

## Глава III. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов

### §1 Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения

#### Автомодельные решения

Автомодельное решение вида (3) квазилинейного уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющее условиям (2):

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1) \quad u(0,t) = u_1, u(x,0) = u_2 \quad (2)$$

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{t}}, u(x,t) = \theta \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) = \theta(\xi) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{x}{4t^{3/2}} \theta'(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \theta'(\xi)$$

$$(1) \Rightarrow -c\rho \frac{x}{4t^{3/2}} \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{4t} \frac{d}{d\xi} \left( k(\theta) \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right) \Rightarrow$$

$$-c\rho \frac{x}{\sqrt{t}} \theta'(\xi) = \left( k(\theta) \theta'(\xi) \right)', \quad \frac{x}{\sqrt{t}} = 2\xi \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (k(\theta) \theta'(\xi))' = -2c\rho \xi \theta'(\xi), & \xi > 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \theta(0) = u_1; & \theta(\infty) = u_2 \end{cases} \quad (5)$$

Задача (4), (5) имеет единственное решение, которое в общем случае находится численно.

**Автомодельное решение уравнения (1) типа бегущей волны:**

$$\xi = x - Dt, \quad u(x, t) = \theta(x - Dt) = \theta(\xi) \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -D \cdot \theta'(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \theta'(\xi)$$

$$(1) \Rightarrow -c\rho D \cdot \theta'(\xi) = (k(\theta)\theta'(\xi))' \quad (7)$$

Ищем непрерывное решение, обладающее непрерывным «тепловым потоком»:

$$k(\theta)\theta'(\xi) \Rightarrow W(x, t) = -k(u(x, t)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (8)$$

Начало движения по нулевому фону температуры:

$$\theta(\xi) \rightarrow 0, \xi \rightarrow \infty; \quad k(\theta)\theta'(\xi) \rightarrow 0, \xi \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$(7), (9) \Rightarrow -c\rho D \cdot \theta(\alpha) \Big|_{\xi}^{\infty} = \int_{\xi}^{\infty} (k(\theta)\theta'(\alpha))' d\alpha \Rightarrow$$

$$-c\rho D \cdot \theta(\alpha) \Big|_{\xi}^{\infty} = k(\theta)\theta'(\alpha) \Big|_{\xi}^{\infty} \Rightarrow$$

$$-c\rho D \cdot \theta(\xi) = k(\theta)\theta'(\xi) \Rightarrow \frac{k(\theta)}{\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = -D \cdot c\rho \quad (10)$$

Пусть:

$$k(u) = k_0 u^\sigma \Rightarrow k(\theta) = k_0 \theta^\sigma, \quad k_0 > 0, \quad \sigma > 0.$$

Тогда решение уравнения (10) имеет вид:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left[ \frac{\sigma D c \rho}{k_0} (-\xi) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi \leq 0, \\ 0, & \xi > 0. \end{cases} \quad (11)$$

Из формул (6) и (11) получим:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left( 1 - \frac{x}{Dt} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leq x \leq Dt, \\ 0, & x > Dt. \end{cases} \quad (12)$$

где

$$u_0 = \left( \frac{\sigma D^2 c \rho}{k_0} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Функция (12) не имеет всюду непрерывных производных, входящих в уравнение (1).

Тепловой поток является непрерывной функцией:

$$u = u_0 t^{1/\sigma} \left(1 - \frac{x}{D \cdot t}\right)^{1/\sigma}, \quad 0 \leq x \leq Dt,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}} + u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\sigma} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \frac{x}{Dt^2} =$$

$$= \frac{u_0}{\sigma} t^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(1 - \frac{x}{Dt} + t \frac{x}{Dt^2}\right) = \frac{u_0}{\sigma} t^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(-\frac{1}{Dt}\right) = -\frac{u_0}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{u_0}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-2} \left(-\frac{1}{Dt}\right) = \frac{u_0}{\sigma D^2} t^{\frac{1}{\sigma}-2} \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-2}$$

$$W = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x} = -k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = k_0 u_0^\sigma t \left(1 - \frac{x}{Dt}\right) \frac{u_0}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}-1} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} =$$

$$= \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 \leq x \leq Dt$$

$$\sigma = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{D}$$

$$\sigma = 2: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_0}{2} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{2D} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{Dt}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_0}{D^2} t^{-\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{x}{Dt} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$1) \underline{\sigma=1}: u(x,t) = u_0 t \left( 1 - \frac{x}{D \cdot t} \right) = u_0 \left( t - \frac{x}{D} \right), \quad 0 \leq x \leq D \cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{D} = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq D \cdot t; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x > D \cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq D \cdot t; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x > D \cdot t$$

На прямой  $x = D \cdot t$  первые производные функции  $u(x,t)$  имеют разрыв первого рода.

$$2) \underline{\sigma=2}: u(x,t) = u_0 t^{1/2} \left( 1 - \frac{x}{D \cdot t} \right)^{1/2} = u_0 \left( t - \frac{x}{D} \right)^{1/2}, \quad 0 \leq x \leq D \cdot t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0}{2} \frac{1}{\sqrt{t - \frac{x}{D}}} \left( -\frac{1}{D} \right), \quad 0 \leq x \leq D \cdot t; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x > D \cdot t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_0}{2} \frac{1}{\sqrt{t - \frac{x}{D}}}, \quad 0 \leq x \leq D \cdot t; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad x > D \cdot t$$

На прямой  $x = D \cdot t$  первые производные функции  $u(x,t)$  имеют разрыв второго рода.

$$3) W(x,t) = \begin{cases} \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}} \left( 1 - \frac{x}{Dt} \right)^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leq x \leq Dt, \\ 0, & x > Dt. \end{cases} \quad (13)$$

Тепловой поток  $W(x,t)$  непрерывен при  $x=Dt$ .

**Рассмотрим задачу (14)-(15):**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x > 0, t > 0, \quad (14) \\ u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0 \quad (15) \\ u(0, t) = u_0 t^m, \quad t \geq 0, m > 0 \quad (16) \end{array} \right.$$

**Автомодельное решение вида (17):**

$$\xi = \frac{x}{\frac{1}{k_0^2} \frac{\sigma}{u_0^2} \frac{(1+m\sigma)}{t^2}}, \quad u(x, t) = u_0 t^m \theta(\xi) \quad (17)$$

$$u_t = k_0 u^\sigma u_{xx} + k_0 \sigma u^{\sigma-1} (u_x)^2$$

$$u_x = u_0 t^m \theta' \xi_x, \quad u_{xx} = u_0 t^m \theta'' (\xi_x)^2 \quad \text{так как} \quad \xi_{xx} = 0$$

$$\xi_t = -\frac{x \frac{1+m\sigma}{2}}{k_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(3+m\sigma)/2}} = -\frac{\overset{=\xi}{x}}{k_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(1+m\sigma)/2}} \frac{1+m\sigma}{2t} = -\frac{1+m\sigma}{2} \frac{\xi}{t}$$

$$\xi_x = -\frac{1}{k_0^{1/2} u_0^{\sigma/2} t^{(1+m\sigma)/2}} \quad ; \quad \xi_{xx} = 0.$$

$$u_0 m t^{m-1} \theta - u_0 \frac{1+m\sigma}{2} \xi t^{m-1} \theta' = \frac{k_0 u_0^\sigma t^{m\sigma} \theta^\sigma u_0 t^m \theta''}{k_0 u_0^\sigma t^{m\sigma+1}} + \frac{k_0 \sigma u_0^{\sigma-1} t^{m(\sigma-1)} \theta^{\sigma-1} u_0^2 t^{2m} (\theta')^2}{k_0 u_0^\sigma t^{m\sigma+1}} =$$

$$= \theta^\sigma u_0 t^{m-1} \theta'' + u_0 \sigma t^{m-1} \theta^{\sigma-1} (\theta')^2 \Rightarrow m\theta - \frac{1+m\sigma}{2} \xi \theta' = \theta^\sigma \theta'' + \sigma \theta^{\sigma-1} (\theta')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\theta^\sigma \theta'' + \sigma \theta^{\sigma-1} (\theta')^2} + \frac{1+m\sigma}{2} \xi \theta' - m\theta = 0$$

Для искомой функции получаем задачу:

$$\left(\theta^\sigma \theta'\right)' + \frac{1}{2}(1+m\sigma)\xi\theta' - m\theta = 0, \quad \xi > 0, \quad (18)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty) = 0. \quad (19)$$

Непрерывность теплового потока.

### Режимы с обострением

Задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = k_0 \left(u^2 u_x\right)_x + q_0 u^\beta, & -\infty < x < \infty, 0 < t \leq T, & (1) \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty. & (2) \end{cases}$$

Преобразование переменных:

$$t \rightarrow \frac{t}{q_0}, \quad x \rightarrow x \sqrt{\frac{k_0}{q_0}} \quad (3)$$

Уравнение (1) в безразмерном виде:

$$u_t = \left(u^2 u_x\right)_x + u^\beta \quad (4)$$

Частный случай уравнения (4):

$$u_t = \left(u^2 u_x\right)_x \quad (5)$$

Точное автомодельное решение вида

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/4}} \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x^2}{\sqrt{t}}, \quad (6)$$

$$u_t = (u^2 u_x)_x = u^2 u_{xx} + 2(u_x)^2 u$$

$$u_t = -\frac{1}{4} \frac{1}{t^{5/4}} \theta(\xi) + \frac{1}{t^{1/4}} \theta' \left( -\frac{x^2}{2t^{3/2}} \right)$$

$$u_x = -\frac{1}{t^{1/4}} \theta' \frac{2x}{t^{1/2}}; \quad u_{xx} = \frac{1}{t^{1/4}} \theta' \frac{2}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/4}} \theta'' \frac{4x^2}{t}$$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{t^{5/4}} \theta - \frac{x^2}{2t^{7/4}} \theta' = \frac{1}{t^{1/2}} \theta^2 \frac{1}{t^{1/4}} \theta' \frac{2}{t^{1/2}} + \frac{1}{t^{1/2}} \theta^2 \frac{1}{t^{1/4}} \theta'' \frac{4x^2}{t} + 2 \frac{1}{t^{1/2}} (\theta')^2 \frac{4x^2}{t} \frac{\theta}{t^{1/4}} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4} \theta - \frac{x^2}{2t^{1/2}} \theta' = 2\theta^2 \theta' + \frac{4x^2}{t^{1/2}} \theta^2 \theta'' + 2(\theta')^2 \frac{4x^2}{t^{1/4}} \frac{\theta}{t^{1/4}}$$

$$2\theta^2 \theta' + \frac{1}{4} \theta = -\frac{x^2}{2t^{1/2}} \theta' - \frac{4x^2}{t^{1/2}} \theta^2 \theta'' - 8(\theta')^2 \theta \frac{x^2}{t^{1/2}} = -\frac{\xi}{2} \theta' - 4\xi \theta^2 \theta'' - 8(\theta')^2 \theta \xi$$

$$\psi = 2\theta^2 \theta' + \frac{1}{4} \theta \quad ; \quad 2\xi \psi' = 4\xi \theta^2 \theta'' + 8\xi \theta (\theta')^2 + \frac{\xi}{2} \theta' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \psi = -2\xi \psi' \Rightarrow 2\xi \psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0$$

Таким образом из формул (5) и (6) получаем:

$$2\theta^2(\xi) \theta'(\xi) + \frac{1}{4} \theta(\xi) = \psi(\xi),$$

где  $2\xi \psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0.$



Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий  $\beta=3$ :

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^3 \quad (8)$$

Автомодельное решение (8) ищется в виде:

$$u = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} \theta(x) \quad (9)$$

$$u_t = \frac{1}{2(T_0 - t)^{3/2}} \theta(x), \quad u_x = \frac{\theta'}{\sqrt{T_0 - t}}, \quad u_{xx} = \frac{\theta''}{\sqrt{T_0 - t}}$$

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u(u_x)^2 + u^3 \Rightarrow$$

$$\frac{\theta}{2(T_0 - t)^{3/2}} = \frac{\theta^2 \theta''}{(T_0 - t)^{3/2}} + \frac{2\theta(\theta')^2}{(T_0 - t)^{3/2}} + \frac{\theta^3}{(T_0 - t)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \theta = \theta^2 \theta'' + 2\theta(\theta')^2 + \theta^3 \Rightarrow \theta \neq 0 \Rightarrow$$

Для функции  $\theta(\xi)$  получается уравнение (10):

$$\theta(x)\theta''(x) + 2(\theta'(x))^2 + \theta^2(x) = \frac{1}{2} \quad (10)$$

Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий  $\beta=2$ :

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^2 \quad (12)$$

Ищем решение в виде:

$$u = \frac{1}{T_0 - t} \theta(\xi), \quad \xi = x \sqrt{T_0 - t} \quad (13)$$

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u(u_x)^2 + u^2$$

$$u_x = \frac{1}{T_0 - t} \theta' \sqrt{T_0 - t} = \frac{\theta'}{\sqrt{T_0 - t}}$$

$$u_{xx} = \theta'' \quad u_t = \frac{1}{(T_0 - t)^2} \theta - \frac{x}{2(T_0 - t)^{3/2}} \theta'$$

$$\frac{1}{(T_0 - t)^2} \theta - \frac{x}{2(T_0 - t)^{3/2}} \theta' = \frac{\theta'' \theta^2}{(T_0 - t)^2} + 2 \frac{\theta}{T_0 - t} \frac{(\theta')^2}{T_0 - t} + \frac{\theta^2}{(T_0 - t)^2} \Rightarrow$$

$$\theta - \frac{\xi}{2} \theta' = \frac{\theta'' \theta^2 + 2\theta(\theta')^2 + \theta^2}{\theta^2} \Rightarrow (\theta^2 \theta')' + \frac{\xi}{2} \theta' - \theta + \theta^2 = 0.$$

$$= (\theta^2 \theta')'$$

$$= (\theta^2 \theta')'$$

Для функции  $\theta(x)$  получается уравнение:

$$\left( \theta^2 \theta' \right)' + \frac{\xi}{2} \theta' - \theta + \theta^2 = 0 \quad (14)$$

Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий  $\beta = 4$ :

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^4 \quad (16)$$

Ищем решение в виде:

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{T_0 - t}} \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt[6]{T_0 - t}} \quad (17)$$

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u(u_x)^2 + u^4$$

$$u_t = \frac{1}{3(T_0 - t)^{4/3}} \theta(\xi) + \frac{1}{(T_0 - t)^{1/3}} \theta'(\xi) \frac{x}{6(T_0 - t)^{7/6}}$$

$$u_x = \frac{1}{(T_0 - t)^{1/3}} \theta'(\xi) \frac{1}{(T_0 - t)^{1/6}} = \frac{\theta'(\xi)}{(T_0 - t)^{1/2}}$$

$$u_{xx} = \frac{\theta''(\xi)}{(T_0 - t)^{2/3}}$$

$$\frac{1}{3(T_0 - t)^{4/3}} \theta + \frac{1}{(T_0 - t)^{4/3}} \frac{1}{6} \frac{x}{(T_0 - t)^{1/6}} \theta' =$$

$$= \frac{1}{(T_0 - t)^{2/3}} \theta^2 \frac{\theta''(\xi)}{(T_0 - t)^{2/3}} + 2 \frac{\theta}{(T_0 - t)^{1/3}} \frac{(\theta')^2}{T_0 - t} + \frac{\theta^4}{(T_0 - t)^{4/3}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \theta + \frac{1}{6} \xi \theta' = \frac{\theta^2 \theta'' + 2\theta(\theta')^2 + \theta^4}{(T_0 - t)^{2/3}} \Rightarrow (\theta^2 \theta')' - \frac{1}{6} \xi \theta' - \frac{1}{3} \theta + \theta^4 = 0.$$

$\quad \quad \quad = (\theta^2 \theta')'$   
 $\quad \quad \quad = (\theta^2 \theta')'$

Для функции  $\theta(\xi)$  получается уравнение:

$$(\theta^2 \theta')' - \frac{1}{6} \xi \theta' - \frac{1}{3} \theta + \theta^4 = 0, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (18)$$