Глава III. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов

§2 Математические модели теории нелинейных волн

Обобщенное решение. Условие на разрыве

Формула интегрирования по частям:

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \oint_\Gamma uv \cos(x_k \overset{\wedge}{,} n) ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx$$

Где $D \in R^m$ - область с гладкой (или хотя бы кусочно-гладкой границей) Г, $x = (x_1, \ldots, x_n), (x_k \overset{\wedge}{,} n)$ - угол между осью 0x$_k$ и внешней нормалью к поверхности Г. Формула справедлива для функций $u, v \in C^{(1)}\left(\overline{D}\right)$.

Так как $\operatorname{supp}\psi \subset \Pi_{x,t}$, то интеграл в подстановке берется только по кривой S. Имеем:

$$\int_{\Pi_{xt}^{(l)}} \{u_t + uu_x\}\psi dxdt = 0 \quad npu \quad l = 1,2$$

$$\int_{\Pi_{xt}^{(1)}} \{u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x\}dxdt =$$

$$= \int_S \{\psi \cos(n^\wedge t)u^- + \psi \cos(n^\wedge x)\frac{(u^-)^2}{2}\}ds - \int_{\Pi_{xt}^{(1)}} \underbrace{\{u_t + uu_x\}}_{=0}\psi dxdt$$

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(2)}} \{u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x\}dxdt =$$

$$= -\int\limits_S \{\psi \cos(n^\wedge t)u^+ + \psi \cos(n^\wedge x)\frac{(u^+)^2}{2}\}ds - \int\limits_{\Pi_{xt}^{(2)}} \{\underbrace{u_t + uu_x}_{=0}\}\psi\, dxdt$$

Сложим эти уравнения:

$$\int\limits_{\Pi_{xt}} \{\underbrace{u_t + uu_x}_{=0}\}\psi\, dxdt =$$

$$= \int\limits_S \psi \left\{ \cos(n^\wedge t)[u] + \cos(n^\wedge x)\left[\frac{u^2}{2}\right]\right\} ds = 0$$

$$\forall\, \psi, \operatorname{supp}\psi \in \Pi_{xt} \Rightarrow \cos(n^\wedge t)[u] + \cos(n^\wedge x)\left[\frac{u^2}{2}\right]\Big|_S = 0 \quad (15)$$

$$\cos(n^\wedge t) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}}; \quad \cos(n^\wedge x) = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{s}^2(t)}} \qquad (16)$$

$$(15),(16) \quad \Rightarrow \quad -\dot{s}(t)[u] + \left[\frac{u^2}{2}\right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{s}(t)(u^+ - u^-) = \frac{(u^+)^2 - (u^-)^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2} \qquad (17)$$

Солитонные решения

Рассмотрим задачу Коши (25):

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \qquad (25)$$

где

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \qquad (29)$$

Линейное интегральное уравнение Гельфанда-Левитана:

$$K(x,y;t) + B(x+y;t) + \int_x^{\infty} D(y+z;t)K(x,z;t)dz = 0 \quad (23)$$

Ядро уравнения Гельфанда-Левитана:

$$B(x,t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(t)e^{-\chi_m x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,t)e^{ikt}dk \qquad (22)$$

Данные рассеяния для задачи (25), (29):

существует только одно собственное значение $\lambda_1 = -1 = -\chi_1^2$,

$c_1(t) = \sqrt{2}e^{4t}, \; b(k,0) = 0 \;\; \Rightarrow \;\; b(k,t) = b(k,0)e^{i8k^3t} = 0.$

Ядро уравнения Гельфанда-Левитана имеет вид

$$B(x,t) = 2e^{8t-x} \qquad (31)$$

Уравнение Гельфанда-Левитана с ядром (31)

$$K(x,y;t)+2e^{8t-x-y}+2e^{8t-y}\int_x^\infty K(x,z;t)e^{-z}dz=0 \quad (32)$$

Ищем решение в виде

$$K(x,y;t)=L(x;t)e^{-y} \Rightarrow \quad (33)$$

$$L(x;t)e^{-y}+2e^{8t-x-y}+2e^{8t}e^{-y}\int_x^\infty L(x;t)e^{-2z}dz=0 \quad \Rightarrow$$

$$L(x;t)+2e^{8t-x}+2e^{8t}L(x;t)\int_x^\infty e^{-2z}dz=0$$

$$L(x;t)+2e^{8t-x}+2e^{8t}L(x;t)\left(-\frac{1}{2}e^{-2z}\Big|_x^\infty\right)=0$$

$$L(x;t)+2e^{8t-x}+2e^{8t}L(x;t)\frac{e^{-2x}}{2}=0$$

$$L(x;t)+2e^{8t-x}+e^{8t-2x}L(x;t)=0$$

$$(1+e^{8t-2x})L(x;t)=-2e^{8t-x}$$

$$L(x;t)=-\frac{2e^{8t-x}}{1+e^{8t-2x}}\frac{e^{2x-8t}}{e^{2x-8t}}=-\frac{2e^{x}}{e^{2x-8t}+1}$$

$$L(x;t)=-\frac{2e^{x}}{1+e^{2x-8t}} \quad (34)$$

Отсюда

$$K(x,y;t)=L(x,t)e^{-y}=-\frac{2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}} \qquad (35)$$

и по формуле (24) получаем решение задачи Коши (25), (29):

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x;t) \quad \Rightarrow$$

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{1+e^{2x-8t}}\right)=4\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{2x-8t}}\right)=-4\frac{e^{2x-8t}2}{\left(1+e^{2x-8t}\right)^2}=$$

$$=-2\frac{e^{2(x-4t)}}{e^{2(x-4t)}\left(\dfrac{e^{-(x-4t)}+e^{(x-4t)}}{2}\right)^2}=-\frac{2}{ch^2(x-4t)} \qquad (36)$$

Решение (36) является частными случаем более общего решения уравнения Кортевега- де Фриза

$$u(x,t)=-\frac{1}{2}\alpha^2\frac{1}{ch^2\left(\dfrac{1}{2}\alpha(x-x_0)-\dfrac{\alpha^3}{2}t\right)}. \qquad (37)$$

Оно соответствует значениям параметров

$$\alpha=2\,;\;x_0=0$$