Схема переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольной области

Рассмотрим в качестве примера задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + e^t(x^2-1)\cos y; \quad x \in (-1,1), y \in (0,\pi), t \in (0,T] \tag{1}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0; \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = 0; \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

Первым шагом ее численного решения является введение сетки в области $\Omega = G \otimes [0,T]$:

$$G = \{(x,y); \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$$

$$\bar{\omega}_h = \{(x_{i_1}, y_{i_2});\ x_{i_1} = -1 + i_1 h_1,\ i_1 = 0,1,...,N_1,\ h_1 N_1 = 2;$$

$$y_{i_2} = i_2 h_2,\ i_2 = 0,1,...,N_2,\ h_2 N_2 = \pi\}$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau;\ j = 0,1,...,J,\ J\tau = T\}$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \otimes \bar{\omega}_\tau$$

с шагом h_1 по x, шагом h_2 по y и шагом τ по времени. На введенной сетке будем рассматривать сеточные функции $w^j_{i_1,i_2}$.

Вторым шагом является разностная апроксимация оператора Лапласа:

$$\Lambda w = \Lambda_1 w + \Lambda_2 w,$$

где

$$\Lambda_1 w = \frac{w_{i_1-1,i_2} - 2w_{i_1,i_2} + w_{i_1+1,i_2}}{h_1^2}; \quad \Lambda_2 w = \frac{w_{i_1,i_2-1} - 2w_{i_1,i_2} + w_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} \tag{5}$$

В выражениях (5) для краткости индекс j опущен.

Уравнение для сеточной функции $w^j_{i_1,i_2}$ можем взять в виде

$$\frac{w^{j+1} - w^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma w^{j+1} + (1-\sigma)w^j\right) + f^{j+1/2},$$

где $f^{j+1/2} = e^{t_{j+1/2}}(x^2-1)\cos y$.

Начальное условие для функции $w^j_{i_1,i_2}$ получаем непосредственно из (4):

$$w^0_{i_1,i_2} = 0 \text{ для всех } i_1 = 0,1,...,N_1,\ i_2 = 0,1,...,N_2.$$

Граничные условия (2) апроксимируются точно:

$$w_{0,i_2} = 0,\ w_{N_1,i_2} = 0 \text{ для всех } i_2 = 0,1,...,N_2. \tag{6}$$

Граничные условия (3) могут быть апроксимированы с помощью односторонней разностной производной:

$$\frac{w_{i_1,1} - w_{i_1,0}}{h_2} = 0, \ \frac{w_{i_1,N_2} - w_{i_1,N_2-1}}{h_2} = 0 \text{ для всех } i_1 = 0, 1, ..., N_1. \tag{7}$$

Однако порядок апроксимации в этом случае будет лишь $O(h_2)$.

При решении многомерной задачи методом сеток большое значение имеет объем вычислений, то есть число арифметических действий для решения задачи с требуемой точностью. Явная ($\sigma = 0$) и неявная ($\sigma = 1$) схемы имеют одинаковый порядок точности. При использовании явной схемы число $Q_{\text{яв}}$ действий для определения w^{j+1} во всех узлах ω_h на слое $t = t_{j+1}$ пропорционально числу узлов сетки:

$$Q_{\text{яв}} = O\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right),$$

но явная схема лишь условно устойчива. В случае неявной схемы для определения w^{j+1} нужно решать систему уравнений, число которых пропроционально числу узлов сетки, то есть

$$Q_{\text{неяв}} = O\left(\frac{1}{(h_1 h_2)^2}\right),$$

но неявная схема безусловно устойчива. Так называемые экономичные разностные схемы, к числу которых относится и схема переменных направлений, сочетает достоинства явных и неявных схем (объем работы $Q_{\text{яв}} = O\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right)$ и безусловная устойчивость).

Разностная апроксимация уравнения (1) в схеме переменных направлений имеет вид:

$$\frac{w^{j+1/2} - w^j}{0.5\tau} = \Lambda_1 w^{j+1/2} + \Lambda_2 w^j + f^{j+1/2}, \tag{8}$$

$$\frac{w^{j+1} - w^{j+1/2}}{0.5\tau} = \Lambda_1 w^{j+1/2} + \Lambda_2 w^{j+1} + f^{j+1/2}, \tag{9}$$

Переход от слоя j к слою $j+1$ совершается в два этапа с шагами 0.5τ: сначала решается уравнение (8), неявное по направлению x и явное по направлению y, а затем уравнение (9), явное по направлению x и неявное по направлению y. Значение $w^{j+1/2}$ является промежуточным и играет вспомогательную роль. Схема переменных направлений безусловно устойчива при любых шагах h_1, h_2 и τ.

Рассмотрим подробнее переход со слоя j на промежуточный слой $j+1/2$. Используя явный вид разностных операторов Λ_1 и Λ_2, приходим к краевой задаче:

$$0.5\gamma_1 w^{j+1/2}_{i_1-1,i_2} - (1+\gamma_1) w^{j+1/2}_{i_1,i_2} + 0.5\gamma_1 w^{j+1/2}_{i_1+1,i_2} = -F^{j+1/2}_{i_1,i_2};$$

$$w^{j+1/2}_{0,i_2} = 0; \quad w^{j+1/2}_{N_1,i_2} = 0;$$

где $\gamma_\alpha = \dfrac{\tau}{h_\alpha^2}$, $\alpha = 1, 2$ и

$$F^{j+1/2}_{i_1,i_2} = 0.5\gamma_2 \left(w^j_{i_1,i_2-1} + w^j_{i_1,i_2+1}\right) + (1-\gamma_2) w^j_{i_1,i_2} + 0.5\tau f^{j+1/2}$$

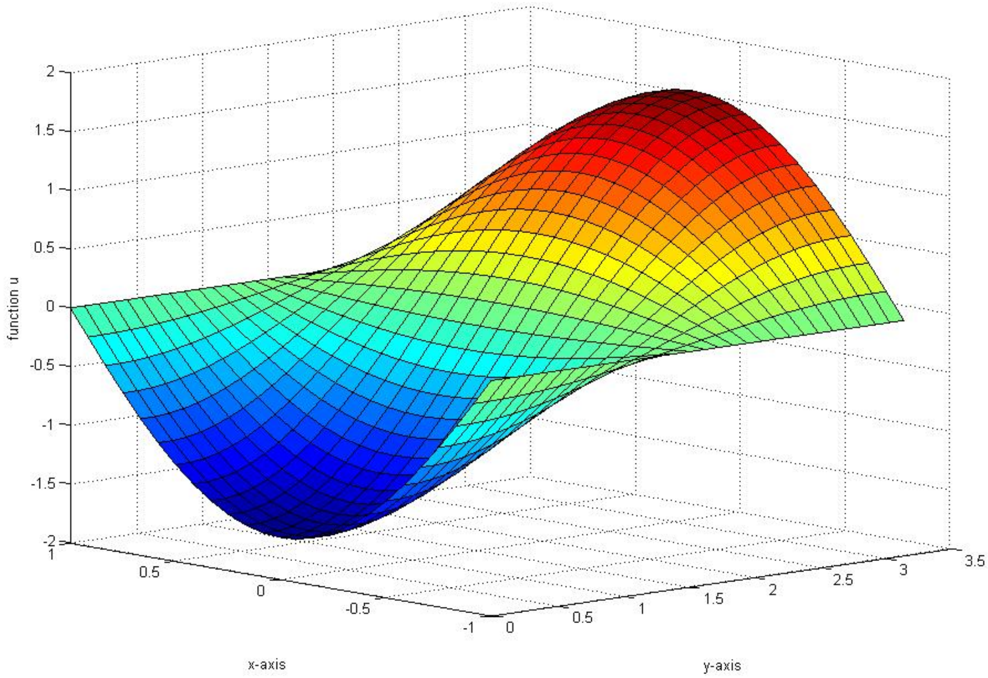

Рис. 1: График зависимости функции u от координат x и y в момент времени $t = 2$.

Эта задача решается с помощью метода прогонки (см., например, Тихонов А.Н., Самарский А.А. "Уравнения математической физики") при каждом фиксированном $i_2 = 1, 2, ..., N_2 - 1$. В результате получаем значения $w^{j+1/2}$ во всех узлах сетки ω_h.
Для того, чтобы осуществить переход со слоя $j + 1/2$ на слой j, необходимо решить краевую задачу

$$0.5\gamma_2 w^{j+1}_{i_1,i_2-1} - (1+\gamma_2) w^{j+1}_{i_1,i_2} + 0.5\gamma_2 w^{j+1}_{i_1,i_2+1} = -F^{j+1}_{i_1,i_2};$$

$$w^{j+1}_{i_1,1} - w^{j+1}_{i_1,0} = 0; \quad w^{j+1}_{i_1,N_2} - w^{j+1}_{i_1,N_2-1} = 0;$$

где

$$F^{j+1}_{i_1,i_2} = 0.5\gamma_1 \left(w^{j+1/2}_{i_1-1,i_2} + w^{j+1/2}_{i_1+1,i_2} \right) + (1-\gamma_1) w^{j+1/2}_{i_1,i_2} + 0.5\tau f^{j+1/2}$$

Как и в предыдущем случае, она решается методом прогонки при каждом фиксированном $i_1 = 1, 2, ..., N_1 - 1$. В результате получаем значение w^{j+1} на новом слое. При переходе от слоя $j + 1$ к слою $j + 2$ процедура повторяется.

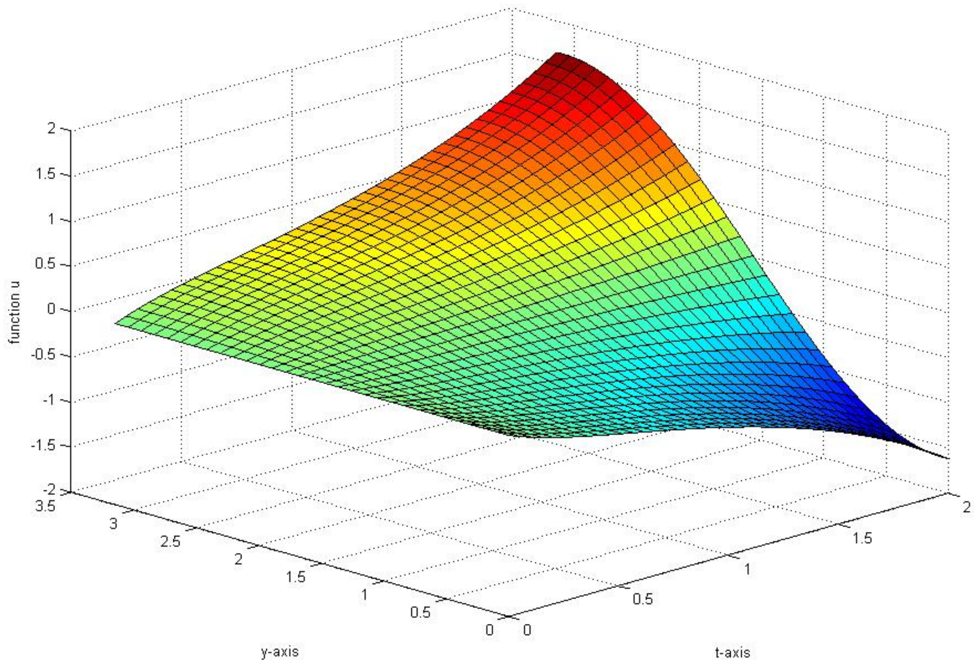

Рис. 2: Зависимость функции u от времени t и координаты y при фиксированном $x = 0$.

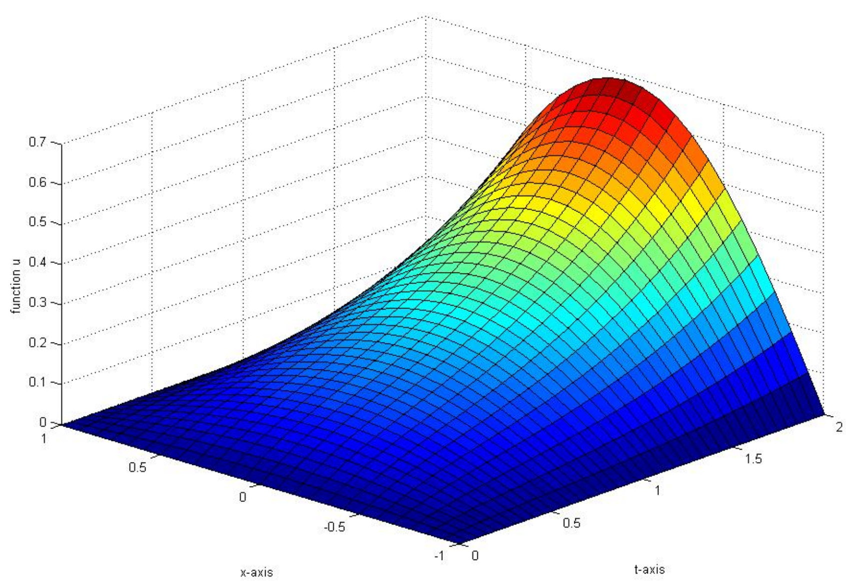

Рис. 3: Зависимость функции u от времени t и координаты x при фиксированном $y = 2\pi/3$.