

ЛЕКЦИЯ 5Г

Фундаментальные решения в пространстве \mathcal{D}'

1. Фундаментальные решения линейного дифференциального оператора

Определение 1. *Линейным дифференциальным оператором (порядка m) с постоянными коэффициентами* будем называть оператор вида

$$P(D) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha, \quad \text{где} \quad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha| > 0, \quad a_\alpha = \text{const.}$$

Определение 2. Фундаментальным решением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами будем называть любую функцию $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющую условию

$$P(D)\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Замечание. Очевидно, сформулированное определение оставляет произвол в выборе фундаментального решения: его можно изменить на любое решение соответствующего однородного уравнения. Мы не будем здесь обсуждать конкретные примеры, но отметим, что такой произвол оказывается полезен с точки зрения использования фундаментального решения в свёртке с правой частью (см. ниже): для различных видов правых частей можно пытаться выбирать фундаментальные решения по-разному так, чтобы свёртка существовала.

Принципиальное значение имеет следующая теорема, которую мы приводим без доказательства. (См., например: Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976, с. 182.)

Теорема 1. (Мальгранж, Эренпрайс). Всякий линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (отличный от нулевого оператора) имеет фундаментальное решение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Пример 1. Фундаментальным решением (одним из возможных!) оператора Лапласа в \mathbb{R}^3

$$\Delta \equiv D^{(2,0,0)} + D^{(0,2,0)} + D^{(0,0,2)}$$

является функция

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi r} \equiv -\frac{1}{4\pi \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Докажем этот факт. Требуется доказать, что

$$\Delta \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) = \delta(x)$$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, т. е. что для любой основной функции $\varphi(x)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ верно соотношение

$$\left\langle \Delta \left(-\frac{1}{4\pi r} \right), \varphi(x) \right\rangle = \varphi(O). \quad (1)$$

Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и докажем, что (1) действительно выполняется. Используя определение суммы обобщённых функций и производной обобщённой функции, получаем:

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta \left(-\frac{1}{4\pi r} \right), \varphi(x) \right\rangle &\equiv \left\langle D^{(2,0,0)} \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) + D^{(0,2,0)} \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) + D^{(0,0,2)} \left(-\frac{1}{4\pi r} \right), \varphi(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle -\frac{1}{4\pi r}, D^{(2,0,0)}\varphi(x) + D^{(0,2,0)}\varphi(x) + D^{(0,0,2)}\varphi(x) \right\rangle \equiv \left\langle -\frac{1}{4\pi r}, \Delta\varphi(x) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Заметим, что в скобке двойственности в правой части цепочки стоит регулярная обобщённая функция, поэтому интеграл понимается в классическом смысле как интеграл Лебега или даже как несобственный интеграл Римана. Теперь введём в рассмотрение ограниченную область Ω (зависящую от φ), удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $O(0; 0; 0) \in \Omega$;
- 2) $\text{supp } \varphi(x) \subset \Omega$.

Тогда в последнем интеграле можно заменить интегрирование по всему пространству интегрированием по Ω :

$$\langle \mathcal{E}(x), \varphi(x) \rangle = \int_{\Omega} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x) dx.$$

(Мы включили начало координат в область интегрирования, чтобы избежать рассмотрения различных случаев; теперь дальнейшие рассуждения будут верны независимо от включения $O \in \text{supp } \varphi(x)$.) Далее, построим шар O_ε с центром в начале координат, выбрав ε из условия $O_\varepsilon \subset \Omega$, и положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{O_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \partial O_\varepsilon$. (Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$.) Очевидно, в области Ω_ε вместе с границей обе функции $\frac{1}{r}$ и $\varphi(x)$ бесконечно гладкие, что позволяет применить к интегралу

$$\int_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x) dx$$

вторую формулу Грина

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial V} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Необходимо учесть, что:

- 1) всюду, кроме начала координат, функция $\frac{1}{r}$ является гармонической;
- 2) всюду на $\partial\Omega$ верны равенства $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ (в силу условия $\text{supp } \varphi \subset \Omega$);
- 3) внешняя нормаль к области Ω_ε на S_ε направлена в сторону убывания r .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x) dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(-\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) \right) d\sigma = \\ &= \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial r} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \right) d\sigma = \\ &= \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial r} + \varphi(x) \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \right) \right) d\sigma = \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(x''(\varepsilon)) + \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \varphi(x'(\varepsilon)), \end{aligned} \tag{2}$$

где в последнем равенстве мы применили формулу среднего значения для интегрирования гладких функций $\varphi(x)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ по сфере S_ε , $x'(\varepsilon), x''(\varepsilon) \in S_\varepsilon$.

Заметим теперь, что в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для функции $-\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ верно предельное соотношение

$$\int_{O_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x) dx \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (3)$$

Далее, в силу непрерывности $\varphi(x)$ и ограниченности $\nabla\varphi(x)$ имеем

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial r}(x''(\varepsilon)) + \varphi(x'(\varepsilon)) \rightarrow 0 + \varphi(O), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (4)$$

С учётом (3), (4) из (2) окончательно получаем путём предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\int_{\Omega} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x) dx = \varphi(O), \quad (5)$$

что и означает (1).

Основополагающую роль фундаментальных решений выявляет

Теорема 2. Если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ и существует свёртка $\mathcal{E}(x) * f(x)$, где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $P(D)$, то уравнение

$$P(D)u = f(x)$$

имеет (в смысле обобщённых функций) частное решение

$$u(x) = \mathcal{E}(x) * f(x).$$

Доказательство. Пользуясь свойством линейности дифференциального оператора $P(D)$, а также задачей 1, имеем

$$P(D)(\mathcal{E}(x) * f(x)) = (P(D)\mathcal{E}(x)) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x). \quad (6)$$

Теорема доказана.

Пример 2. Пусть $P(D) = \Delta$. Тогда в силу вышесказанного имеем частное решение

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * f(x).$$

Так, в том случае, когда $f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, получаем классический ньютонов потенциал:

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{1}{4\pi|x|} * f(x), \varphi(x) \right\rangle &= \left\langle -\frac{1}{4\pi|\xi|} \cdot f(\eta), \varphi(\xi + \eta) \right\rangle = - \iint_{\mathbb{R}^6} \frac{f(\eta)}{4\pi|\xi|} \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta = \\ &= \{w = \xi + \eta, v = \eta\} = - \iint_{\mathbb{R}^6} \frac{f(v)}{4\pi|w-v|} \varphi(w) dw dv = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} dw \varphi(w) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v)}{4\pi|w-v|} dw, \end{aligned}$$

или

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v) dv}{4\pi|x-v|}.$$

(Вопрос. Почему переменную w в подынтегральном выражении заменили на x ?)

Рассмотрим теперь случай обыкновенного линейного дифференциального оператора

$$L \equiv \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt} + a_n.$$

Как известно из классической теории дифференциальных уравнений, существует *функция Коши оператора* L — решение задачи Коши

$$\begin{cases} Lz(t) = 0, \\ z(0) = 0, \dots, z^{(n-2)}(0) = 0, z^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

(Строго говоря, функцией Коши будет называться функция $K(t, s) = z(t - s)$.)

Докажем, что в этом случае $\mathcal{E}(t) = z(t)\theta(t)$ — фундаментальное решение оператора L . (Заметим, что поскольку $z(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, то речь идёт об умножении обобщённой функции $\theta(t)$ на бесконечно гладкую функцию.)

Заметим (задача 2), что производные обобщённых функций можно вычислять последовательно, а также (задача 3), что для дифференцирования произведения обобщённой функции и бесконечно гладкой верна обычная формула дифференцирования произведения. Тогда с учётом начальных условий из задачи Коши (7) получаем (не пользуясь формулой Лейбница, а дифференцируя последовательно)

$$(z(t)\theta(t))' = z'(t)\theta(t) + z(t)\theta'(t) = z'(t)\theta(t) + z(t)\delta(t) = z'(t)\theta(t) + z(0)\delta(t) = z'(t)\theta(t),$$

$$(z(t)\theta(t))'' = (z'(t)\theta(t))' = z''(t)\theta(t) + z'(t)\delta(t) = z''(t)\theta(t) + z'(0)\delta(t) = z''(t)\theta(t),$$

...

$$(z(t)\theta(t))^{(n-1)} = ((z(t)\theta(t))^{(n-2)})' = (z^{(n-2)}(t)\theta(t))' = z^{(n-1)}(t)\theta(t) + z^{(n-2)}(0)\delta(t) = z^{(n-1)}(t)\theta(t),$$

$$(z(t)\theta(t))^{(n)} = (z^{(n-1)}(t)\theta(t))' = z^{(n)}(t)\theta(t) + z^{(n-1)}(0)\delta(t) = z^{(n)}(t)\theta(t) + \delta(t).$$

Подставляя найдённые производные в оператор $L(D)$, получаем

$$L(D)\mathcal{E}(t) = (L(D)z(t))\theta(t) + \delta(t) = \delta(t),$$

что и требовалось.

Пример 3. Докажем, что функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!} \theta(t)$$

является фундаментальным решением оператора $\frac{d^k}{dt^k} - a$. (Здесь $a \neq 0$ — константа.)

В силу предыдущего достаточно доказать, что функция

$$z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!}$$

является решением соответствующего однородного уравнения с начальными условиями, аналогичными таковым из задачи (7).

Учитывая возможность почленного дифференцирования ряда внутри его интервала сходимости (в данном случае — бесконечного), нетрудно установить, что $z(0) = \dots = z^{(k-2)}(0) = 0$, $z^{(k-1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)k}}{((n-1)k)!}$, $z^{(k-1)}(0) = 1$,

$$\frac{d^k}{dt^k} u(t) = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} a^{n-1} \frac{t^{nk-k-1}}{(nk-k-1)!} = \sum_{l=1}^{\infty} a^l \frac{t^{lk-1}}{(lk-1)!} = az(t).$$

Отсюда следует, что (7) для оператора $L = \frac{d^k}{dt^k} - a$ выполнено.

2. Обобщённая задача Коши

Рассмотрим классическую задачу Коши для ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_n u = f(t), & t > 0, \\ u^{(k)}(0) = u_k, & k = 0, \dots, n-1, \\ f(t) \in C[0; +\infty). \end{cases} \quad (8)$$

Продолжим f и решение u (существование которого следует из классической теории) нулём при $t < 0$ и обозначим полученные функции соответственно через \tilde{f} , \tilde{u} .

Тогда (см. задачу 4) имеем

$$\tilde{u}^{(k)}(t) = \{\tilde{u}^{(k)}(t)\}\theta(t) + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-1-j)}(t), \quad k = 1, \dots, n, \quad (9)$$

где фигурные скобки означают, что мы берём (поточечно) значение классической производной, а в точках, где она не определена, берём, например, нулевые значения. (Заметим, что здесь речь не идёт об умножении обобщённой функции на бесконечно дифференцируемую, но это не мешает нам установить корректность обобщённой функции в правой части «вручную».)

Подставляем в уравнение. С учётом (9), собирая коэффициенты, имеем

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= \{Lu\}\theta(t) + u_0 \delta^{(n-1)}(t) + (a_1 u_0 + u_1) \delta^{(n-2)}(t) + \dots + (a_{n-1} u_0 + a_{n-2} u_1 + \dots + u_{n-1}) \delta(t) \equiv \\ &\equiv f(t)\theta(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t) \equiv \tilde{f}(t) + \sum_{l=0}^{n-1} c_l \delta^{(l)}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 &= a_{n-1} u_0 + \dots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}, \dots, \\ c_{n-2} &= a_1 u_0 + u_1, \quad c_{n-1} = u_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, $\tilde{u}(t)$ удовлетворяет в смысле обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнению

$$L\tilde{u} = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t) \equiv \tilde{\tilde{f}}(t). \quad (11)$$

Заметим, что в уравнении (11) уже содержатся (посредством коэффициентов c_k) начальные условия задачи (11). Поэтому задача (11) называется *обобщённой задачей Коши*. В то же время, носители обобщённых функций $\mathcal{E}(t) \equiv z(t)\theta(t)$ и $\tilde{\tilde{f}}(t)$ — правой части уравнения (11) — ограничены с одной стороны, а поэтому (см. замечание в предыдущей лекции) определена их свёртка $\tilde{u}(t) \equiv \mathcal{E}(t) * \tilde{\tilde{f}}(t)$, которая в силу теоремы 2 является решением задачи (11).

Ранее мы исходили из классического решения задачи (8). Мы «упаковали» её (уравнение и граничные условия) в одно-единственное уравнение относительно функции $\tilde{u}(t) \equiv u(t)\theta(t)$ и нашли решение последнего $\tilde{u}(t)$. Если удастся показать, что $\tilde{u}(t) = u(t)$ при $t > 0$, то можно будет и в самом деле говорить о сведении классической задачи Коши (8) к обобщённой (11).

Заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \mathcal{E}(t) * \tilde{\tilde{f}}(t) = \mathcal{E}(t) * (\tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t)) = \\ &= \mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathcal{E}^{(k)}(t) = \left(\int_0^t z(t-s)f(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)}(t) \right) \theta(t). \end{aligned} \quad (12)$$

(Равенство $\mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t) = \int_0^t z(t-s)f(s) ds \theta(t)$ будет доказано ниже.)

Далее можно рассуждать двояко. Можно явно проверить, что функция, стоящая в правой части (12), после ограничения на $[0; +\infty)$ удовлетворяет задаче Коши (8). А можно заметить, что задачу (11) мы получили как задачу, которой удовлетворяет функция $\tilde{u}(t)$, являющаяся продолжением классического решения, и показать, что решение задачи (11) среди обобщённых функций, *носитель которых ограничен слева*, единственно, а поэтому с необходимостью $\tilde{u} = \tilde{u}$. (Задачи 5, 6.)

Итак, наш подход позволил построить решение произвольной классической задачи Коши вида (8) исходя только из функции Коши уравнения.

Осталось доказать лишь, что $\mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t) = \int_0^t z(t-s)f(s) ds \theta(t)$. Имеем при любой $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t), \varphi(t) \rangle &= \langle \mathcal{E}(\xi) \cdot \tilde{f}(\eta), \varphi(\xi + \eta) \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\xi) \tilde{f}(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_0^{+\infty} d\xi \int_0^{+\infty} d\eta z(\xi) f(\eta) \varphi(\xi + \eta) = \{w = \xi + \eta, v = \eta\} = \int_0^{+\infty} dw \varphi(w) \int_0^w dv z(w-v) f(v) dv = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dw \theta(w) \int_0^w dw z(w-v) f(v) dv = \left\langle \theta(w) \int_0^w z(w-v) f(v) dv, \varphi(w) \right\rangle. \end{aligned}$$

(Читатель может сам проверить расстановку пределов интегрирования, преобразовав уравнения границ области интегрирования к новым переменным и выбрав нужную область.)

Рассмотрим примеры, где по формуле (12) получим решение задачи Коши.

4.

$$\begin{cases} \dot{u} + bu = f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Имеем $z(t) = e^{-bt}$, $c_0 = a_0 u_0 = b u_0$, откуда

$$u(t) = u_0 e^{-bt} + \int_0^t e^{-b(t-s)} f(s) ds.$$

5.

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1. \end{cases}$$

Имеем $z(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $c_0 = 0 \cdot u_0 + u_1 = u_1$, $c_1 = u_0$, откуда

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{u_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) f(s) ds.$$

Задачи для самостоятельного решения

0. Сравнить формулы (9) и (12) и объяснить, почему во втором случае при дифференцировании разрывной функции $\mathcal{E}(t)$ не появились члены вида $\alpha \delta^{(m)}(t)$.

1. 1) Доказать, что если для $f, g \in \mathcal{D}'$ существуют свёртки $f * g$, $(D^\alpha f) * g$, $f * (D^\alpha g)$, то верны равенства

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g).$$

2**) Доказать, что из существования свёртки $f * g$ следует существование остальных фигурирующих здесь свёрток. 3) Привести контрпример к обратному следствию.

2. Доказать, что производные обобщённых функций можно вычислять последовательно, т. е. для любой $f \in \mathcal{D}'$ и любых мультииндексов α, β верно

$$D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f,$$

где мультииндексы складываются по координатно.

3. Показать, что для k -ой производной произведения обобщённой функции $f(x)$ на бесконечно гладкую функцию $a(x)$ верна формула Лейбница (в которой производные обобщённых функций понимаются в соответствующем смысле.)

4. Доказать формулу (9).

5*, 6*. Провести намеченные в основном тексте рассуждения, обосновывающие равенства $\tilde{\tilde{u}} = \tilde{u}$, $\tilde{\tilde{u}} = u$ при $t > 0$ в классическом смысле.