0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 1

ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ

ЗАДАЧА 1. Задача о делении отрезка в заданном отношении. Пусть A и B — различные точки, заданные радиус-векторами $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ относительно полюса O, $\lambda > 0$. Найдите радиус-вектор точки $M \in (AB)$ такой, что

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

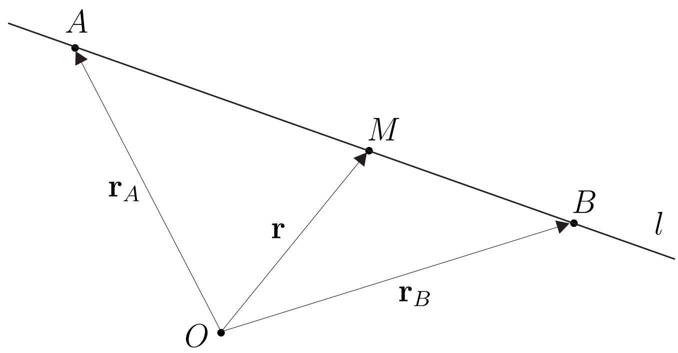

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Итак, пусть

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_A = \lambda(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_M) \Leftrightarrow \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1+\lambda}.$$

Если точка $M \in [A, B]$, то $\lambda > 0$, если $M \notin [A, B]$ и лежит за точкой A, то $\lambda \in (-1, 0)$, если $M \notin [A, B]$ лежит за точкой B, то $\lambda < -1$. Число $\lambda \neq -1$, поскольку тогда

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM},$$

но такой точки M не существует.

ЗАДАЧА 2. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке Q, которая делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины. Кроме того, доказать, что $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}$.

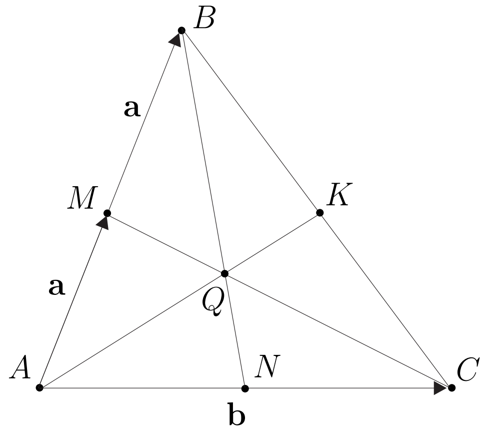

Рис. 2. К задаче 2.

Решение. Пусть

$$\lambda := \frac{|CQ|}{|QM|}, \quad \mu := \frac{|AQ|}{|QK|},$$
$$\mathbf{a} := \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \quad \mathbf{b} := \overrightarrow{AC}.$$

Применим формулу деления отрезка CM в отношении λ, считая от вершины C. С учётом обозначений имеем

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}}{\lambda + 1}. \tag{0.1}$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \frac{1}{\mu}\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu+1}{\mu}\frac{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}}{\lambda + 1}. \tag{0.2}$$

Точка K по определению медианы AK делит отрезок BC в отношении $1 : 1$, поэтому согласно результату задачи 3 имеем

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}. \tag{0.3}$$

Итак, из формул (0.2) и (0.3) имеем

$$\frac{\mu+1}{\mu}\frac{\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}}{\lambda + 1} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mu+1}{\mu}\frac{\lambda}{\lambda+1} = 1, \ \frac{1}{\lambda+1}\frac{\mu+1}{\mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \mu = 2.$$

Итак, точка Q лежит на пересечении медиан AK и CM и делит обе медианы в отношении $2 : 1$, считая от вершин A и C соответственно. Аналогично рассматривая медианы CM и BN получим, что точка Q'

их пересечения делит обе медианы в отношении $2:1$, считая от вершин C и B соответственно. Следовательно, точки $Q = Q'$.

Для доказательства равенства $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}$ заметим, что

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NA}, \quad \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NC}, \quad \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = 2\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{BQ} \Rightarrow \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}.$$

З А Д А Ч А 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD внутреннего угла $\angle C$. Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$ и их длины.

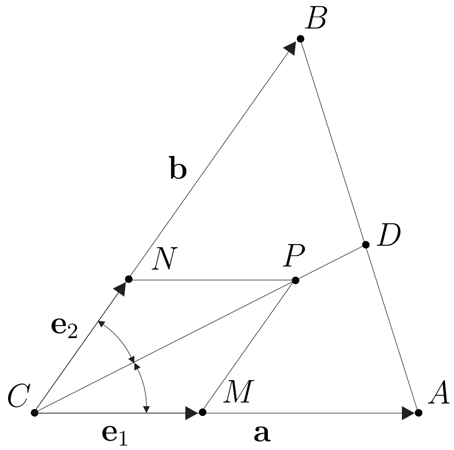

Рис. 3. К задаче 3.

Р е ш е н и е. Пусть

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \overrightarrow{CM}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \overrightarrow{CN}.$$

Рассмотрим параллелограмм $CNPM$, построенный на векторах $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$. Так как по определению

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\overrightarrow{CN}\right| = 1,$$

то $CNMP$ — это ромб. Следовательно, вектор $\overrightarrow{CP} \upuparrows \overrightarrow{CD}$. С одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{CP} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CP} = x\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right). \tag{0.4}$$

С другой стороны, точка D делит отрезок AB в некотором отношении

$$\lambda = \frac{|AD|}{|DB|} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}. \tag{0.5}$$

Итак, из равенств (0.4) и (0.5) имеем

$$x\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right) = \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \frac{x}{|\mathbf{b}|} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \Rightarrow \lambda = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}, \quad x = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}.$$

Значит,

$$\overrightarrow{CD} = \frac{|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|}.$$

З А Д А Ч А 4. Дан треугольник ABC. На прямых (AB), (BC) и (CA) выбраны соответственно точки M, N и P так, что

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.$$

При каком необходимом и достаточном условии векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ образуют треугольник, т.е.

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}?$$

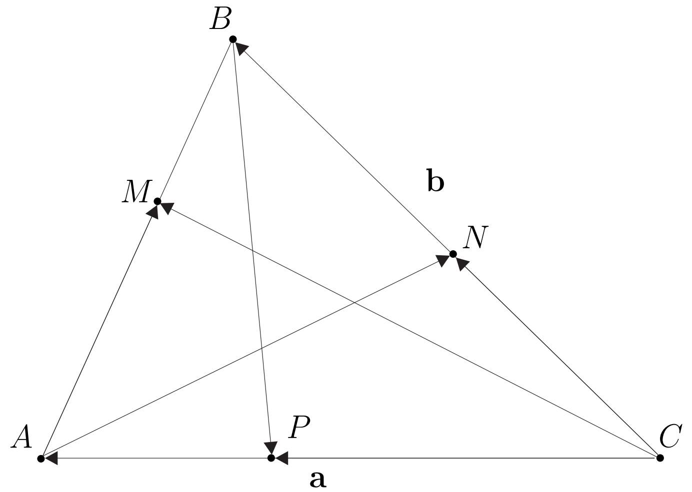

Рис. 4. К задаче 4.

Р е ш е н и е. Пусть $\mathbf{a} := \overrightarrow{CA}$ и $\mathbf{b} := \overrightarrow{CB}$. С одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}, \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a});$$
$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{NB} = \mathbf{b} - \beta\mathbf{b} = (1-\beta)\mathbf{b};$$
$$\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA} = \gamma\mathbf{a}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{CM} = \mathbf{a} + \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a});$$
$$\overrightarrow{AN} = -\mathbf{a} + (1-\beta)\mathbf{b};$$
$$\overrightarrow{BP} = -\mathbf{b} + \gamma\mathbf{a}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\gamma - \alpha)\mathbf{a} + (\alpha - \beta)\mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

ЗАДАЧА 5. В треугольнике ABC точки M, N и P — это основания биссектрис соответственно $[CM]$, $[AN]$ и $[BP]$ внутренних углов треугольника. Известно, что

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}.$$

Докажите, что $\triangle ABC$ — правильный.

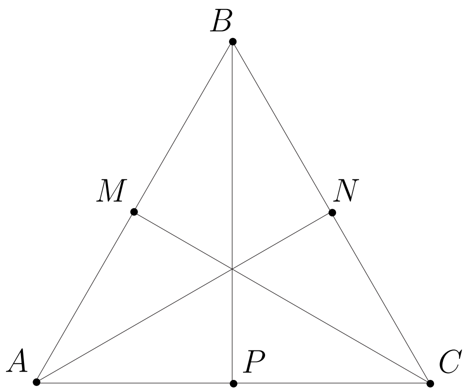

Рис. 5. К задаче 5.

Решение. Пусть

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}.$$

Согласно результату задачи 5 имеем

$$\frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \lambda = \frac{|AC|}{|BC|}. \tag{0.6}$$

Найдём связь $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Действительно,

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \alpha\left|\overrightarrow{AB}\right| = \alpha\left|\overrightarrow{AM}\right| + \alpha\left|\overrightarrow{MB}\right| \Rightarrow \lambda = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Отсюда и из (0.6) имеем

$$\alpha = \frac{|AC|}{|AC|+|BC|}.$$

Аналогичным образом получаем равенства

$$\beta = \frac{|AB|}{|AB|+|AC|}, \quad \gamma = \frac{|BC|}{|BC|+|AB|}.$$

В силу результат задачи 6 имеем $\alpha = \beta = \gamma$. Отсюда имеем

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\gamma} - 1.$$

С одной стороны, отсюда имеем

$$|AC|^2 = |AB||BC| \text{ и } |AB|^2 = |AC||BC| \Rightarrow \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|}{|AC|} \Rightarrow |AB| = |AC|.$$

С другой стороны, имеем

$$|BC|^2 = |AC||AB| \text{ и } |AB|^2 = |AC||BC| \Rightarrow \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow |BC| = |AB|.$$

Итак, $|AB| = |AC| = |BC|$.

З А Д А Ч А 6. В плоскости треугольника $\triangle ABC$ найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна нулевому вектору.

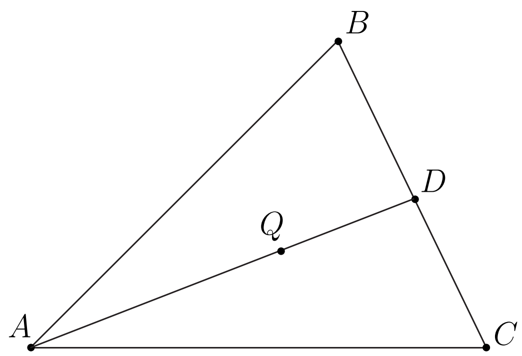

Рис. 6. К задаче 6.

Решение. Итак, искомая точка Q обладает по условию задачи следующим свойством:

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \vartheta. \tag{0.7}$$

Выберем полюс O произвольным образом в плоскости треугольника $\triangle ABC$. Тогда относительно этого полюса вершины A, B, C треугольника и точка Q имеют следующие радиус–векторы:

$$A(\mathbf{r}_A), \quad B(\mathbf{r}_B), \quad C(\mathbf{r}_C), \quad Q(\mathbf{r}_Q).$$

Тогда в силу (0.7) справедливо следующее равенство

$$\mathbf{r}_Q = \frac{1}{3}\left(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C\right). \tag{0.8}$$

Отсюда следует, что если такая точка существует, то она единственна. Проведём через вершину A и искомую точку Q прямую. Пусть точка $D(\mathbf{r}_D)$ — это точка пересечения этой прямой и прямой, на которой лежит сторона BC треугольника. Положим

$$\lambda = \frac{BD}{DC}, \quad \mu = \frac{DQ}{QA}.$$

Тогда согласно известной формуле деления отрезка в заданном отношении имеют место следующие формулы:

$$\mathbf{r}_D = \frac{\mathbf{r}_B + \lambda\mathbf{r}_C}{1+\lambda}, \quad \mathbf{r}_Q = \frac{\mathbf{r}_D + \mu\mathbf{r}_A}{1+\mu}. \tag{0.9}$$

Из формул (0.8) и (0.9) вытекает следующее равенство:

$$\frac{1}{1+\mu}\frac{\mathbf{r}_B + \lambda\mathbf{r}_C}{1+\lambda} + \frac{\mu}{1+\mu}\mathbf{r}_A = \frac{1}{3}\left(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C\right). \tag{0.10}$$

Без ограничения общности положим $O = C$. Тогда $\mathbf{r}_C = \vartheta$ и поскольку $\triangle ABC$ — это треугольник, то радиус–вектора $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ не коллинеарны. Поэтому из (0.10) вытекает равенство

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{1+\mu}\right)\mathbf{r}_A + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(1+\mu)(1+\lambda)}\right)\mathbf{r}_B = \vartheta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{(1+\mu)(1+\lambda)} = \frac{1}{3}. \tag{0.11}$$

Отсюда получаем, что $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$. Итак, искомая точка Q — это точка пересечения медиан треугольника.

ЗАДАЧА 7. Дан плоский четырёхугольник $ABCD$. Найти такую точку M, что выполнено равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vartheta$.

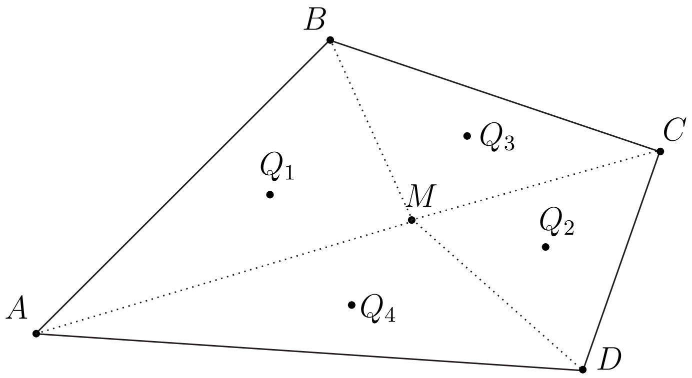

Рис. 7. К задаче 7.

Р е ш е н и е. Пусть M — это искомая точка. Пусть Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 — это точки пересечения медиан треугольников $\triangle AMB$, $\triangle CMD$, $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$, соответственно. Согласно условию задачи имеем

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vartheta. \tag{0.12}$$

Отсюда следует, что если такая точка существует, то она единственна. Согласно результата решения задачи 8 имеем

$$\begin{gathered}\overrightarrow{Q_1A} + \overrightarrow{Q_1B} + \overrightarrow{Q_1M} = \vartheta,\\ \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{Q_1A} = 2\overrightarrow{Q_1A} + \overrightarrow{Q_1B},\\ \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{Q_1B} = 2\overrightarrow{Q_1B} + \overrightarrow{Q_1A},\\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{Q_1B} + 3\overrightarrow{Q_1A} = 3MQ_1. \qquad (0.13)\end{gathered}$$

Аналогично из рассмотрения треугольника $\triangle CMD$ получим равенство

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{Q_2C} + 3\overrightarrow{Q_2D} = 3MQ_2. \tag{0.14}$$

Из (0.12)–(0.14) имеем

$$\overrightarrow{MQ_1} = \overrightarrow{Q_2M},$$

т. е. точка M лежит на отрезке прямой, соединяющей середины отрезков AB и CD.

Аналогично из рассмотрения треугольников $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$ получим равенство

$$\overrightarrow{MQ_3} = \overrightarrow{Q_4M},$$

т. е. точка M лежит на отрезке прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD.

Таким образом, искомая точка M лежит на пересечении прямых, соединяющих середины противоположных сторон плоского четырёхугольника.

ЗАДАЧА 8. Доказать, что если точки K, L, M, N делят в одном и том де отношении λ стороны AB, BC, CD и DA, то четырёхугольник $KLMN$ параллелограмм.

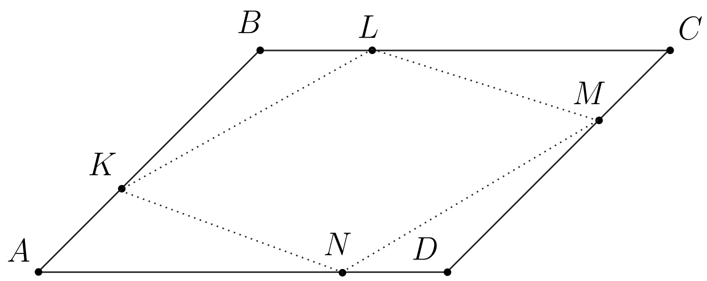

Рис. 8. К задачам 8 и 9.

Решение. Согласно условию задачи имеем

$$\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA} = \lambda.$$

Нам нужно доказать, что $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML}$. С этой целью введём следующие обозначения:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{AD}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{1 + \lambda}\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{AL} = \frac{\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}}{1 + \lambda} = \frac{\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{1 + \lambda},$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD}}{1 + \lambda} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda\mathbf{b}}{1 + \lambda}.$$

Таким образом, имеем

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} = \frac{\lambda}{1 + \lambda}\mathbf{a} - \frac{1}{1 + \lambda}\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1 + \lambda}(\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Итак, доказано, что $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NK}$.

ЗАДАЧА 9. Доказать, что если точки K, L, M, N делят в одном и том де отношении $\lambda \neq 1$ стороны AB, BC, CD и DA и четырёхугольник $KLMN$ — это параллелограмм, то четырёхугольник $ABCD$ тоже параллелограмм.

Решение. Введём векторы

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{AD}, \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{BC}.$$

Согласно условию задачи справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BL} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC},$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DN} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{DA}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \mathbf{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{d},$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{\mathbf{a} + \lambda\mathbf{d}}{\lambda+1}. \tag{0.15}$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD}}{1+\lambda} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}+\lambda\mathbf{b}}{1+\lambda},$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{\lambda+1}\mathbf{b}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{NM} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{d}+\lambda\mathbf{b}-\mathbf{b}}{\lambda+1}. \tag{0.16}$$

Из (0.15) и (0.16) и условия задачи ($\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$) вытекает равенство

$$(\lambda-1)\mathbf{d} = (\lambda-1)\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{d} = \mathbf{b}.$$

З А Д А Ч А 10. Дан пространственный четырехугольник (тетраэдр) $ABCD$. Найти такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vartheta$.

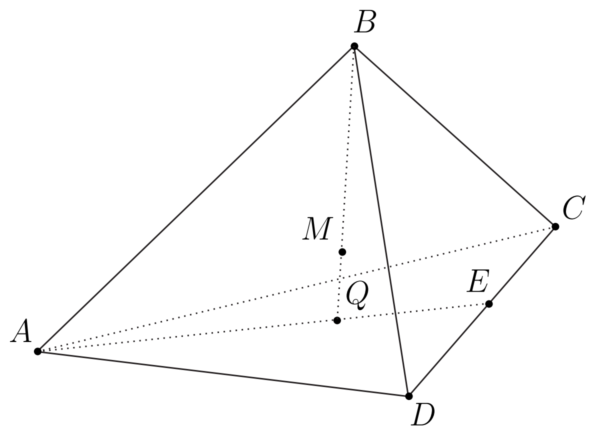

Рис. 9. К первой части решения задачи 10.

Первая часть решения. Пусть O — это некоторая произвольная точка пространства. Согласно формулировке задачи справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vartheta. \tag{0.17}$$

Проведём через вершину B и искомую точку M прямую до пересечения (точка Q) с плоскостью, где лежит треугольник ACD. Затем проведём прямую через вершину A и точку Q прямую. Пусть точка E — это точка пересечению с прямой, содержащей отрезок CD. Предположим, что относительно полюса O заданы радиус–векторы всех введённых точек:

$$A(\mathbf{r}_A), \quad B(\mathbf{r}_B), \quad C(\mathbf{r}_C), \quad D(\mathbf{r}_D), \quad M(\mathbf{r}_M), \quad Q(\mathbf{r}_Q), \quad E(\mathbf{r}_E).$$

Тогда из (0.17) вытекает следующее равенство:

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{4}\left(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D\right). \tag{0.18}$$

Отсюда следует, что если такая точка существует, то она единственна. Введём следующие числа:

$$\lambda = \frac{BM}{MQ}, \quad \mu = \frac{AQ}{QE}, \quad \nu = \frac{CE}{ED}. \tag{0.19}$$

Тогда по построению точек M, Q, E имеем

$$\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_B + \lambda\mathbf{r}_Q}{1+\lambda}, \quad \mathbf{r}_Q = \frac{\mathbf{r}_A + \mu\mathbf{r}_E}{1+\mu}, \quad \mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_C + \nu\mathbf{r}_D}{1+\nu}. \tag{0.20}$$

Из (0.20) вытекает следующее равенство:

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{r}_B + \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\mathbf{r}_A + \\ + \frac{\mu\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)(1+\nu)}\mathbf{r}_C + \frac{\mu\lambda\nu}{(1+\mu)(1+\lambda)(1+\nu)}\mathbf{r}_D \tag{0.21}$$

Положим теперь $O = D$, тогда $\mathbf{r}_D = \vartheta$ и из (0.18) и (0.21) и не компланарности векторов $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_C$ вытекают следующие равенства:

$$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\mu\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)(1+\nu)} = \frac{1}{4}$$

Откуда имеем

$$\lambda = 3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1.$$

Следовательно, точка M — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра, с точками пересечения медиан противолежащих сторон тетраэдра.

Вторая часть решения.

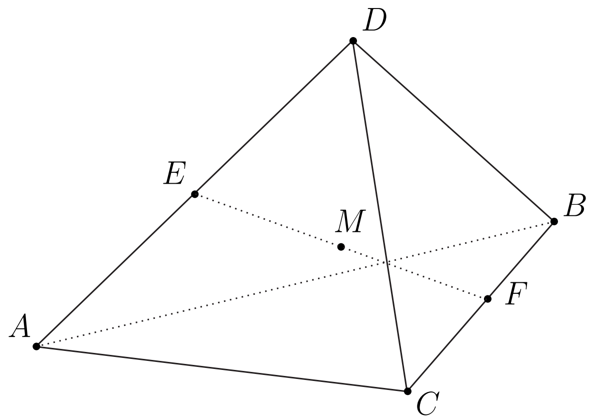

Рис. 10. К второй части решения задачи 10.

Пусть опять M — это искомая точка (единственная), для которой как мы уже вывели справедливо равенство (0.18). Пусть точки $E(\mathbf{r}_E) \in$ $\in (AD)$ и $F(\mathbf{r}_F) \in (BC)$ таковы, что

$$\lambda = \frac{AE}{ED}, \quad \mu = \frac{BF}{FC} \tag{0.22}$$

и при этом прямая, соединяющая точки E и F, проходит через искомую точку $M(\mathbf{r}_M)$ и тогда

$$\nu = \frac{EM}{MF}. \tag{0.23}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{r}_E = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda\mathbf{r}_D}{1+\lambda}, \quad \mathbf{r}_F = \frac{\mathbf{r}_B + \mu\mathbf{r}_C}{1+\mu}, \quad \mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_E + \nu\mathbf{r}_F}{1+\nu}. \tag{0.24}$$

Подставляя в последнее равенство первые два , мы получим следующее равенство:

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{(1+\nu)(1+\lambda)}\mathbf{r}_A + \frac{\lambda}{(1+\nu)(1+\lambda)}\mathbf{r}_D + \\ + \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}\mathbf{r}_B + \frac{\mu\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}\mathbf{r}_C. \tag{0.25}$$

Пусть полюс $O = C$, тогда $\mathbf{r}_C = \vartheta$. Заметим, что при этом векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_D$ не компланарны. Из (0.18) и (0.25) вытекают три равенства

$$\frac{1}{(1+\nu)(1+\lambda)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\lambda}{(1+\nu)(1+\lambda)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)} = \frac{1}{4},$$

из которых легко получаем решение $\lambda = \mu = \nu = 1$.

Таким образом, в силе единственности точки M, в этой точке пересекаются три отрезка, соединяющие противоположные рёбра тетраэдра, и делятся этой точкой пополам.