^{(+)}(+\infty) &= 0, \end{aligned} \quad (102)$$

Введем новую функцию

$$\tilde{Q}(\xi) = \begin{cases} \tilde{Q}^{(-)}(\xi) = \varphi^{(-)}(\hat{x}) + Q_0^{(-)}(\xi), & \xi < 0 \\ \tilde{Q}^{(+)}(\xi) = \varphi^{(+)}(\hat{x}) + Q_0^{(+)}(\xi), & \xi > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что  $\tilde{Q}(\xi)$  – непрерывная функция. Теперь задачи (101) и (102) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \tilde{Q}}{d\xi^2} = f(\tilde{Q}, \hat{x}); \quad \tilde{Q}(0) = \varphi(\hat{x}), \quad \tilde{Q}(-\infty) = \varphi^{(-)}(\hat{x}), \quad \tilde{Q}(+\infty) = \varphi^{(+)}(\hat{x}) \quad (103)$$

Интегрируя уравнение (103) с условиями на бесконечности, получим

$$\begin{aligned} \xi < 0: & \quad \left( \frac{d\tilde{Q}}{d\xi} \right)^2 \equiv \left( \frac{d\tilde{Q}^{(-)}}{d\xi} \right)^2 = 2 \int_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\tilde{Q}} f(u, \hat{x}) du, \\ \xi > 0: & \quad \left( \frac{d\tilde{Q}}{d\xi} \right)^2 \equiv \left( \frac{d\tilde{Q}^{(+)}}{d\xi} \right)^2 = 2 \int_{\varphi^{(+)}(\hat{x})}^{\tilde{Q}} f(u, \hat{x}) du, \end{aligned} \quad (104)$$

Условие  $C^{(1)}$ –сшивания (95) в точке  $\xi = 0$  в нулевом приближении по  $\varepsilon$  дает (см. (98))

$$H_0(x_0) = \left. \frac{dQ_0^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \Big|_{x=x_0} - \left. \frac{dQ_0^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \Big|_{x=x_0} = \left. \frac{d\tilde{Q}^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \Big|_{x=x_0} - \left. \frac{d\tilde{Q}^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} \Big|_{x=x_0} = 0.$$

В данном случае, пользуясь (104), можно записать функцию  $H_0(\hat{x})$  в явном виде

$$H_0(\hat{x}) = \left. \frac{d\tilde{Q}^{(-)}}{d\xi} \right|_{\substack{\xi=0 \\ x=\hat{x}}} - \left. \frac{d\tilde{Q}^{(+)}}{d\xi} \right|_{\substack{\xi=0 \\ x=\hat{x}}} = \sqrt{2 \cdot \int_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\tilde{Q}(0)} f(u, \hat{x}) du} - \sqrt{2 \cdot \int_{\varphi^{(+)}(\hat{x})}^{\tilde{Q}(0)} f(u, \hat{x}) du}. \quad (105)$$

Так как  $\tilde{Q}(0) = \varphi(\hat{x}) = \varphi(x_0)$  при  $\hat{x} = x_0$ , то условие сшивания  $H_0(x_0) = 0$  можно преобразовать в следующее уравнение для определения  $x_0$  – главного члена разложения координаты внутреннего переходного слоя:

$$\int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi(x_0)} f(u, x_0) du = \int_{\varphi^{(+)}(x_0)}^{\varphi(x_0)} f(u, x_0) du \quad \Rightarrow \quad \int_{\varphi^{(-)}(x_0)}^{\varphi^{(+)}(x_0)} f(u, x_0) du \equiv I(x_0) = 0. \quad (106)$$

Уравнение (106) имеет решение  $x_0 \in (0; 1)$  в силу Условия 4а).

Заметим, что (106) совпадает с условием ячейки на фазовой плоскости для системы

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{Q}}{d\xi} = \tilde{z} \\ \frac{d\tilde{z}}{d\xi} = f(\tilde{Q}, \hat{x}) \end{cases} \quad (107)$$

Соответствующая фазовая картинка изображена на рис. 8.

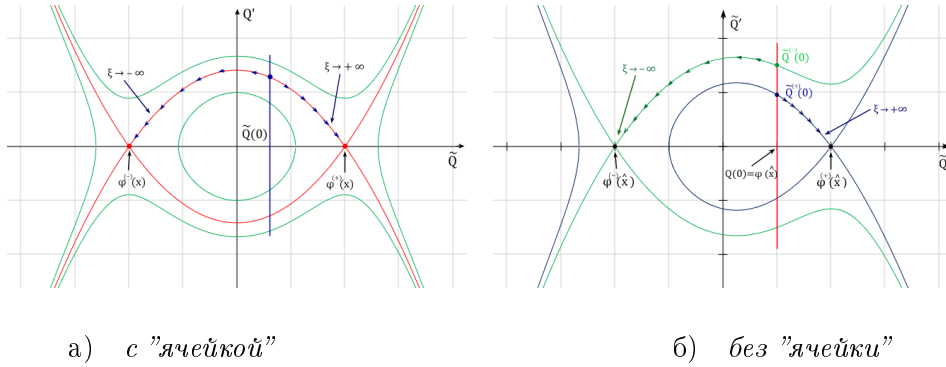


Рис. 8 Фазовая плоскость уравнения (107)

Условия 3 и 4а) обеспечивают разрешимость задачи (103) и экспоненциальную оценку для функции переходного слоя при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ :

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}(\xi) - \varphi^{(-)}(\hat{x})| &< C \exp(\kappa\xi) && \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \\ |\tilde{Q}(\xi) - \varphi^{(+)}(\hat{x})| &< C \exp(-\kappa\xi) && \text{при } \xi \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где  $C$  и  $\kappa$  – положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ .

*Замечание 1.* Возможна ситуация, при которой условие баланса реакции выполнено тождественно на всем отрезке  $x \in [0; 1]$

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x) du \equiv 0 \quad x \in [0; 1].$$

Этот случай называется "критическим", а положение внутреннего слоя определяется из других соображений.

*Замечание 2.* Возможна ситуация, при которой условие баланса реакции не выполнено ни в одной точке отрезка  $x \in [0; 1]$ , т.е. ни при каком  $x$  на фазовой плоскости нет "ячейки". В этом случае стационарного решения с внутренним слоем не существует.

*Функции внутреннего слоя: первое приближение*

Продолжая процесс, получим из (99)

$$\bar{y}_1^{(\pm)}(x) = 0.$$

Функции  $Q_1^{(\pm)}$  являются решениями задач

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1^{(\pm)}}{d\xi^2} &= \tilde{f}_y(\xi) \cdot Q_1^{(\pm)} + h_1^{(\pm)}(\xi) \\ Q_1^{(\pm)}(0) &= -y_1^{(\pm)}(\hat{x}), \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty) = 0, \end{aligned} \quad (108)$$

где

$$h_1^{(\pm)}(\xi) = \tilde{f}_y \cdot \left( y_1^{(\pm)}(\hat{x}) + \xi \cdot \frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x}) \right) + \tilde{f}_x \cdot \xi,$$

и обозначено  $\tilde{f}_y = f_y(\tilde{Q}(\xi), \hat{x})$ ,  $\tilde{f}_x = f_x(\tilde{Q}(\xi), \hat{x})$ .



Введем функцию  $\Phi(\xi) = \frac{d\tilde{Q}}{d\xi}$ . Тогда решение (108) дается в явном виде формулой:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\Phi(0)} \cdot Q_1^{(\pm)}(0) - \Phi(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{\Phi^2(\eta)} \int_\eta^{\pm\infty} \Phi(\tau) h_1^{(\pm)}(\tau) d\tau d\eta \quad (109)$$

Условие  $C^{(1)}$ -сшивания (95) в точке  $\xi = 0$  в первом приближении по  $\varepsilon$  дает (см. (98))

$$H_1(x_0) + \frac{dH_0}{d\hat{x}}(x_0) \cdot x_1 = 0, \quad (110)$$

где

$$H_1(x_0) = \left. \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi} \right|_{\substack{\xi=0 \\ x=x_0}} - \left. \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi} \right|_{\substack{\xi=0 \\ x=x_0}} + \frac{d\Phi^{(-)}}{dx}(x_0) - \frac{d\Phi^{(+)}}{dx}(x_0).$$

Заметим, что

$$\tilde{Q}(\xi) \Big|_{\substack{\xi=0 \\ x=x_0}} = \Phi(x_0), \quad \Phi(0) \Big|_{x=x_0} = \frac{d\tilde{Q}}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=0 \\ x=x_0}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\int_{\Phi^{(-)}(x_0)}^{\Phi(x_0)} f(u, x_0) du}{\Phi^{(-)}(x_0)}}$$

(в последней формуле вместо  $\Phi^{(-)}(x_0)$  можно писать  $\Phi^{(+)}(x_0)$ ).

С учетом сделанных замечаний из (105) получаем

$$\frac{dH_0}{d\hat{x}}(x_0) = \frac{\int_{\Phi^{(-)}(x_0)}^{\Phi^{(+)}(x_0)} f_x(u, x_0) du}{\sqrt{2 \cdot \frac{\int_{\Phi^{(-)}(x_0)}^{\Phi(x_0)} f(u, x_0) du}{\Phi^{(-)}(x_0)}}} = \frac{1}{\Phi(0)} \cdot \int_{\Phi^{(-)}(x_0)}^{\Phi^{(+)}(x_0)} f_x(u, x_0) du.$$

Кроме того, так как  $\Phi'(0) = \tilde{Q}''(0) = f(\Phi(\hat{x}), \hat{x}) = 0$ , то из (109) имеем

$$\left. \frac{dQ_1^{(-)}}{d\xi} \right|_{\substack{\xi=0 \\ x=x_0}} - \left. \frac{dQ_1^{(+)}}{d\xi} \right|_{\substack{\xi=0 \\ x=x_0}} = \frac{1}{\Phi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) h_1(\tau) d\tau$$

и

$$H_1(x_0) = \frac{d\Phi^{(-)}}{dx}(x_0) - \frac{d\Phi^{(+)}}{dx}(x_0) + \frac{1}{\Phi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) h_1(\tau) d\tau,$$

где

$$h_1(\tau) = \begin{cases} h_1^{(-)}(\tau), & \text{при } \tau < 0 \\ h_1^{(+)}(\tau), & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Поэтому (110) переписывается в виде

$$x_1 \cdot \int_{\Phi^{(-)}(x_0)}^{\Phi^{(+)}(x_0)} f_x(u, x_0) du + G_1(x_0) = 0, \quad (111)$$

где

$$G_1(x_0) = \Phi(0) \cdot \left( \frac{d\Phi^{(-)}}{dx}(x_0) - \frac{d\Phi^{(+)}}{dx}(x_0) \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau) h_1(\tau) d\tau$$

– известная функция.

Уравнение (111) разрешимо в силу Условия 4б) и определяет следующий член разложения координаты точки перехода  $x_1$ .

В следующих приближениях  $x_n$  определяются из линейных уравнений типа (111).

$$\text{Обозначим } Y_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k^{(\pm)} + Q_k^{(\pm)} + \Pi_k + R_k).$$

**Теорема.** При выполнении Условий 1-5 и достаточно малых  $\varepsilon$  существует решение  $y(x, \varepsilon)$  задачи (88), имеющее вид контрастной структуры, причем

$$y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Идея доказательства представлена на рис. 9.

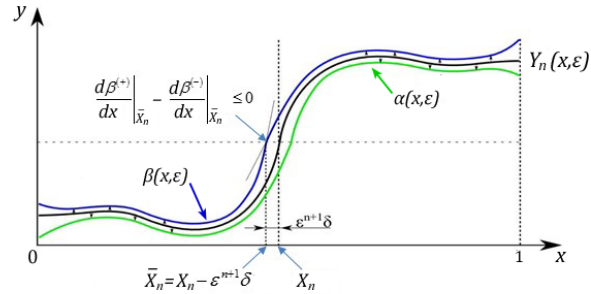


Рис. 9 *Иллюстрация к доказательству теоремы.*

*Замечание 1.* Аналогичным образом может быть рассмотрена задача с адвекцией

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = A(y, x) \frac{dy}{dx} + f(y, x), & x \in (0, 1) \\ y(0) = y^0, & y(1) = y^1 \end{cases}$$

В этом случае положение внутреннего слоя определяется не балансом реакции

$$\int_{\Phi^{(-)}(x)}^{\Phi^{(+)}(x)} f(u, x) du = 0,$$

а балансом адвекции

$$\int_{\Phi^{(-)}(x)}^{\Phi^{(+)}(x)} A(u, x) du = 0,$$

где  $\Phi^{(-)}(x)$  и  $\Phi^{(+)}(x)$  – решения вырожденного (дифференциального) уравнения с дополнительными условиями в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  соответственно.

*Замечание 2.* Если условие баланса реакции не выполнено ни в одной точке отрезка  $x \in [0; 1]$ , то стационарного решения с внутренним слоем не существует. Но аналогичным образом может быть рассмотрена задача

о движении фронта

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} = f(y, x, \varepsilon), & x \in (0, 1) \\ y(0, t) = y^0, & y(1, t) = y^1 \\ y(x, 0) = y_{init}(x) \end{cases}$$

В этом случае основное уравнение, определяющее нулевое приближение асимптотики выглядит так

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + V \frac{du}{d\xi} = f(u, x) \quad (x, V - \text{параметры}),$$

Фазовая плоскость имеет вид

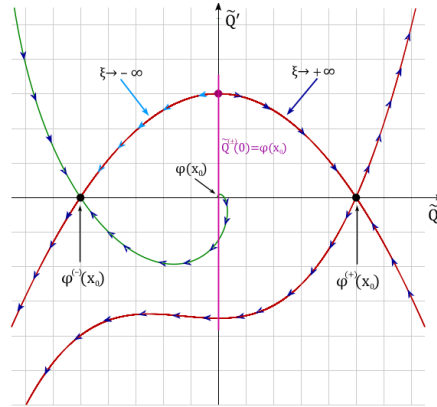


Рис. 10

Более подробно этот случай будет рассмотрен позднее.

### 2.3 Пример.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = (y^2 - 1)(y - (0.6 - x)), & x \in (0, 1) \\ y(0) = 0, & y(1) = 0.5 \end{cases}$$

В данном случае

$$f(y, x) = ((y^2 - 1)(y - (0.6 - x))) \Rightarrow \Phi^{(+)}(x) = 1, \quad \Phi^{(-)}(x) = -1, \quad \Phi(x) = 0.6 - x$$

удовлетворяет Условиям 1 и 2;

$$\Phi^{(-)}(x) = -1 < \Phi(x) = 0.6 - x < \Phi^{(+)}(x) = 1 \quad \text{при всех } x \in [0; 1],$$

$$f_y(\Phi^{(-)}(x), x) = 0.8 + 2x > 0, \quad f_y(\Phi^{(+)}(x), x) = 3.2 - 2x > 0 \quad x \in [0; 1],$$

т.е. Условие 3 также выполнено.

Уравнение (106) для точки перехода имеет вид

$$I(x) = \int_{-1}^1 (u^2 - 1)(u - (0.6 - x)) du = \frac{4}{3} (0.6 - x) = 0,$$

откуда определяем положение точки перехода  $x_0 = 0.6 \in (0; 1)$ .

Условие 4 выполняется, т.к.  $I_x(0.6) = -\frac{4}{3} \neq 0$ .

Нулевое приближение регулярного ряда

$$\bar{y}_0(x) = \begin{cases} \bar{y}_0^{(-)}(x) = -1, & x \in (0; 0.6) \\ \bar{y}_0^{(+)}(x) = 1, & x \in (0.6; 1) \end{cases}$$

Внутренний слой в нулевом приближении определяется из задачи (103), которая в данном случае имеет вид

$$\frac{d^2 \tilde{Q}}{d\xi^2} = (\tilde{Q}^2 - 1) \cdot \tilde{Q}; \quad \tilde{Q}(0) = 0, \quad \tilde{Q}(-\infty) = -1, \quad \tilde{Q}(+\infty) = 1$$

и решается точно:

$$\tilde{Q} = \tanh\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)$$

Для пограничных функций на левом конце отрезка следует записать задачу (59) или (60), на правом – (63) или (64). Эти уравнения в данном случае решаются численно. Результаты представлены на рис. 11.

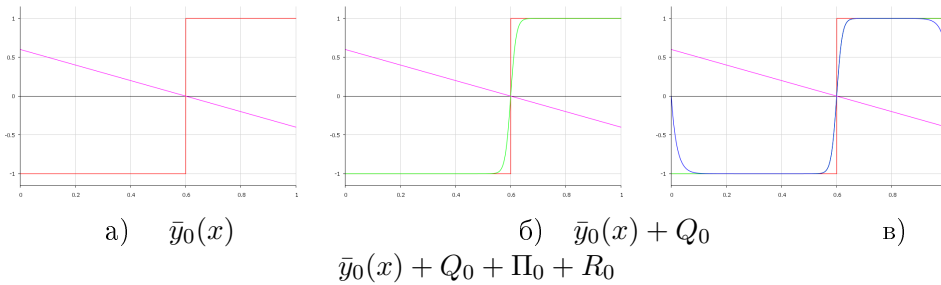


Рис. 11

## Глава 4. Нестационарные контрастные структуры: движение фронтов

Рассматривается вопрос об асимптотическом приближении решения с внутренним переходным слоем типа движущегося фронта в задаче для уравнения реакция-диффузия-адвекция в следующих случаях:

а) для уравнения типа реакция-диффузия

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, x, \varepsilon), & x \in (0; 1), & \quad t \in (0, T], \\ u_x(0, t, \varepsilon) &= 0, \quad u_x(1, t, \varepsilon) = 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1];\end{aligned}$$

б) в задаче с адвекцией

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} &= A(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(u, x), & x \in (0, 1), & \quad t \in (0, T], \\ u(0, t, \varepsilon) &= u^0, \quad u(1, t, \varepsilon) = u^1, \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), \quad x \in [0, 1].\end{aligned}$$

В отличие от стационарного случая, рассмотренного в предыдущей главе, здесь не выполнено условие баланса реакции (или адвекции) ни в одной точке рассматриваемой области. Поэтому стационарных решений с внутренними слоями не существует, а движение фронта обеспечивается:

в случае а) – дисбалансом реакции;

в случае в) – дисбалансом адвекции.

Локализация, скорость и структура фронта заранее неизвестны, и определяются в процессе построения асимптотики.

### §1. Движущиеся фронты в уравнении реакция-диффузия: предварительные замечания

## §2. Движущиеся фронты в уравнении реакция-диффузия: алгоритм построения асимптотического приближения

Пространственно-одномерное уравнение реакция-диффузия.

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, x, \varepsilon), & x \in (0; 1), & \quad t \in (0, T], \\ u_x(0, t, \varepsilon) &= 0, & u_x(1, t, \varepsilon) &= 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), & x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (112)$$

Будем искать решение в виде движущегося фронта, т.е. такое, которое близко к некоторым различным уровням справа и слева от некоторой точки  $\hat{x}(t, \varepsilon)$ , а в окрестности этой точки наблюдается узкий внутренний переходный слой (см. Рис. 1)

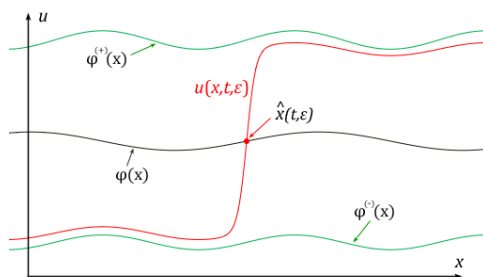


Рис. 1

Сформулируем ряд условий.

**Условие 1.** Функция  $f(u, x, \varepsilon)$  – достаточно гладкая (или бесконечно дифференцируема) в области  $D = \{y \in (A; B), x \in (0; 1)\}$ .

*Замечание.* Для построения асимптотики порядка  $N$  необходимо потребовать существования производных у функции  $f(u, x, \varepsilon)$  до порядка  $N + 1$ .

**Условие 2.** Вырожденное уравнение  $f(u, x, 0) = 0$  имеет на отрезке  $x \in [0; 1]$  три корня  $\varphi^{(-)}(x)$ ,  $\varphi^{(+)}(x)$  и  $\varphi(x)$ , причем

- 1)  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi(x) < \varphi^{(+)}(x)$
- 2)  $f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad f_u(\varphi(x), x, 0) < 0$

**Условие 3.** Предположим, что в момент  $t = 0$  фронт уже сформировался в окрестности точки  $x_{00} \in (0; 1)$ , т.е. функция  $u_{init}(x, \varepsilon)$

имеет вид

$$u_{init}(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x) + O(\varepsilon), & x \in [0, x_{00}) \\ \varphi^{(+)}(x) + O(\varepsilon), & x \in (x_{00}, 1] \end{cases} \quad (\text{см. Рис. 2})$$

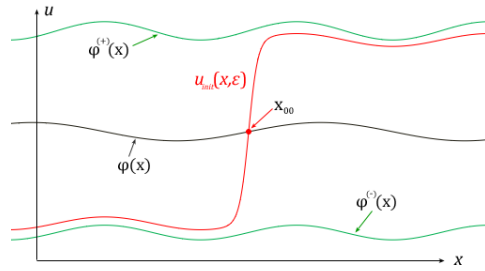


Рис. 2

Условие 3 означает, что  $\hat{x}(0, \varepsilon) = x_{00}$

*Замечание.* Вопросы формирования фронта из начального условия достаточно общего вида изучались в [?????], [?????].

**Условие 4.** Пусть

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) du > 0 \quad \text{при } x \in [0; 1]$$

*Замечание 1.* Условие 4 обеспечивает отсутствие стационарных решений задачи (112) на отрезке  $[0; 1]$ .

*Замечание 2.* Если вспомнить фазовую плоскость присоединенного уравнения (см. Главу 2)

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} = f(\tilde{u}, x, 0), \quad x\text{- параметр}, \quad (113)$$

то при выполнении Условия 4 она выглядит следующим образом



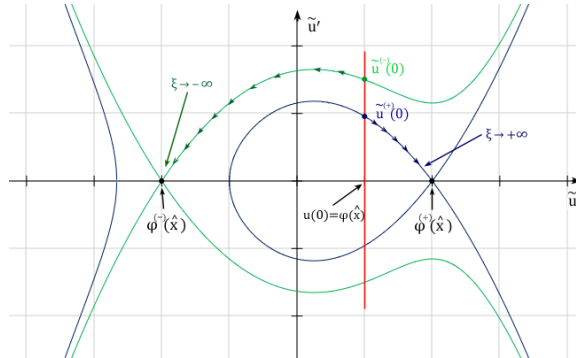


Рис. 3

т.е. ни при каком  $x \in [0; 1]$  "ячейка" на фазовой плоскости не наблюдается.

Следовательно, задача

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} = f(\tilde{u}, x, 0), \quad x \text{ - параметр,} \quad (114)$$

$$\tilde{u}(0, x) = \varphi(x), \quad \tilde{u}(-\infty, x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \tilde{u}(+\infty, x) = \varphi^{(+)}(x),$$

решений не имеет, и стационарных решений с внутренним переходным слоем также не существует.

Рассмотрим теперь другую задачу

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} + v_0 \cdot \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = f(\tilde{u}, x, 0), \quad x \text{ и } v_0 \text{ - параметры,} \quad (115)$$

$$\tilde{u}(0, x) = \varphi(x), \quad \tilde{u}(-\infty, x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \tilde{u}(+\infty, x) = \varphi^{(+)}(x),$$

где  $f(\tilde{u}, x, 0)$  удовлетворяет Условию 2.

Возможный вид фазовой плоскости представлен на Рис. 4

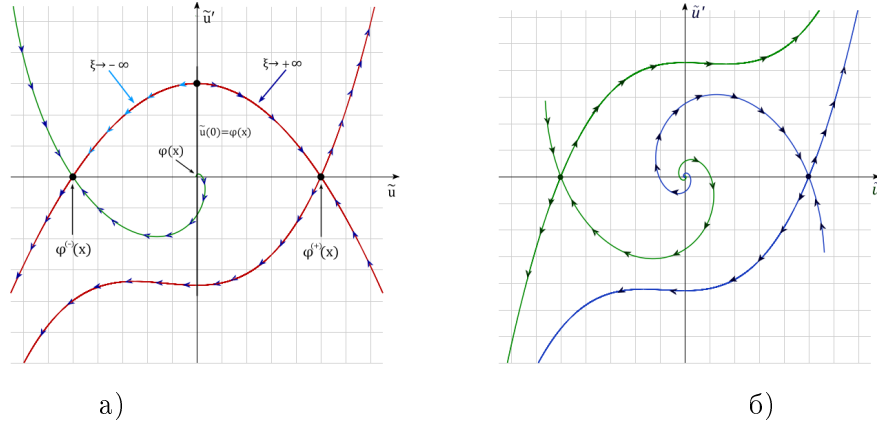


Рис. 4 Фазовая плоскость уравнения (115).

Теперь точки покоя  $(\varphi^{(\pm)}(x), 0)$  уравнения (115) являются точками покоя типа седла, а  $(\varphi(x), 0)$  в отличие от случая, рассмотренного в предыдущей главе – точка покоя типа неустойчивого фокуса (или узла), а не центра. Оказывается, что теперь подбором параметра  $v_0$  можно получить сепаратрисы, связывающие 2 седла.

Заметим, что выписать точное решение (115) не всегда возможно. В следующем примере рассмотрен случай, когда сепаратриса, соединяющая седла, и параметр  $v_0(x)$  находятся в явном виде.

*Пример.*

Пусть  $f(u, x, \varepsilon) = (u^2 - 1)(u - \varphi(x))$ , т.е.  $\varphi^{(-)}(x) = -1$ ,  $\varphi^{(+)}(x) = 1$ , и пусть  $-1 < \varphi(x) < 1$  при  $x \in [0; 1]$ . Тогда

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad f_y(\varphi(x), x, 0) < 0$$

и задача (115) имеет вид

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} + v_0 \cdot \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = (\tilde{u}^2 - 1)(\tilde{u} - \varphi(x)), \quad (116)$$

$$\tilde{u}(0, x) = \varphi(x), \quad \tilde{u}(-\infty, x) = -1, \quad \tilde{u}(+\infty, x) = 1,$$

Перепишем уравнение (116) в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = z \\ \frac{dz}{d\xi} = -v_0 \cdot z + (\tilde{u}^2 - 1)(\tilde{u} - \varphi(x)) \\ \tilde{u}(\pm\infty) = \pm 1 \end{cases} \quad (117)$$

Уравнение фазовых траекторий

$$z \frac{dz}{d\tilde{u}} + v_0 \cdot z = (\tilde{u}^2 - 1)(\tilde{u} - \varphi(x)).$$

Точки покоя системы (117) ( $\tilde{u} = -1; z = 0$ ) и ( $\tilde{u} = 1; z = 0$ ) – типа седла; уравнение сепаратрисы, их соединяющей, будем искать в виде

$$z = A \cdot (\tilde{u}^2 - 1), \quad \text{где} \quad A < 0.$$

Подставляя, получим

$$2A^2 = 1, \quad A \cdot v_0 = -\varphi(x) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_0(x) = \varphi(x)\sqrt{2}.$$

Для задачи (115) хорошо известен [6] следующий общий результат: для каждого  $x \in [0; 1]$  существует пара  $v_0(x)$  и  $\tilde{u}(\xi; x)$ , удовлетворяющие (115), причем

$$|\tilde{u}(\xi; x) - \varphi^{(\pm)}(x)| \leq C e^{-\kappa|\xi|} \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \pm\infty.$$

*Замечание.* Этот результат имеет место, когда для фазовой плоскости уравнения (115) (Рис. 3) реализуется случай а).

**Условие 5.** Пусть  $v_0(x)$  таково, что задача (115), где  $f(\tilde{u}, x, 0)$  удовлетворяет Условию 2

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} + v_0 \cdot \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = f(\tilde{u}, x, 0), \quad x \text{ и } v_0 - \text{параметры,}$$

$$\tilde{u}(0, x) = \varphi(x), \quad \tilde{u}(-\infty, x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \tilde{u}(+\infty, x) = \varphi^{(+)}(x),$$

имеет решение, т.е. существует сепаратриса, идущая из седла в седло (Рис 3а)).

Потребуем, чтобы задача Коши

$$\frac{dx}{dt} = v_0(x) \quad x(0) = x_{00} \in (0; 1)$$

имела решение  $x(t) \in (0; 1)$ .

Заметим, что выписать точное решение (115) и найти параметр  $v_0$ , а значит, эффективно получить уравнение в Условии 5, не всегда возможно. В разобранным примере был рассмотрен случай, когда это можно сделать в явном виде.

Определим положение фронта в каждый момент времени как точку пересечения решения  $u(x, t, \varepsilon)$  и среднего корня вырожденного уравнения  $\varphi(x)$  и будем описывать его координату функцией  $\hat{x}(t, \varepsilon)$  (Рис. 1).

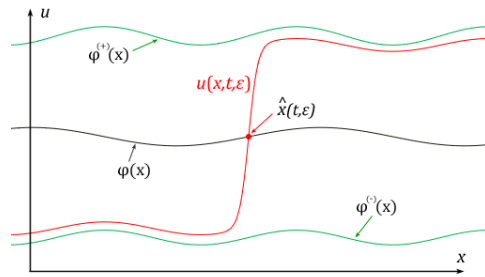


Рис. 5

Таким образом, при каждом  $t$  выполняется условие  $u(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi(\hat{x}(t, \varepsilon))$ .

Локализация фронта  $\hat{x}(t, \varepsilon)$  заранее неизвестна, и представим функцию  $\hat{x}(t, \varepsilon)$  в виде ряда

$$\hat{x}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (118)$$

Для построения асимптотики решения (112) рассмотрим две задачи

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u^{(-)}}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u^{(-)}}{\partial t} &= f(u^{(-)}, x, \varepsilon), & x \in (0; \hat{x}(t, \varepsilon)), \\ u_x^{(-)}(0, t, \varepsilon) &= 0, & u^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varphi(\hat{x}(t, \varepsilon)), \\ u^{(-)}(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), & x \in [0; \hat{x}(t)] \end{aligned} \quad (119)$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u^{(+)}}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial u^{(+)}}{\partial t} &= f(u^{(+)}, x, \varepsilon), & x \in (\hat{x}(t, \varepsilon); 1), \\ u^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= \varphi(\hat{x}(t, \varepsilon)), & u_x^{(+)}(1, t, \varepsilon) = 0, \\ u^{(+)}(x, 0, \varepsilon) &= u_{init}(x, \varepsilon), & x \in (\hat{x}(t, \varepsilon); 1] \end{aligned} \quad (120)$$

Асимптотику каждой из задач (119) и (120) строим в виде

$$u^{(\pm)} = \bar{u}^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi^{(\pm)}(\tau^{(\pm)}, \varepsilon), \quad (121)$$

где

$$\xi = \frac{x - \hat{x}(t, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \tau^{(-)} = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau^{(+)} = \frac{x - 1}{\varepsilon}$$

и назначение каждого из слагаемых очевидно.

Пограничные  $\Pi^{(\pm)}(\tau^{(\pm)}, \varepsilon)$  функции на концах отрезка строятся обычным способом и экспоненциально затухают вдали от границ. Поэтому рассмотрим подробно только процедуру определения функций  $Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon)$ , описывающих движущийся фронт.

Заметим, что в точке  $\hat{x}(t, \varepsilon)$  решения (119) и (120) согласованы до непрерывности. Потребуем выполнения условия  $C^{(1)}$ -сшивания (непрерывности производной) в этой точке:

$$\varepsilon \frac{d\bar{u}^{(-)}}{dx}(\hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) + \frac{\partial Q^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{d\bar{u}^{(+)}}{dx}(\hat{x}(t, \varepsilon), \varepsilon) + \frac{\partial Q^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon). \quad (122)$$

Для этого представим слагаемые (121) в виде рядов

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n^{(\pm)}(x) + \dots, \quad (123)$$

$$Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi, t) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, t) + \dots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi, t) + \dots \quad (124)$$

Преобразуем условие  $C^{(1)}$  - сшивания, используя введенные обозначения. Обозначим

$$H(\hat{x}, \varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{d\bar{u}^{(-)}}{dx}(\hat{x}, \varepsilon) + \frac{dQ^{(-)}}{d\xi}(0, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{d\bar{u}^{(+)}}{dx}(\hat{x}, \varepsilon) - \frac{dQ^{(+)}}{d\xi}(0, t, \varepsilon), \quad (125)$$

тогда условие  $C^{(1)}$  - сшивания примет вид

$$H(\hat{x}, \varepsilon) = 0 \quad (126)$$

Подставив сюда (123) и (124), а также  $\hat{x}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$ , представим (126) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$

$$H(\hat{x}, \varepsilon) = H_0(\hat{x}) + \varepsilon H_1(\hat{x}) + \dots = H_0(x_0(t)) + \varepsilon \left[ H_1(x_0(t)) + \frac{dH_0}{d\hat{x}}(x_0(t)) \cdot x_1 \right] + \dots, \quad (127)$$

где

$$H_0(x_0(t)) = \left. \frac{d\tilde{Q}_0^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{d\tilde{Q}_0^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0}$$

$$H_1(x_0(t)) = \left. \frac{d\tilde{Q}_1^{(-)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{d\tilde{Q}_1^{(+)}}{d\xi} \right|_{\xi=0} + \frac{d\bar{u}_0^{(-)}}{dx}(x_0(t)) - \frac{d\bar{u}_0^{(+)}}{dx}(x_0(t))$$

Таким образом, чтобы выполнить условие  $C^{(1)}$  - сшивания на каждом шаге построения асимптотики, необходимо потребовать обращения в ноль соответствующего коэффициента ряда (127).

Главные члены регулярной части асимптотики определим так:

$$\bar{u}_0(x, t) = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(x) = \varphi^{(-)}(x), & 0 \leq x \leq \hat{x}(t, \varepsilon), \\ \bar{u}_0^{(+)}(x) = \varphi^{(+)}(x), & \hat{x}(t, \varepsilon) \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (128)$$

Функции  $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$  при  $k \geq 1$  определяются из линейных алгебраических уравнений:

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) \cdot \bar{u}_k^{(\pm)} = h_k^{(\pm)}(x) \quad (129)$$

где  $h_k^{(\pm)}(x)$  - известные функции и разрешимость задач (129) обеспечивается Условием 2. В частности,  $h_1^{(\pm)}(x) = -f_\varepsilon(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0)$  и

$$\bar{u}_1^{(\pm)}(x) = -\frac{f_\varepsilon(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0)}{f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0)}.$$

*Функции переходного слоя: нулевое приближение.*

Чтобы получить уравнения для функций  $Q^{(\pm)}$ , перепишем дифференциальный оператор в уравнении (112) в переменные  $(\xi, t)$ , где

$$\xi = \frac{x - \hat{x}(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Проделав преобразование, получим

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{d\hat{x}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}.$$

Подставив это выражение, а также (123) - (124) в задачи (119) - (120) и приравняв коэффициенты при степенях  $\varepsilon$ , выпишем уравнения для функций  $Q_i^{(\pm)}(\xi, t), i = 0, 1, \dots$

В нулевом приближении получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(-)}}{\partial \xi^2} + \frac{d\hat{x}}{dt} \cdot \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi} &= f(\varphi^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(-)}, \hat{x}(t, \varepsilon), 0), & \xi < 0 \\ Q_0^{(-)}(0, t) &= \varphi(\hat{x}(t, \varepsilon)) - \varphi^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon)), & Q_0^{(-)}(-\infty, t) = 0, \end{aligned} \quad (130)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(+)}}{\partial \xi^2} + \frac{d\hat{x}}{dt} \cdot \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi} &= f(\varphi^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(+)}, \hat{x}(t, \varepsilon), 0), & \xi > 0 \\ Q_0^{(+)}(0, t) &= \varphi(\hat{x}(t, \varepsilon)) - \varphi^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon)), & Q_0^{(+)}(+\infty, t) = 0, \end{aligned} \quad (131)$$

Введем новую функцию

$$\tilde{Q}(\xi, \hat{x}(t, \varepsilon)) = \begin{cases} \tilde{Q}^{(-)}(\xi, \hat{x}(t, \varepsilon)) = \varphi^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(-)}(\xi, t), & \xi < 0 \\ \tilde{Q}^{(+)}(\xi, \hat{x}(t, \varepsilon)) = \varphi^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon)) + Q_0^{(+)}(\xi, t), & \xi > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что  $\tilde{Q}(\xi, \hat{x}(t, \varepsilon))$  – непрерывная функция. Теперь задачи (130) и (131) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \xi^2} + \frac{d\hat{x}}{dt} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi} = f(\tilde{Q}, \hat{x}(t, \varepsilon), 0) \quad (132)$$

$$\tilde{Q}(0, \hat{x}(t, \varepsilon)) = \varphi(\hat{x}(t, \varepsilon)),$$

$$\tilde{Q}(-\infty, \hat{x}(t, \varepsilon)) = \varphi^{(-)}(\hat{x}(t, \varepsilon)), \quad \tilde{Q}(+\infty, \hat{x}(t, \varepsilon)) = \varphi^{(+)}(\hat{x}(t, \varepsilon))$$

Задача (132) совпадает с (115) (см. Условие 5).

**Условие 5.** Пусть  $v_0(x)$  таково, что задача

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\xi^2} + v_0 \cdot \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = f(\tilde{u}, x, 0), \quad x \text{ и } v_0 - \text{параметры,}$$

$$\tilde{u}(0, x) = \varphi(x), \quad \tilde{u}(-\infty, x) = \varphi^{(-)}(x), \quad \tilde{u}(+\infty, x) = \varphi^{(+)}(x),$$

имеет решение, т.е. существует сепаратриса, идущая из седла в седло.

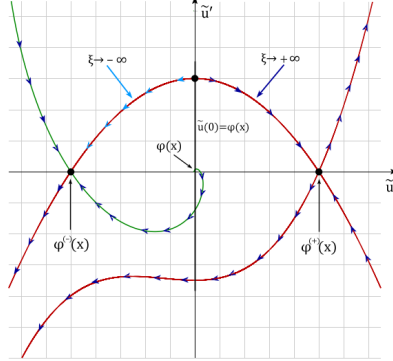


Рис. 6

Следовательно, если положить  $\frac{d\hat{x}}{dt} = v_0$ , найденному в (115), то условие согласования производной будет выполнено.

Итак, нулевое приближение координаты фронта определяется решением задачи Коши

$$\frac{dx_0}{dt} = v_0(x_0), \quad x_0(0) = x_{00}, \quad (133)$$

которая разрешима в силу Условия 5.

*Функции переходного слоя: асимптотика первого порядка.*

Для определения регулярных слагаемых  $\bar{u}_1^{(\pm)}(x)$  получим уравнения  $f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) \cdot \bar{u}_1^{(\pm)} + f_\varepsilon(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) = 0$ , которые разрешимы в силу Условия 2.

Для функций переходного слоя  $Q_1^{(\pm)}$  имеем линейные уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + \frac{d\hat{x}}{dt} \cdot \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u \cdot Q_1^{(\pm)} = q_1(\xi, t) \equiv \\ & \equiv \frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, t)}{\partial t} + \left[ \tilde{f}_x + \tilde{f}_u \cdot \frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x}) \right] \cdot \xi + \tilde{f}_u \cdot \bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) + \tilde{f}_\varepsilon \end{aligned} \quad (134)$$

с дополнительными условиями

$$Q_1^{(\pm)}(0, t) = -u_1^{(\pm)}(\hat{x}(t, \varepsilon), \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, t) = 0. \quad (135)$$



В (134) символ  $\tilde{g}$  означает функцию, зависящую от аргумента  $(\tilde{Q}(\xi), \hat{x}, 0)$ .

Обозначив  $\Phi(\xi, t) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \xi}$ ,  $v = \frac{d\hat{x}}{dt}$  запишем решение (134) с условиями (135) в явном виде (функция  $q_1(\xi, t)$  определена в (134)):

$$Q_1^{(\pm)}(\xi, t) = \frac{\Phi(\xi, t)}{\Phi(0, t)} Q_1^{(\pm)}(0, l) - \Phi(\xi, t) \int_0^\xi \frac{e^{-v_0 \eta}}{\Phi^2(\eta, t)} \int_\eta^{\pm\infty} \Phi(\tau, t) e^{v_0 \tau} q_1(\tau, t) d\tau d\eta \quad (136)$$

Условие  $C^{(1)}$  - сшивания (127) в первом приближении по  $\varepsilon$  дает

$$\left. \frac{\partial Q_1^{(+)}(\xi, l)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_1^{(-)}(\xi, l)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{d\varphi^{(-)}}{dx} - \frac{d\varphi^{(+)}}{dx} \right|_{x=\hat{x}}. \quad (137)$$

Подставляя производные  $\left. \frac{\partial Q_1^{(\pm)}(\xi, l)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ , вычисленные из (136) в (137), получим линейную задачу Коши для  $x_1(t)$ :

$$\frac{dx_1}{dt} = B(t) \cdot x_1 + R(t), \quad \lambda_1(0) = 0, \quad (138)$$

где  $B(t)$  и  $R(t)$  – известные функции, не зависящие от  $x_1(t)$  и ее производных.

Продолжая процедуру, в следующих порядках по  $\varepsilon$  получим линейные задачи для  $Q_i^{(\pm)}(\xi, t)$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , а также линейные задачи Коши типа (138) для  $x_i(t)$ ,  $i = 2, 3, \dots$

*Основной результат.*

Обозначим  $X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k(t)$ ,  $Y_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k^{(\pm)} + Q_k^{(\pm)} + \Pi_k + R_k)$ .

**Теорема.** При выполнении Условий 1-5 и достаточно малых  $\varepsilon$  существует решение  $y(x, \varepsilon)$  задачи (112), имеющее вид контрастной структуры, причем

$$y(x, t, \varepsilon) = Y_n(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Идея доказательства представлена на Рис. 7.

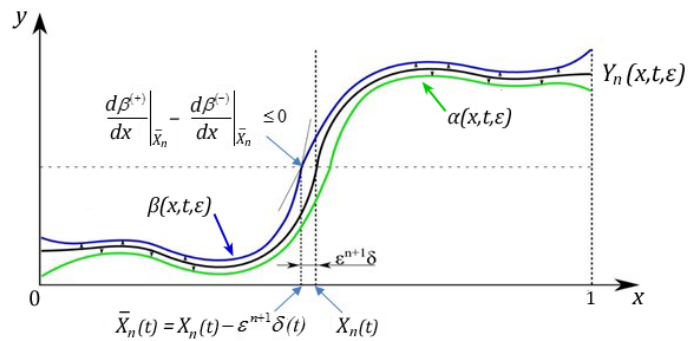


Рис. 7 *Иллюстрация к доказательству теоремы.*

### §3. Движущиеся фронты в задачах с адвекцией

## Список литературы

- [1] *Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в сингулярно возмущенных задачах. Ярославль: ЯрГУ, 2014.
- [2] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
- [3] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [4] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // *Фундаментальная и прикладная математика.* 1998. Т.4, №3, с. 799–851.
- [5] *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. // *Математический сборник.* 1952. Т. 31(73), №3, с. 147–156.
- [6] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур, // *Автоматика и телемеханика,* 1997, №7, С. 4–32.
- [7] *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущенных задач в частных производных // *Дифференциальные уравнения.* 1995. Т.31, №4, с. 718–722.
- [8] *Н.Н. Нефедов, Ю. В. Божевольнов.* Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия. *Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ.,* 2010, том 50, №2, сс. 276–285.
- [9] *Н.Т. Левашова, Н.Н. Нефёдов, А.В. Ягремцев* Контрастные структуры в уравнениях реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной адвекции. *Журнал вычислительной математики и математической физики,* 2013, том 53, №3, с. 365-376.
- [10] *Бутузов В.Ф.* Контрастные структуры типа всплеска в параболической системе двух сингулярно возмущенных уравнений. // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1997. Т. 37. №4. С. 415–428.
- [11] *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. // *Дифференц. уравнения.* 1995. Т.31. №7. С. 1142–1149.

- [12] *Sattinger, D.H.*, Monotone Methods in Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems, Indiana Univ. Math. J., vol. 21. no. 11. pp. 979–1001 (1972)
- [13] *Нефедов Н.Н.* Общая схема асимптотического исследования устойчивых контрастных структур. //Нелинейная динамика. 2010. Т.6. №1. С.181–186.
- [14] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, 2010, т. 268, с. 268-283.
- [15] *Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 405 (2013), pp. 90-103.