Лекция 3

# ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА. ПРОДОЛЖЕНИЕ

В этой лекции мы продолжим рассмотрение пространств Лебега, начатое в третьей лекции предыдущего семестра. Для более полного понимания следует посмотреть эту лекцию.

## § 1. Следствие неравенства Гельдера

Пусть задана тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$ *и* $\mu(X) < +\infty$, *тогда имеют место следующие свойства*

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^q(X),$$
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^\infty(X).$$

Доказательство.
*Шаг 1.* Итак, пусть $\mu(X) < +\infty$. Тогда в силу неравенства Гельдера с параметрами

$$q_1 = \frac{q}{p}, \quad q_2 = \frac{q_1}{q_1 - 1} = \frac{q}{q-p}$$

имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_X |f(x)|^p \, \mu(dx) = \int\limits_X |f(x)|^p \, 1 \, \mu(dx) \leqslant$$
$$\leqslant \left( \int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} \left( \int\limits_X 1 \, \mu(dx) \right)^{1-p/q} =$$
$$= \left( \int\limits_X |f(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{p/q} [\mu(X)]^{1-\frac{p}{q}},$$

откуда сразу же получаем первое утверждение теоремы.
*Шаг 2.* Теперь, если мы в первом неравенстве утверждения теоремы положим $q = +\infty$, то получим следующее неравенство

$$\|f\|_p \leqslant [\mu(X)]^{1/p} \|f\|_\infty \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^\infty(X),$$

откуда вытекает предельное неравенство

$$\limsup_{p\to+\infty}\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty .$$

*Шаг 3.* Теперь докажем, что

$$\liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty ,$$

откуда и будет следовать второе утверждение теоремы.

□ Действительно, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mu$—измеримое подмножество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что $\mu(A_\varepsilon) > 0$ и имеет место неравенство

$$|f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in A_\varepsilon .$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int\limits_{A_\varepsilon} |f(x)|^p \, \mu(dx)\right)^{1/p} \geqslant [\|f\|_\infty - \varepsilon] \, [\mu(A_\varepsilon)]^{1/p} ,$$

$$\liminf_{p\to+\infty}\|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ и вытекает искомое утверждение. ⊠

Теорема доказана.

Справедлива одна интерполяционная лемма.

Пусть $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant +\infty$ и

$$\frac{1}{r} = \frac{\vartheta}{s} + \frac{1-\vartheta}{t}, \quad \vartheta \in [0,1].$$

Лемма 1. *Имеет место вложение*

$$L^s(X) \cap L^t(X) \subset L^r(X)$$

*и справедлива оценка*

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_s^\vartheta \|f\|_t^{1-\vartheta} .$$

Доказательство.

Действительно, находим

$$\int\limits_X |f|^r \, \mu(dx) = \int\limits_X |f|^{\vartheta r} |f|^{(1-\vartheta)r} \, \mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f|^{\vartheta r \frac{s}{\vartheta r}} \, \mu(dx)\right)^{\vartheta r/s} \left(\int\limits_X |f|^{(1-\vartheta) r \frac{t}{(1-\vartheta)r}} \, \mu(dx)\right)^{\frac{(1-\vartheta)r}{t}} .$$

Мы использовали неравенство Гельдера, которое можно применить, так как
$$\frac{\vartheta r}{s}+\frac{(1-\vartheta)r}{t}=1.$$

Л е м м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что утверждение этой леммы тривиально в случае $\mu-$ограниченных множеств $X:\mu(X)<+\infty$. Действительно, из теоремы 1 вытекает цепочка вложений
$$L^t(X)\subset L^r(X)\subset L^s(X).$$
Однако, в случае не конечной меры утверждение леммы нетривиально.

Справедливо обобщенное неравенство Гельдера.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f_k\in L^{p_k}(X)$, *причем* $p_k\in(1,+\infty)$ *при* $k=\overline{1,n}$ *и*
$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=\frac{1}{r},\quad r\in[1,+\infty).$$
*Тогда имеет место обобщенное неравенство Гельдера*:
$$\|f_1f_2\cdots f_n\|_r\leqslant\|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\cdots\|f_n\|_{p_n}. \tag{1.1}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть обобщенное неравенство Гельдера доказано для $n=N-1$ докажем его для $n=N$. Действительно, пусть
$$f=f_1\cdot f_2\cdots f_{N-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

*Шаг 1.* Из неравенства Гельдера получим цепочку неравенств
$$\|f\cdot f_N\|_r=\left(\int\limits_X|f|^r|f_N|^r\,\mu(dx)\right)^{1/r}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\left(\int\limits_X|f|^{rp}\,\mu(dx)\right)^{1/p}\left(\int\limits_X|f_N|^{rq}\,\mu(dx)\right)^{1/q}\right)^{1/r}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_X|f|^{rp}\,\mu(dx)\right)^{1/(rp)}\left(\int\limits_X|f_N|^{rq}\,\mu(dx)\right)^{1/(rq)}=$$
$$=\|f\|_{p^*}\|f_N\|_{p_N},$$
где
$$\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_{N-1}},\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad rp=p^*,\quad rq=p_N.$$

*Шаг 2.* Теперь заметим, что по предположению индукции имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{rp} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}.$$

С другой стороны, положим $rq = p_N$, тогда

$$\frac{1}{rq} + \frac{1}{rp} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}.$$

При этом

$$p = \frac{q}{q-1}, \quad q = p_N \left( \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N} \right).$$

Следовательно, по индукции мы приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

## § 2. Теорема Рисса

Теперь зададимся следующим вопросом: какой явный вид имеют скобки двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $L^p(X,\mu)$ и $(L^p(X,\mu))^*$? Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема Рисса.

Теорема 3. *Сопряженным к банахову пространству $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является банахово пространство $L^q(X,\mu)$, где*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*причем имеет место явное представление для скобок двойственности:*

$$\langle \Phi_g, f \rangle_p \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_X f(x)g(x)\,\mu(dx) \tag{2.1}$$

*для всех*

$$f(x) \in L^p(X,\mu), \quad g(x) \in L^q(X,\mu). \tag{2.2}$$

*Отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрическим изоморфизмом.*

Доказательство.

*Шаг 1.* Сначала покажем, что формула (2.1) при $p \geqslant 1$ для каждого $g(x) \in L^q(X,\mu)$, действительно задает некоторый линейный и непрерывный функционал на $L^p(X,\mu)$. И имеет место равенство норм $\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q$.

$$\|\Phi_g\|_{p*} = \sup_{\|f\|_p=1} |\langle \Phi_g, f\rangle| =$$

$$= \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int\limits_X f(x)g(x)\,\mu(dx) \right| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \leqslant \|g\|_q, \tag{2.3}$$

из которой, в частности, вытекает, что $\Phi_g \in (L^p(X,\mu))^*$.

*Шаг 2.* Докажем, что при $p > 1$ на самом деле имеет место равенство
$$\|\Phi_g\|_{p*} = \|g\|_q.$$
Это равенство, очевидно, выполнено, если $g = \vartheta$. Пусть $\|g\|_q > 0$. Возьмем в формуле (2.1) функцию
$$f(x) = \frac{\operatorname{sign}(g)|g|^{q/p}}{\|g\|_q^{q/p}}.$$
Тогда имеет место равенство
$$\langle \Phi_g, f\rangle = \int\limits_X g(x)f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X \frac{|g(x)|^{q/p+1}}{\|g\|_q^{q/p}}\,\mu(dx) =$$
$$= \frac{1}{\|g\|_q^{q/p}}\int\limits_X |g(x)|^q\;\mu(dx) = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q.$$
Откуда сразу же получаем, что
$$\|\Phi_g\|_* = \sup_{\|f\|=1} |\langle \Phi_g, f\rangle| \geqslant \|g\|_q.$$
Значит, отсюда и из (2.3), действительно, приходим к следующему равенству:
$$\|\Phi_g\|_* = \|g\|_q \quad \text{при} \quad p > 1.$$

*Шаг 3.* Рассмотрим теперь случай $p = 1$, тогда $q = +\infty$. Из представления (2.1) вытекает в силу неравенства Гельдера оценка
$$\|\Phi_g\| \leqslant \|g\|_\infty.$$
С другой стороны, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\mu-$измеримое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ с положительной мерой $\mu(A_\varepsilon) > 0$, что имеет место неравенство
$$|g(x)| \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in A_\varepsilon.$$
Без ограничения общности можно считать, что $\mu(A_\varepsilon) < +\infty$. Теперь введем функцию $f(x) \in L^1(X,\mu)$ следующим образом:
$$f(x) = \frac{\operatorname{sign}(g)(x)}{\mu(A_\varepsilon)}\begin{cases}\chi_{A_\varepsilon}(x), & x \in A_\varepsilon;\\ 0, & x \in X\backslash A_\varepsilon,\end{cases}$$
где $\chi_{A_\varepsilon}(x)$ — характеристическая функция множества $A_\varepsilon$. Но тогда имеет место неравенство
$$\int\limits_X f(x)g(x)\,\mu(dx) \geqslant \frac{1}{\mu(A_\varepsilon)}\int\limits_{A_\varepsilon} |g(x)|\,\mu(dx) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu(A_\varepsilon)}\left[\|g\|_\infty - \varepsilon\right]\mu(A_\varepsilon) = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\|\Phi_g\|_* \geqslant \|g\|_\infty \Rightarrow \|\Phi_g\|_* = \|g\|_\infty \quad \text{при} \quad p = 1.$$

Тем самым на этом этапе мы доказали, что отображение $g \mapsto \Phi_g$ является изометрической инъекцией всего пространства $L^q(X,\mu)$ в пространство $(L^p(X,\mu))^*$ при $p \in [1,+\infty)$.

*Шаг 4.* Докажем, что это отображение является сюръекцией. Рассмотрим случай конечной меры $\mu$, поскольку из доказательства видно, что все результаты распространяются и на случай $\sigma-$конечной меры $\mu$.

Итак, пусть $\Phi \in (L^p(X,\mu))^*$. Пусть $\chi_A(x)$ — это характеристическая функция множества $A \in \mathcal{A}$. Введем обозначение

$$\nu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Phi, \chi_A \rangle, \quad \chi_A \in L^p(X,\mu), \tag{2.4}$$

поскольку $\mu(\chi_A) < +\infty$.

Докажем, что $\nu(A)$ — это счетно–аддитивная и абсолютно непрерывная относительно меры Лебега $\mu$ мера.

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — это система попарно непересекающихся множеств, исчерпывающая $A$, т. е.

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing \quad \text{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle.$$

Поскольку

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x) \to \chi_A(x) \quad \text{поточечно} \quad x \in A$$

и, кроме того, имеет место оценка

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n}(x)\right| \leqslant 1,$$

то из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега имеем

$$f_N(x) \to \chi_A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}(x) \quad \text{сильно в} \quad L^p(X,\mu). \tag{2.5}$$

Поскольку $\Phi \in (L^p(X,\mu))^*$, то в силу (2.5) получаем

$$\sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{N} \chi_{A_n} \right\rangle \to \left\langle \Phi, \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n} \right\rangle = \langle \Phi, \chi_A \rangle = \nu(A),$$

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).$$

Тем самым, доказали счетную аддитивность.

Докажем теперь абсолютную непрерывность меры $\nu$ относительно меры $\mu$. Действительно, имеет место цепочка соотношений.

$$|\nu(A)| = |\langle \Phi, \chi_A \rangle| \leqslant \|\Phi\|_* \|\chi_A\|_p =$$
$$= \|\Phi\|_* \left( \int_A 1\, \mu(dx) \right)^{1/p} = \|\Phi\|_* \left[\mu(A)\right]^{1/p}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\mu(A) \to +0} \nu(A) = 0,$$

т. е. мы доказали абсолютную непрерывность счетно–аддитивной меры $\nu(A)$ относительно меры Лебега $\mu$ на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$.

*Шаг 5.* Теперь напомним одну важную теорему теории меры и интеграла Лебега:

Теорема Радона–Никодима. *Пусть $\mu$ и $\nu$ — конечные меры на измеримом пространстве $(X, \mathcal{A})$. Мера $\nu$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mu$ в точности тогда, когда существует такая $\mu$—интегрируемая функция $g$, что имеет место представление*:

$$\nu(A) = \int_A g(x)\, \mu(dx) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}. \tag{2.6}$$

Тем самым для введенной меры $\nu$ выполнены все условия теоремы Радона–Никодима. Таким образом, найдется такая $\mu$—интегрируемая функция $g(x)$, что имеет место представление (2.6). Осталось доказать, что $g(x) \in L^q(X, \mu)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle \Phi, \chi_A \rangle = \int_X g(x) \chi_A(x)\, \mu(dx). \tag{2.7}$$

Пусть $f(x)$ — это простая функция, тогда из (2.7) получим

$$\langle \Phi, f \rangle = \int_X g(x) f(x)\, \mu(dx). \tag{2.8}$$

В силу плотности множества простых функций во множестве измеримых и ограниченных функций $\mathbb{B}(X)$ приходим к выводу, что (2.8) справедливо для $f(x) \in \mathbb{B}(X)$.

*Шаг 6.* Теперь осталось доказать, что $g(x) \in L^q(X, \mu)$ при $p > 1$, $q = p/(p-1)$. С этой целью введем специально выбранную функцию из $\mathbb{B}(X)$. Именно, пусть

$$f_n(x) = |g(x)|^{q/p} \chi_{A_n}(x) \operatorname{sign}(g), \quad A_n = \{x : \ |g(x)| \leqslant n\}.$$

Понятно, что множество $A_n$ является $\mu-$измеримым в силу $\mu-$измеримости функции $g(x)$. Тогда, с одной стороны,

$$\langle \Phi, f_n \rangle = \int\limits_{A_n} |g|^{q/p} |g| \, \mu(dx) = \int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx),$$

поскольку

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \Rightarrow 1 + \frac{q}{p} = q.$$

С другой стороны,

$$|\langle \Phi, f_n \rangle| \leqslant \|\Phi\|_* \|f_n\|_p.$$

Так что имеет место неравенство

$$\int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx) \leqslant \|\Phi\|_* \left( \int\limits_{A_n} |g(x)|^q \, \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

Значит,

$$\left( \int\limits_{X} |g(x)|^q \chi_{A_n}(x) \, \mu(dx) \right)^{1/q} \leqslant \|\Phi\|_*.$$

В силу леммы Фату приходим к выводу, что

$$g(x) \in L^q(X, \mu).$$

*Шаг 7.* Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Докажем, что функция $g(x) \in L^\infty(X, \mu)$. С этой целью рассмотрим множество

$$A \equiv \{x : \ |g(x)| > \|\Phi\|_*\}.$$

Докажем, что это множество имеют нулевую $\mu-$меру Лебега. Действительно, предположим, что $\mu(A) > 0$. Тогда

$$\left\langle \Phi, \frac{\chi_A \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle = \frac{1}{\mu(A)} \int\limits_X |g(x)| \chi_A(x) \, \mu(dx) > \frac{1}{\mu(A)} \mu(A) \|\Phi\|_* = \|\Phi\|_*.$$

С другой стороны, имеет место неравенство

$$\|\Phi\|_* = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} |\langle \Phi, f \rangle| \geqslant \left\langle \Phi, \frac{\chi_A \operatorname{sign}(g)}{\mu(A)} \right\rangle > \|\Phi\|_*.$$

Значит,

$$\|\Phi\|_* > \|\Phi\|_*.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\mu(A) = 0$. И значит, почти всюду $|g(x)| \leqslant \|\Phi\|_*$. Тем самым доказано, что $g(x) \in L^\infty(X, \mu)$.

*Шаг 8.* Стало быть, мы получили следующий результат. Для произвольного линейного, непрерывного функционала $\Phi \in (L^p(X, \mu))^*$ при $p \in [1, +\infty)$ найдется такая функция $g(x) \in L^q(X, \mu)$ с $q = p/(p-1)$, что имеет место равенство

$$\langle \Phi, f \rangle = \int\limits_X g(x) f(x)\, \mu(dx),$$

справедливое для всех простых функций $f(x)$, но, как известно, множество простых функций в случае конечной меры $\mu$ плотно в $L^p(X, \mu)$ при $p \in [1, +\infty)$. Стало быть, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.