



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Г.Н. Медведев

Лекции по методу усреднения

Москва
Физический факультет МГУ
2018

М е д в е д е в Г. Н. **Лекции по методы усреднения** / Учебное пособие.

М.: Физический факультет МГУ, 2018.

Учебное пособие написано на основе семестрового курса лекций, который автор много лет читал студентам в разные годы 4 или 5 курса кафедры математики физического факультета МГУ. Знакомство с методом усреднения может быть полезно и студентам других кафедр, а также всем, кто интересуется классикой математики и физики.

Медведев Герман Николаевич

ЛЕКЦИИ ПО МЕТОДУ УСРЕДНЕНИЯ

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

©Физический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2018

©Медведев Г.Н., 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	5
Введение	6
1. Асимптотическое решение и асимптотическая формула (6). 2. Регулярно и сингулярно возмущенные задачи (7). 3. Асимптотическое приближение по параметру (8). 4. Асимптотический ряд (10). 5. Еще о регулярно и сингулярно возмущенных задачах (13). 6. О методе усреднения (14). 7. Возникновение малого параметра (16). 8. Малые физические параметры (16). 9. Малый параметр, просходящий из ограничений на характер изучаемого процесса (17). 10. Уравнение Дюффинга (18).	
§ 1. Квазилинейные автономные колебательные системы с одной степенью свободы	20
1. Редукция квазилинейного уравнения колебаний к системе в стандартной форме (20). 2. Стационарные амплитуды и их устойчивость (24).	
§ 2. Системы в стандартной форме	25
1. Алгоритм построения приближенных решений (25). 2. «Улучшенное» первое приближение (29). 3. Существенная роль усредненной системы первого приближения (30). 4. Определение функций $A_i(\xi)$ и $u_i(\xi, t)$ (32). 5. Способы вычисления средних значений функций (следуем [4]) (35). 6. Первая теорема Н.Н. Боголюбова (37).	
§ 3. Системы с быстрой фазой	55
1. Редукция квазилинейного уравнения колебаний к системе с быстрой фазой (56). 2. Алгоритм построения приближенных решений системы с быстрой фазой (58). 3. Построение k -го приближения системы с быстрой фазой (61). 4. Результаты теорем о первом и втором приближениях для системы с фазой (66). 5. «Улучшенное» первое приближение (68). 6. Два частных случая (75).	
§ 4. Квазилинейные неавтономные системы с одной степенью свободы. Резонанс	79

1. Усреднение в системе с двумя фазами (80). 2. Усреднение системы с двумя быстрыми фазами в резонансном случае. Фазовая расстройка (83). 3. Стационарные резонансные режимы и их устойчивость (85).	
§ 5. Замечания о системах со многими быстрыми переменными	90
Список литературы	101

От автора

Учебное пособие написано на основе семестрового курса лекций, который автор много лет читал студентам в разные годы 4 или 5 курса кафедры математики физического факультета МГУ. Знакомство с методом усреднения может быть полезно и студентам других кафедр, а также всем, кто интересуется классикой математики и физики. Я приношу благодарность всем сотрудникам кафедры математики, с которыми приходилось обсуждать математические и методические вопросы. Компьютерный набор текста выполнили П.А. Мангура и Д.П. Мартынов, за что я им очень благодарен. С признательностью и благодарностью обращаюсь к Н.Е. Шапкиной и И.Е. Могилевскому, у которых всегда нахожу помощь и поддержку. Отдельная благодарность С.С. Кротову за интересные беседы и всегда полезные замечания.

Г.Н. Медведев

Введение

Метод усреднения является одним из асимптотических методов решения так называемых сингулярно возмущенных задач. Важнейшие задачи, исследуемые методом усреднения, возникают в теории нелинейных колебаний.

Рассмотрим основные используемые понятия.

1. Асимптотическое решение и асимптотическая формула. Асимптотическое решение — это один из вариантов приближенного решения задачи. В некоторых случаях задача не имеет решения, выражаемого конечной формулой, в других — сложность этой формулы не позволяет удобным образом выделить существенные черты поведения исследуемой системы. Общая идея асимптотических методов заключается в том, что искомое решение $f(t)$ представляется в виде

$$f(t) = F(t) + r(t), \quad (1)$$

где $F(t)$ находится проще, чем $f(t)$ и «мало» отличается от $f(t)$.

Такое приближенное решение $F(t)$ называется *асимптотическим решением*, а сама формула (1) — *асимптотической формулой* или *асимптотикой*.

Если задача рассматривается в окрестности некоторой точки t_0 и $r(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, то такая асимптотика называется *асимптотикой по независимой переменной*.

Простейшим примером асимптотики по независимой переменной является формула Тейлора, по которой любая достаточно гладкая функция представляется в виде многочлена плюс малый остаточный член (при $t \rightarrow t_0$).

В других случаях и задача и ее решение зависят от параметра. Часто исследуется поведение решения при стремлении этого параметра к нулю и тогда говорят о *малом параметре*.

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Тогда асимптотика приобретает вид

$$f(t, \varepsilon) = F(t, \varepsilon) + r(t, \varepsilon). \quad (2)$$

В этом случае «приближенность» $F(t, \varepsilon)$ к $f(t, \varepsilon)$ обеспечивается условием

$$r(t, \varepsilon) \rightrightarrows_D 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то есть при $\varepsilon \rightarrow 0$ $r(t, \varepsilon)$ стремится к нулю равномерно в рассматриваемой области D переменной t .

Такая асимптотическая формула (2) называется *асимптотической по малому параметру*.

Задачи, исследуемые методом усреднения, относятся к задачам второго типа — задачам с малым параметром. Поэтому рассмотрим основные понятия, используемые для решения задач с малым параметром.

2. Регулярно и сингулярно возмущенные задачи. Пусть даны две задачи (во многом следуем [2])

$$L_0 u = f_0, \quad (A_0)$$

$$L_0 u + \varepsilon L_1 u = f_0 + \varepsilon f_1, \quad (A_\varepsilon)$$

где L_0 и L_1 — операторы, все функции заданы при $t \in D$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а в понятие задачи, кроме уравнения, могут входить и дополнительные условия.

Задача A_0 описывает упрощенную модель процесса, A_ε — расширенная модель.

Пусть $u_0(t)$ — решение задачи A_0 , $u_\varepsilon(t)$ — решение задачи A_ε . Понятно, что интересны случаи, когда

$$u_\varepsilon(t) - u_0(t) \rightrightarrows_D 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

($u_0(t) - u_\varepsilon(t)$ равномерно в D стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Определение 1 Задача A_ε называется *регулярно возмущенной*, если

$$\sup_D \|u_\varepsilon(t) - u_0(t)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В противном случае задача называется *сингулярно возмущенной*.

Слово *сингулярный* может означать «одионый», «единичный», но также — «отдельный», «странный», «особенный». В математике и физике это слово употребляется во многих смыслах, но всегда речь идет о той или иной особенности.

Задача 1. Пусть задача A_ε имеет вид

$$\begin{cases} y' = \varepsilon, \\ y(0) = C. \end{cases}$$

Ее решение $y_\varepsilon = C + \varepsilon t$, $t \in D$.

Соответствующая задача A_0 выглядит так

$$\begin{cases} y'_0 = 0, \\ y_0(0) = C. \end{cases}$$

Ее решение $y_0 = C$, $t \in D$.

Образуем интересующее нас выражение

$$\sup_D |C + \varepsilon t - C| = \begin{cases} \varepsilon L \rightarrow 0, & \varepsilon \rightarrow 0, & t \in [0, L], \\ \varepsilon \frac{L}{\varepsilon} \rightarrow 0, & \varepsilon \rightarrow 0, & t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]. \end{cases}$$

Видно, что на промежутке $[0, L]$ выполняется Определение 1 регулярно возмущенной задачи. Значит, на промежутке $[0, L]$ Задача 1. является регулярно возмущенной.

На промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ Определение 1 не выполняется, значит, на промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ Задача 1. является сингулярно возмущенной.

Задача 2. Пусть задача A_ε имеет вид

$$\begin{cases} y' = \varepsilon y, \\ y(0) = C. \end{cases}$$

Ее решение $y_\varepsilon = Ce^{\varepsilon t}$, $t \in D$.

Соответствующая задача выглядит так

$$\begin{cases} y'_0 = 0, \\ y_0(0) = C. \end{cases}$$

Ее решение $y_0 = C$, $t \in D$.

Опять:

$$\sup_D C|e^{\varepsilon t} - 1| = \begin{cases} C|e^{\varepsilon L} - 1| \rightarrow 0, & \varepsilon \rightarrow 0, & t \in [0, L], \\ C|e^{\varepsilon \frac{L}{\varepsilon}} - 1| \rightarrow 0, & \varepsilon \rightarrow 0, & t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]. \end{cases}$$

Снова получаем, что на промежутке $[0, L]$ Задача 2. является регулярно возмущенной, а на $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ — сингулярно возмущенной.

3. Асимптотическое приближение по параметру. Пусть $u_\varepsilon(t)$ — решение задачи A_ε и в области D определена также другая функция $U(t, \varepsilon)$.

Определение 2 Функция $U(t, \varepsilon)$ называется асимптотическим приближением по параметру ε для решения $u_\varepsilon(t)$ в области D , если

$$\sup_D \|u_\varepsilon(t) - U(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если при этом

$$\sup_D \|u_\varepsilon(t) - U(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{k+1}),$$

то говорят, что $U(t, \varepsilon)$ является асимптотическим приближением для $u_\varepsilon(t)$ в D с погрешностью порядка ε^{k+1} .

Замечание 1 Многим авторам нравится говорить и писать «с точностью» (Например, смотрите [2]).

Сделаем некоторое отступление по поводу символа $O(\varepsilon^{k+1})$. В приведенном выше и часто используемом Определении 2 символ «О-большое» понимается шире, чем в курсе математического анализа на физическом факультете МГУ, а именно:

$$\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1}),$$

если $\exists C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, такие что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$|\alpha(\varepsilon)| < C\varepsilon^{k+1}.$$

Такое понимание символа «О-большое» удобнее, так как оценки погрешностей обычно получаются именно в виде неравенств.

Сопоставим два определения символа «О-большое».

1. В курсе математического анализа на I курсе физического факультета к этому символу приводят следующие рассуждения. Говорим, что $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$, если $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}} \rightarrow C \neq 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Последний результат можно записать в виде $\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}} = C + \gamma(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, откуда

$$|\alpha(\varepsilon)| = |C + \gamma(\varepsilon)| \cdot \varepsilon^{k+1} < 2|C| \cdot \varepsilon^{k+1}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$$

(так как $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то найдется ε_0 , начиная с которого $|\gamma(\varepsilon)| < C$).

Значит $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$ в смысле приведенного выше определения с неравенством.

2. Пусть теперь $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$ в «новом» смысле, то есть $|\alpha(\varepsilon)| < C\varepsilon^{k+1}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Покажем, что при этом не обязательно существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon^{k+1}}.$$

Пусть, например, $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon \cdot \sin \frac{1}{\varepsilon}$, тогда $|\alpha(\varepsilon)| \leq 1 \cdot \varepsilon$, то есть $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ по новому определению, хотя $\frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon} = \sin \frac{1}{\varepsilon} \not\rightarrow C$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом малая погрешность $\varepsilon \cdot \sin \frac{1}{\varepsilon}$ вполне может нас устроить.

Ясно, что новое определение «О-большого» вполне можно называть расширенным. В дальнейшем будем пользоваться этим расширенным определением.

4. Асимптотический ряд. Асимптотическое приближение обычно строится в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon), \quad t \in D, \quad (3)$$

где $u_k(t, \varepsilon)$ – ограниченные функции, что обеспечивает малость каждого следующего члена равномерно по $t \in D$ по сравнению с предыдущим.

Кроме того, частичная сумма такого ряда $U_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(t, \varepsilon)$ должна быть асимптотическим приближением для $u_\varepsilon(t)$ в D с погрешностью порядка ε^{n+1} , то есть

$$\sup_D \|u_\varepsilon(t) - U_n(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (4)$$

Определение 3 Ряд (3), удовлетворяющий условию (4) называется асимптотическим рядом для $u_\varepsilon(t)$ или асимптотическим разложением точного решения $u_\varepsilon(t)$.

Замечание 2 Ряд может быть сходящимся и асимптотическим.

Для Задачи 2 решение в виде ряда

$$y_\varepsilon = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots$$

согласно методу малого параметра дает

$$y_\varepsilon = C \left(1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} + \dots \right) = C e^{\varepsilon t}. \quad (5)$$

По виду этого ряда легко определить его сумму – решение Задачи 2 в виде формулы.

Если $t \in [0, L]$ (то есть отрезок t — конечный), то ряд (5), во-первых, сходится, а во-вторых, является асимптотическим. Погрешность его n -й частичной суммы по формуле Тейлора есть

$$O((\varepsilon L)^{n+1}) = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Значит, разложение (5) дает сходящийся и для $t \in [0, L]$ асимптотический ряд.

Замечание 3 *Ряд может быть сходящимся, но не асимптотическим.*

В самом деле, ряд (5) сходится при любых t (малость коэффициентов Тейлора $\frac{1}{n!}$ «берет свое»). В том числе, ряд сходится, например, и при $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$. Такой промежуток называют *асимптотически большим*. Но! В этом случае каждое следующее слагаемое уже не является малой поправкой к предыдущему при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $\varepsilon \cdot \frac{L}{\varepsilon} \not\rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Значит, $\varepsilon t \not\rightarrow 0$ равномерно на $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

Поэтому для $t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ ряд (5) является сходящимся, но не асимптотическим.

В Задаче 1 ряд для решения оказывается даже конечным $y_\varepsilon = C + \varepsilon t$, но его первая конечная сумма не является асимптотическим приближением на $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ для $y_\varepsilon = C + \varepsilon t$.

Вторая сумма $C + \varepsilon t$ является асимптотическим приближением (с любой погрешностью ε^{n+1}), так как совпадает с точным решением.

Замечание 4 *Асимптотический ряд может быть расходящимся.*

Действительно, асимптотический ряд удовлетворяет условию (4), что равносильно неравенству

$$\sup_D \|u_\varepsilon(t) - U_n(t, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{n+1}, \quad (6)$$

где, вообще говоря, $C = C(n)$.

Сходимость ряда (3) означает, что

$$\|u_\varepsilon(t) - U_n(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Но из (7) не следует (6), так как, вообще говоря, зависимость $C(n)$ может быть такова, что $C(n)\varepsilon^{n+1} \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Приведенный ниже пример рассмотрен в [2] (сохраняем обозначения источника).

Рассмотрим дифференциальное уравнение с малым параметром

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^3} - \frac{1}{x}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (8)$$

Ищем решение в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x).$$

Подставляем искомый вид решения в (8), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε и находим функции $u_k(x)$:

$$u_0 = -x, \quad u_1 = x^2, \quad u_2 = -(2!)x^3, \quad \dots, \quad u_k = (-1)^{k+1} (k!)x^{k+1}, \quad \dots$$

Получим ряд

$$u = -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \dots + \varepsilon^n (-1)^{n+1} (n!)x^{n+1} + \dots, \quad (9)$$

который расходится при $\varepsilon > 0$ во всех точках x , кроме $x = 0$.

Покажем, что ряд (9) является асимптотическим рядом для некоторого решения уравнения (8).

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, \varepsilon) = C e^{\frac{1}{\varepsilon x}} - \left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t} e^{-\frac{1}{\varepsilon t}} dt \right) e^{\frac{1}{\varepsilon x}}.$$

При $C = 0$ получаем частное решение (обозначим его $u_\varepsilon(x)$)

$$u_\varepsilon(x) = - \left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t} e^{-\frac{1}{\varepsilon t}} dt \right) e^{\frac{1}{\varepsilon x}}. \quad (10)$$

Интеграл выглядит как несобственный, но нетрудно заметить, что при $t \rightarrow 0$ подынтегральная функция стремится к нулю.

Интегрируя трижды по частям (подробно см. [2]) получаем

$$u_\varepsilon(x) = -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^2 \int_0^x 6t^2 e^{\left(-\frac{1}{\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon x}\right)} dt. \quad (11)$$

Так как $e^{\left(-\frac{1}{\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon x}\right)} \leq 1$ при $0 < t \leq x$, то последнее слагаемое в (11) не превосходит

$$\varepsilon^2 \int_0^x 6t^2 dt = 2\varepsilon^2 x^3 \leq 2a^2 \cdot \varepsilon^2.$$

Таким образом,

$$u_\varepsilon(x) = -x + \varepsilon x^2 + O(\varepsilon^2).$$

Продолжая интегрировать по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \dots + \varepsilon^n (-1)^{n+1} (n!) x^{n+1} + O(\varepsilon^{n+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (-1)^{k+1} (k!) x^{k+1} + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Последнее равенство означает, что

$$\sup_{0 < x \leq a} |u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $U_n(x, \varepsilon)$ – частичная сумма ряда (12).

Значит, согласно Определению 3 ряд (12) является асимптотическим при $\varepsilon \rightarrow 0$ рядом для решения $u_\varepsilon(x)$ на промежутке $0 < x \leq a$.

При этом, напомним, ряд (12) является расходящимся для $x > 0$.

5. Еще о регулярно и сингулярно возмущенных задачах.

Вначале мы нашли, что Задачи 1. и 2. были регулярно возмущенными на промежутке $[0, L]$ и сингулярно возмущенными на асимптотически большом промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

Мы получили эти факты по Определению 1, в которое входили решения $u_\varepsilon(t)$ и $u_0(t)$ возмущенной и невозмущенной задач.

Но такое определение не является конструктивным, так как в более сложных задачах решение $u_\varepsilon(t)$ возмущенной задачи неизвестно. На практике задачу считают регулярно возмущенной, если удастся методом малого параметра построить ее асимптотический ряд. В противном случае ее считают сингулярно возмущенной.

В Задаче 2. методом малого параметра получился ряд, в котором мы даже узнали точное решение, но любая конечная

сумма этого ряда на асимптотически большом промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ не является асимптотическим приближением.

Значит, в этом случае ряд, хотя и дающий точное решение, не является асимптотическим, а Задача 2, согласно введенной выше договоренности, будет сингулярно возмущенной. Вообще в любой возмущенной задаче ищут сначала решение методом малого параметра. В Задачах 1 и 2 этим методом на промежутке $[0, L]$ получились асимптотические ряды. В таком случае говорят о *регулярно возмущенной задаче*.

Если же метод малого параметра не дает асимптотический ряд, то такую задачу называют *сингулярно возмущенной*.

Задача 3. Построить асимптотическое и точное решение задачи

$$\begin{cases} y' = \varepsilon y^2, \\ y(0) = C \end{cases}$$

и сопоставить их друг с другом. Является ли эта задача регулярной или сингулярно возмущенной?

6. О методе усреднения. Одним из методов, позволяющих преодолевать трудности решения сингулярно возмущенных задач и строить равномерно пригодные в рассматриваемых областях решения, является метод усреднения.

Первоначально идея усреднения возникла в сложных уравнениях небесной механики.

Правые части таких уравнений, описывающих колебательные или вращательные движения, заменялись «сглаженными» усредненными функциями. Это позволяло упростить уравнения и в ряде случаев точно их проинтегрировать (Гаусс (1867), Фату (1931)).

В теории нелинейных колебаний, не называя это методом усреднения, М.В. Остроградский в 1835 году, изучая колебания маятника с кубичной нелинейностью, получал в первом приближении решение, совпадающее с тем, которое получается методом усреднения.

Еще ранее, в 1682 году Исаак Ньютон нашел формулу, определяющую величину затухания малых колебаний маятника при любом законе сопротивления среды. Эта формула всецело совпадает с первым приближением, получаемым по методу усреднения.

В 1930-е годы, годы быстрого развития радиотехники и электротехники, систематическим применением метода усреднения занимался голландец Ван дер Поль. Его замена переменных,

выделяющая так называемые медленные переменные, вошла в классику теории колебаний с его именем. Радиофизики и поныне говорят о методе «медленно меняющихся амплитуд».

На начальном этапе развития нелинейной механики и радиофизики этот метод оказался весьма плодотворным, хотя доказательством теорем и обоснованием границ применимости не сопровождался.

С середины 1930-х годов начинает закладываться строгий математический фундамент асимптотических методов в теории нелинейных колебаний. Различные варианты метода усреднения часто называют методом Крылова-Боголюбова или методом Крылова-Боголюбова-Митропольского.

Наступает время доказательства теорем, выяснения границ применимости оценки точности приближенных решений, обобщение метода на различные типы и классы задач.

Первые книги Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова по нелинейной механике появились в 1934 и 1937 гг.

К 1940-м годам относится появление доказательств фундаментальных теорем метода усреднения – I и II теорем Боголюбова для асимптотически большого и бесконечного промежутков времени.

Давая результат для первого приближения, они фактически обосновывают применимость самого метода усреднения к изучаемому классу задач.

Постепенно расширялся круг задач, исследуемых методом усреднения. Это системы с медленной амплитудой и быстрой фазой. Это системы с несколькими фазами, где неизбежно возникновение резонанса. Это задачи с вращательными движениями. Это уравнения с запаздывающим аргументом и т.д.

Далее – развитие асимптотических методов в теории уравнений с частными производными, где важнейшим классом задач являются задачи гидродинамики.

В 1960-е годы новым направлением применения асимптотических методов оказывается нелинейная оптика. Докторская диссертация Р.В. Хохлова называлась «Метод поэтапного упрощения укороченных уравнений и его применение к некоторым проблемам радиофизики» (1962). Физики обычно называют усредненные уравнения укороченными (от ряда Фурье усредняемой периодической функции остается нулевая гармоника).

В 1964 году вышла первая в мировой литературе книга С.А. Ахманова и Р.В. Хохлова «Проблемы нелинейной оптики».

Усреднять так усреднять! Почему надо усреднять только по времени?

Изучение слоистых и композитных сред проводится также асимптотическими методами. Вместо усреднения по времени используется усреднение по координате поперек слоев, по которой свойства среды являются периодическими.

8. Малые физические параметры. Во многих задачах появление в уравнениях малого параметра имеет своей причиной малость того или иного физического параметра, входящего в уравнение. Таким параметром в уравнении колебаний может быть, например, малая вязкость.

Но правильный учет порядка этой малости относительно других членов уравнения возможен только после перехода к безразмерным переменным.

Рассмотрим уравнение колебаний маятника в среде с малой вязкостью

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky = 0. \quad (13)$$

Здесь y — смещение (можно представлять себе колебания массы m на горизонтальных пружинках), μ — коэффициент вязкости, k — коэффициент жесткости.

Для перехода к безразмерным переменным выберем характерную длину y_0 — начальное смещение и характерное время $t_0 = \frac{1}{\omega_0}$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — частота колебаний при $\mu = 0$.

Тогда безразмерными переменными будут $y^* = \frac{y}{y_0}$ и $t^* = \frac{t}{t_0} = \omega_0 t$, откуда $y = y_0 \cdot y^*$, $t = t_0 \cdot t^*$.

Переходя в уравнении (13) к переменным y^* и t^* , имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(y_0 y^*)}{dt^*} \cdot \frac{dt^*}{dt} = (\omega_0 y_0) \frac{dy^*}{dt^*},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = (\omega_0 y_0) \frac{d}{dt^*} \left(\frac{dy^*}{dt^*} \right) \cdot \frac{dt^*}{dt} = (\omega_0^2 y_0) \frac{d^2 y^*}{dt^{*2}}.$$

Подставляем y и полученные производные в уравнение (13):

$$m\omega_0^2 y_0 \cdot \ddot{y}^* + \mu\omega_0 y_0 \cdot \dot{y}^* + ky_0 \cdot y^* = 0.$$

Деля на $m\omega_0^2 y_0$, получаем

$$\ddot{y}^* + \frac{\mu}{m\omega_0} \dot{y}^* + \frac{k}{m\omega_0^2} y^* = 0,$$

где $\frac{\mu}{m\omega_0} = \frac{\mu}{\sqrt{kt}} = \mu^*$ – безразмерный коэффициент вязкости,

$\frac{k}{m\omega_0^2} = 1$ в силу выбора $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Итак, «истинным» малым параметром будет безразмерный параметр $\mu^* = \frac{\mu}{\sqrt{kt}}$, который, конечно, мал, если μ мало, но k и m также требуют, чтобы их учитывали.

В безразмерных переменных уравнение (13) принимает вид

$$\ddot{y}^* + \mu^* \cdot \dot{y}^* + y^* = 0.$$

9. Малый параметр, происходящий из ограничений на характер изучаемого процесса. Всем известно, что уравнением малых колебаний маятника является уравнение

$$\ddot{y} + y = 0.$$

Договоримся, что считать малыми колебаниями.

Уравнение математического маятника имеет вид

$$\ddot{z} + \omega_0^2 \sin z = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, а z – угол отклонения.

Пусть $\omega_0^2 = 1$. Имеем

$$\ddot{z} + \sin z = 0,$$

или для любых z

$$\ddot{z} + z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = 0. \quad (14)$$

Будем считать $\varepsilon > 0$ малым параметром и рассмотрим «малые колебания» $z = \varepsilon y$ ($0 \leq y \leq 90^\circ$). Подставляя $z = \varepsilon y$ в уравнение (14), имеем

$$\varepsilon \ddot{y} + \varepsilon y - \frac{1}{3!} \varepsilon \cdot \varepsilon^2 y^3 + \frac{1}{5!} \varepsilon \cdot \varepsilon^4 y^5 - \dots = 0.$$

Договоримся отбросить в разложении члены порядка ε^2 и выше. Получаем уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{y} + y = 0.$$

Рассмотрим теперь «небольшие» колебания, выбирая $z = \sqrt{\varepsilon} y$. Подставляя этот вид z в уравнение (14), получаем

$$\sqrt{\varepsilon} \ddot{y} + \sqrt{\varepsilon} y - \frac{1}{3!} \varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon} y^3 + \frac{1}{5!} \sqrt{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 y^5 - \dots = 0.$$

Если опять отбросить члены порядка ε^2 и выше, то остается уравнение

$$\ddot{y} + y - \frac{1}{3!} \varepsilon y^3 = 0.$$

Если для примера выбрать $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то для "малых" колебаний получим $z = \varepsilon y \leq \frac{1}{10} \cdot 90^\circ = 9^\circ$.

При том же $\varepsilon = \frac{1}{10}$ для «небольших» колебаний получим $z = \sqrt{\varepsilon} y = \sqrt{\frac{1}{10}} y \leq \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 90^\circ \approx 28^\circ$.

Понятно, что числовой коэффициент $\frac{1}{3!}$ можно включить в малый параметр (не нарушая его порядка по ε) и в дальнейшем рассматривать уравнение небольших колебаний маятника в виде

$$\ddot{y} + y = \varepsilon y^3. \quad (15)$$

В таком виде оно носит название уравнения Дюффинга (или Дуффинга).

Таковы наиболее характерные случаи появления в уравнениях малого параметра: малые физические параметры или ограничения на тип процесса.

10. Уравнение Дюффинга. Выше были рассмотрены чисто модельные примеры, когда метод малого параметра не позволял получить равномерно пригодное асимптотическое приближение на большом промежутке времени $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

Классическим физическим примером, иллюстрирующим такую ситуацию является уравнение Дюффинга (15).

Попытаемся найти методом малого параметра решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = \varepsilon y^3, \\ y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

в виде ряда

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots, \quad (17)$$

где $y_i(t)$ — ограниченные функции.

Подставляя (17) в (16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем задачи:

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + y_0 = 0, \\ y_0(0) = a, \quad \dot{y}_0(0) = 0, \end{cases}$$

откуда $y_0(t) = a \cos t$,

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 = \dot{y}_0^3 = a^3 \cos^3 t = \frac{a^3}{4}(\cos 3t + 3 \cos t), \\ y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \end{cases}$$

откуда $y_1(t) = a^3 \left[\frac{3}{8}t \sin t - \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) \right]$, и т.д.

Для функции $y(t)$ получаем разложение (17):

$$y(t) = a \cos t + \varepsilon a^3 \left[\frac{3}{8}t \sin t - \frac{1}{32}(\cos 3t - \cos t) \right] + \varepsilon^2 \dots$$

Этот ряд хотя и медленно, но сходится. Но его конечные суммы не могут служить равномерным на $t \geq 0$ и даже для $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ приближением $y(t)$ из-за появления так называемых «вековых» или «секулярных» (лат. *saeculum* — век) членов вида

$$t^n \sin mt, \quad t^n \cos mt.$$

«Этим названием мы обязаны тому обстоятельству, что в астрономических приложениях величина ε оказывается обычно крайне малой, так что произведение εt начинает играть заметную роль в расчетах лишь по истечении очень большого промежутка времени, например, порядка столетия» (А. Найфэ «Введение в методы возмущений»).

Несколько более далекая связь ведет от того же *saeculum* (уже как «век — срок жизни человека») к другому смыслу слова «секулярный» — от позднелатинского *saecularis* — мирской, светский, нерелигиозный.

Видно, что на конечном промежутке $[0, L]$ член $\varepsilon t \sin t$ имеет порядок ε (метод малого параметра работает!). Но задачи теории колебаний имеет смысл рассматривать на больших промежутках времени, а на промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ это и другие аналогичные слагаемые не являются малой (по ε) поправкой к предыдущим, что требуется от членов асимптотического ряда.

Итак, неприменимость метода малого параметра на асимптотически большом промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ заставляет отнести на этом промежутке уравнение Дюффинга к сингулярно возмущенным задачам.

Уравнение Дюффинга заменой переменной сводится к уравнению с разделяющимися переменными, но получающаяся далее квадратура не выражается в элементарных функциях. Поэтому получить решение, как говорят, в замкнутой форме не удастся.

Остается надеяться на метод усреднения, и его успешное применение к уравнению Дюффинга будет изложено ниже, в конце §3.

§ 1. Квазилинейные автономные колебательные системы с одной степенью свободы

1. Редукция квазилинейного уравнения колебаний к системе в стандартной форме. Системой в *стандартной форме* (по Н.Н. Боголюбову) [1] называется система вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

где $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $X = \{X^{(1)}, \dots, X^{(m)}\}$ — m -векторы, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть возмущенная колебательная система описывается квазилинейным уравнением

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon f(y, \dot{y}), \quad (2)$$

сводящимся к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\omega^2 y + \varepsilon f(y, z). \end{cases} \quad (3)$$

При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущенное уравнение $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ с периодическим решением $y = a \cos(\omega t + \theta)$ (a и θ — постоянные).

Соответствующая невозмущенная система

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\omega^2 y, \end{cases} \quad (4)$$

имеет периодическое решение

$$y = a \cos(\omega t + \theta), \quad z = \dot{y} = -a\omega \sin(\omega t + \theta), \quad (5)$$

где a и θ также постоянные.

При $\varepsilon \neq 0$, сохраняя структуру формул (5), будем считать a и θ уже не постоянными, а переменными (вспомните метод вариации постоянных):

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= a(t, \varepsilon) \cos(\omega t + \theta(t, \varepsilon)), \\ z = \dot{y}(t, \varepsilon) &= -a(t, \varepsilon)\omega \sin(\omega t + \theta(t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (6)$$

Эти тождества рассматриваем как формулы замены переменных, формулы перехода от переменных y и $z = \dot{y}$ к переменным a и θ . Эту замену и эти переменные как раз и связывают с именем Ван дер Поля.

Более кратко в виде, удобном для последующих преобразований, последнюю систему можно записать так:

$$y = a(t, \varepsilon) \cos \psi, \quad z = \dot{y} = -a(t, \varepsilon)\omega \sin \psi, \quad \psi = \omega t + \theta(t, \varepsilon). \quad (7)$$

Дифференцируя первую из формул (7), приравниваем результат правой части второй из формул (7).

Результат дифференцирования второй из формул (7), а также переменные y и \dot{y} подставляем в исходное возмущенное уравнение (2) (или второе уравнение системы (3)).

В результате получаем линейную алгебраическую систему относительно \dot{a} и $\dot{\theta}$ (с определителем отличным от нуля):

$$\begin{cases} \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot (\omega + \dot{\theta}) = -a\omega \sin \psi, \\ -\dot{a}\omega \sin \psi - a\omega \cos \psi \cdot (\omega + \dot{\theta}) = \\ = -a\omega^2 \cos \psi + \varepsilon f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi). \end{cases} \quad (8)$$

Разрешая (8) относительно \dot{a} и $\dot{\theta}$, находим

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cdot \sin \psi \equiv \varepsilon X^{(1)}(a, \theta, \psi), \\ \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cdot \cos \psi \equiv \varepsilon X^{(2)}(a, \theta, \psi), \end{cases} \quad (9)$$

где $\psi = \omega t + \theta$.

Система уравнений (9) с векторами $x = \{a, \theta\}$ и $X = \{X^{(1)}, X^{(2)}\}$ принадлежит к классу так называемых систем в стандартной форме (1). В ней содержатся только «медленные» ($\dot{a} \sim \varepsilon$, $\dot{\theta} \sim \varepsilon$) переменные.

Идея усреднения стандартных систем состоит в сопоставлении системе (9) другой системы, где периодические по ψ (или,

что то же самое, по t) правые части заменяются их средними значениями.

Пусть \bar{a} и $\bar{\theta}$ — переменные этой другой системы:

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{a} \cos \psi, -\bar{a}\omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \equiv \varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{a}, \bar{\theta}), \\ \dot{\bar{\theta}} = -\frac{\varepsilon}{\bar{a}\omega} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\bar{a} \cos \psi, -\bar{a}\omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \equiv \varepsilon \bar{X}^{(2)}(\bar{a}, \bar{\theta}), \end{cases} \quad (10)$$

где $\psi = \omega t + \bar{\theta}$.

Усреднение проводится по явно входящему ψ по периоду 2π (или по t по периоду $\frac{2\pi}{\omega}$) при фиксированных, рассматриваемых как параметры, переменных \bar{a} и $\bar{\theta}$.

Систему (10) называют *усредненной* системой (в дальнейшем — усредненной системой первого приближения), а удовлетворяющие ей \bar{a} и $\bar{\theta}$ — «*усредненными*» переменными. Ясно, что последнее название носит жаргонный оттенок, ибо \bar{a} и $\bar{\theta}$ вовсе не какие-то средние значения функций $a(t)$ и $\theta(t)$, а это переменные усредненной системы (10). Смысл перехода к усредненной системе (10) в том, что она проще исходной системы (9), хотя по-прежнему может быть нелинейной.

В рассматриваемом случае автономного уравнения (2), где f не зависит явно от t , результат усреднения правых частей системы (9) выписан в излишне общем виде

$$\varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{a}, \bar{\theta}), \quad \varepsilon \bar{X}^{(2)}(\bar{a}, \bar{\theta}).$$

На самом деле ясно, что при усреднении по ψ , как и при эквивалентном усреднении по t , правые части (10) окажутся лишь функциями \bar{a} :

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = \varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{a}), \\ \dot{\bar{\theta}} = \varepsilon \bar{X}^{(2)}(\bar{a}). \end{cases} \quad (11)$$

Из первого уравнения (11) разделением переменных найдем функцию $\bar{a} = \bar{a}(\varepsilon t)$. Подставляя ее в правую часть второго уравнения (11), интегрированием известного выражения находим $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\varepsilon t)$.

Поэтому в рассматриваемом, хотя и важном, но все же частном случае автономного квазилинейного уравнения усредненная система (11) интегрируется в квадратурах. Первая квадратура – интегрирование известной функции при разделении переменных, вторая квадратура – интегрирование известной правой части второго уравнения (11).

В результате, возвращаясь по первой из формул (7) к исходной переменной y , находим приближенное решение возмущенного уравнения (2):

$$\tilde{y} = \bar{a}(\varepsilon t) \cos(\omega t + \bar{\theta}(\varepsilon t)). \quad (12)$$

Естественно, подлежит исследованию вопрос о той погрешности в определении $y(t)$, которая образуется в результате подстановки в выражение (12) усредненных переменных \bar{a} и $\bar{\theta}$ вместо точных переменных a и θ в первой из формул (7).

Ясно, что $y - \tilde{y}$ будет мало, если малы $a - \bar{a}$ и $\theta - \bar{\theta}$ на исследуемом промежутке времени.

Очевидно, что на конечном промежутке времени $[0, L]$ решения систем

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon X^{(1)}(a, \theta, \psi), \\ \dot{\theta} = \varepsilon X^{(2)}(a, \theta, \psi), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = \varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{a}, \bar{\theta}), \\ \dot{\bar{\theta}} = \varepsilon \bar{X}^{(2)}(\bar{a}, \bar{\theta}) \end{cases} \quad (14)$$

при одинаковых начальных данных удовлетворяют оценкам

$$a - \bar{a} = O(\varepsilon), \quad \theta - \bar{\theta} = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq L, \quad (15)$$

следующим просто из ограниченности функций $X^{(i)}$ и $\bar{X}^{(i)}$ ($i = 1, 2$).

Но, как отмечалось выше, изучать колебательные процессы имеет смысл лишь на асимптотически больших $\left(\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}\right)$ промежутках времени, на которых оценки (15) уже не следуют просто из ограниченности правых частей (13) и (14).

Выяснение близости решений систем (13) и (14) на промежутке времени $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ составляет содержание теоремы, обычно называемой *теоремой первого приближения*.

Она доказывает саму возможность применения метода усреднения и потому часто называется *принципом усреднения* для рассматриваемого вида задач.

Второй проблемой в каждом классе задач, исследуемых асимптотическим методом, является проблема построения высших приближений (так называемый *формализм* метода) и, конечно, доказательство соответствующих теорем.

Далее нам встретятся системы, содержащие как медленные, так и быстрые переменные. В рамках каждого приближения они определяются с разной точностью (естественно ожидать, что быстрые – на порядок хуже). Поэтому для таких систем принципиальной является теорема о втором приближении, в рамках которой получается второе приближение для медленных переменных и первое приближение – для быстрых.

Дальше, конечно, для таких систем тоже строится формализм получения высших приближений и доказываются соответствующие теоремы.

2. Стационарные амплитуды и их устойчивость. Важную роль играют колебания с установившейся или, так называемой, *стационарной* амплитудой, когда $\dot{\bar{a}} = 0$.

Ясно, что при этом в усредненном уравнении (см. (11))

$$\overline{X}^{(1)}(\bar{a}) = 0, \quad (16)$$

то есть стационарные амплитуды находят как корни алгебраического уравнения (16).

Пусть \bar{a}_0 – корень уравнения (16). Подставляя его во второе уравнение (11)

$$\dot{\bar{\theta}} = \varepsilon \overline{X}^{(2)}(\bar{a}_0)$$

и интегрируя постоянную правую часть, получаем

$$\bar{\theta} = \varepsilon \overline{X}^{(2)}(\bar{a}_0)t + \bar{\theta}_0$$

– линейная функция t .

Таким образом, приближенное решение уравнения (2), отвечающее стационарной амплитуде \bar{a}_0 , имеет вид

$$y = \bar{a}_0 \cos \left[(\omega + \varepsilon \overline{X}^{(2)}(\bar{a}_0))t + \bar{\theta}_0 \right]$$

– гармоническое колебание с частотой $\omega + \varepsilon \overline{X}^{(2)}(\bar{a}_0)$. Второе слагаемое называют *поправкой к частоте* ω .

Исследуем устойчивость стационарного решения \bar{a}_0 уравнения $\dot{\bar{a}} = \varepsilon \overline{X}^{(1)}(\bar{a})$ путем качественных рассуждений [1].

Рассмотрим график функции $\bar{X}^{(1)}(\bar{a})$ в окрестности точки \bar{a}_0 . Возможны два варианта поведения амплитуды \bar{a} при смещении из точки \bar{a}_0 в точку $\bar{a} = \bar{a}_0 + \delta a$.

Если $\bar{X}^{(1)}(\bar{a}) < 0$, то из уравнения $\dot{\bar{a}} = \varepsilon \bar{X}^{(1)}(\bar{a})$ следует, что и $\dot{\bar{a}} < 0$ и амплитуда \bar{a} уменьшается. А там, где $\bar{X}^{(1)}(\bar{a}) > 0$, там $\dot{\bar{a}} > 0$ и амплитуда \bar{a} увеличивается.

Следовательно, на Рис.1 точка покоя \bar{a}_0 будет устойчива, а на Рис.2 – неустойчива.

Наглядность таких рассуждений возможна благодаря тому, что первое уравнение (11) не содержит $\bar{\theta}$.

В общем случае устойчивость стационарных значений медленных переменных $(\bar{a}_0, \bar{\theta}_0)$ исследуется известными методами теории устойчивости (например, по свойствам линеаризованной системы).

§ 2. Системы в стандартной форме

1. Алгоритм построения приближенных решений. Рассмотрим систему в стандартной форме

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

где $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ и $X = \{X^{(1)}, \dots, X^{(m)}\}$ – m -векторы, $\varepsilon > 0$.

Разлагая правую часть (1) в формальный ряд по степеням ε , в дальнейшем рассматриваем систему (1) в виде

$$\dot{x} = \varepsilon X_1(x, t) + \varepsilon^2 X_2(x, t) + \varepsilon^3 \dots, \quad (2)$$

В векторно-матричных обозначениях как всегда $\frac{\partial}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$ – оператор Гамильтона. Если u – скаляр, то $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \text{gradu}$. Если $U = \{U_1, \dots, U_n\}$, $v = \{v_1, \dots, v_n\}$, $u = \{u_1, \dots, u_m\}$ – векторы, то $\frac{\partial U}{\partial x} = \left\| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\|$ – матрица.

Выражение $v = \frac{\partial U}{\partial x} u$ понимается как линейное преобразование

$$v = \left\| \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\| u$$

или в координатах

$$v_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial U_i}{\partial x_j} u_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Изложим формальный аппарат усреднения системы (2). Он позволяет:

1) исключить t из правых частей системы (2), перейдя к усредненной системе,

2) построить усредненную систему с любой выбранной степенью точности,

3) построить с помощью решений этой усредненной системы приближенное решение системы (2) с соответствующей степенью точности.

Основным требованием к правым частям системы (2) в методе усреднения является условие существования средних значений функций $X_k(x, t)$ по явно входящему времени t при фиксированных значениях «медленных» ($\dot{x} \sim \varepsilon$) переменных x :

$$\bar{X}_k(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_k(x, t) dt. \quad (3)$$

Далее ограничимся более частным, но весьма распространенным в приложениях случаем периодических по t функций $X_k(x, t)$.

Пусть функции $X_k(x, t)$ периодичны по t с периодом 2π и разложимы в ряд Фурье

$$X_k(x, t) = \bar{X}_k(x) + \sum_{n \neq 0} X_{kn} e^{int}, \quad (4)$$

где

$$X_{kn}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_k(x, t) e^{-int} dt, \quad n \neq 0,$$

$$\bar{X}_k(x) = X_{k0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_k(x, t) dt \quad (5)$$

— среднее значение $X_k(x, t)$ или «нулевая гармоника» ряда Фурье.

Будем искать формальную замену переменных, позволяющую перейти от вектора исходных переменных $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ к вектору новых переменных $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$.

Новые переменные ξ удовлетворяют усредненной системе, которая проще исходной системы (2).

Положим

$$x = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t) + \varepsilon^2 u_2(\xi, t) + \varepsilon^3 \dots, \quad (6)$$

где ξ — вектор-функция, удовлетворяющая системе

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots. \quad (7)$$

Систему (7) будем называть *усредненной* для системы (2). Ее правые части не содержат явно времени t , то есть она является *автономной*.

Здесь $u_i(\xi, t)$ — некоторые непрерывные, периодические (а, значит, ограниченные!) функции t , подлежащие определению как и функции $A_i(\xi)$ усредненной системы (7).

Далее можно пойти двумя путями. Можно сначала заняться отысканием функций $u_i(\xi, t)$ и $A_i(\xi)$, а затем строить из них приближенное решение.

Другой путь состоит в допущении, что нам известно некоторое количество функций $u_i(\xi, t)$ и $A_i(\xi)$ и мы строим из них приближенное решение.

Для первого знакомства, по мнению автора, предпочтительнее второй вариант, быстрее выводящий нас к структуре будущего решения, нумерации приближений, ожидаемой погрешности и т.д.

Итак, предположим, что некоторое количество функций $u_i(\xi, t)$ и $A_i(\xi)$ определено.

Обсудим вопрос о построении решения системы (2) в некотором k -м приближении.

Удерживая в правых частях (7) члены до порядка ε^k включительно и отбрасывая следующие, получаем так называемую *усредненную систему k -го приближения*:

$$\dot{\xi}_k = \varepsilon A_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k). \quad (8)$$

Пусть $\xi_k(t, \varepsilon)$ — решение системы (8), назовем его *k -м приближением системы (7)*. Пусть $\xi(t, \varepsilon)$ — решение системы (7). Тогда, вообще говоря,

$$\dot{\xi}(t, \varepsilon) - \dot{\xi}_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^{k+1},$$

а на промежутке $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ можно ожидать оценку

$$\xi(t, \varepsilon) - \xi_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^k, \quad (9)$$

что оправдывает название системы (8).

Ясно, что такие ожидаемые погрешности являются чисто оценочными, именно ожидаемыми, не опирающимися ни на какие доказательства.

Пусть известны функции

$$u_i(\xi, t), \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Подставляя в них решение $\xi_k(t, \varepsilon)$ системы (7), получаем с помощью формул замены переменных (6):

$$x_k(t, \varepsilon) = \xi_k(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_k, t) + \dots + \varepsilon^{k-1} u_{k-1}(\xi_k, t). \quad (10)$$

Заметим, что подстановка $\xi_k(t, \varepsilon)$ вместо точного $\xi(t, \varepsilon)$ в первое слагаемое (10) дает в силу (9) погрешность $\sim \varepsilon^k$. Поэтому удерживать в (10) член $\varepsilon^k u_k(\xi_k, t)$ не имеет смысла.

Функцию $x_k(t, \varepsilon)$, определяемую формулой (10), назовем *k-м приближением решения исходной системы* (2).

Очевидно, что если $u_i(\xi_k, t)$ ограничены (что будет обеспечено в рассматриваемом случае периодических правых частей (2)), то

$$x(t, \varepsilon) - x_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^k. \quad (11)$$

Напомним, что согласно (10) в формуле (6) удержаны члены до порядка ε^{k-1} включительно.

Ожидаемая оценка (11) оправдывает название функции $x_k(t, \varepsilon)$.

Видно также, что в правой части формулы (10) многие члены содержат излишне точные значения первого аргумента $\xi_k(t, \varepsilon)$. Так как погрешность первого слагаемого (ξ_k вместо ξ) имеет порядок ε^k , то для сохранения такого же порядка погрешности в остальных слагаемых достаточно в член $\varepsilon^i u_i(\xi, t)$ подставлять вместо ξ не $\xi_k(t, \varepsilon)$, а $\xi_{k-i}(t, \varepsilon)$ – решение соответствующей усредненной системы $k-i$ -го приближения

$$\dot{\xi}_{k-i} = \varepsilon A_1(\xi_{k-i}) + \dots + \varepsilon^{k-i} A_{k-i}(\xi_{k-i}, t).$$

Тогда погрешность слагаемого $\varepsilon^i u_i(\xi_{k-i}, t)$ будет иметь порядок $\varepsilon^i \cdot \varepsilon^{k-i} = \varepsilon^k$.

Теперь k -е приближение решения системы (2) примет вид

$$x_k(t, \varepsilon) = \xi_k(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_{k-1}, t) + \dots + \varepsilon^{k-1} u_{k-1}(\xi_1, t). \quad (12)$$

На практике, конечно, никто не будет получать решения всех усредненных систем с номерами от 1 до $k - 1$, для «выравнивания» погрешностей в членах формулы (10), если уже найдена функция $\xi_k(t, \varepsilon)$.

Тем не менее возможность подставить во втором приближении в функцию $u_1(\xi, t)$ вместо ξ не ξ_2 , а ξ_1 , может все-таки оказаться полезной.

Рассмотрим общие формулы (10) и (12) в первом и втором приближениях.

В первом приближении

$$x_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon),$$

где ξ_1 — решение усредненной системы первого приближения

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon A_1(\xi_1). \quad (13)$$

Тогда ожидаемой погрешностью будет $x(t, \varepsilon) - \xi_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ на $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Во втором приближении по формуле (12)

$$x_2(t, \varepsilon) = \xi_2(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_1(t, \varepsilon), t),$$

где ξ_2 — решение усредненной системы второго приближения

$$\dot{\xi}_2 = \varepsilon A_1(\xi_2) + \varepsilon^2 A_2(\xi_2).$$

Погрешностью второго приближения (после доказательства соответствующей теоремы) на $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ является

$$x(t, \varepsilon) - \xi_2(t, \varepsilon) - \varepsilon u_1(\xi_1, t) = O(\varepsilon^2).$$

Функции $u_i(\xi, t)$ и $A_i(\xi)$ будут определены ниже.

2. «Улучшенное» первое приближение. Сравним две функции

$$x_2(t, \varepsilon) = \xi_2(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_1(t, \varepsilon), t),$$

$$\tilde{x}_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_1(t, \varepsilon), t).$$

Первая из них — это второе приближение для $x(t, \varepsilon)$, дающее погрешность $x - x_2 = O(\varepsilon^2)$ на $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Для него нужно знать $\xi_2(t, \varepsilon)$ — решение усредненной системы второго приближения

$$\dot{\xi}_{12} = \varepsilon \bar{X}_1(\xi_2) + \varepsilon^2 A_2(\xi_2).$$

В поправку εu_1 , как было отмечено выше, с сохранением порядка погрешности $O(\varepsilon^2)$ достаточно подставить $\xi_1(t, \varepsilon)$.

Погрешность функции \tilde{x}_1 , конечно, не $O(\varepsilon^2)$, а лишь $O(\varepsilon)$ за счет первого слагаемого, но, если интерес в задаче представляется «даром» доставшаяся после определения $\xi_1(t, \varepsilon)$ поправка $\varepsilon u_1(\xi_1, t)$, то ее не отбрасывают, а функцию

$$\tilde{x}_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_1(t, \varepsilon), t)$$

называют «улучшенным» первым приближением.

Исследователь соглашается на замену плавного слагаемого ξ_2 менее точным плавным ξ_1 , но оставляет накладывающуюся на ξ_1 малую быструю поправку εu_1 .

Улучшение означает не повышение точности, а учет свойств поправки εu_1 .

3. Существенная роль усредненной системы первого приближения. Структура усредненной системы (7) позволяет заметить, что главную роль в решении усредненных систем любого приближения играет усредненная система первого приближения (13).

Решения усредненных систем высших приближений можно строить с сохранением требуемой точности, в свою очередь, приближенно методом малого параметра (вспоминая приведенную выше терминологию — регулярным методом малого параметра!). Покажем это.

Введем в усредненной системе k -го приближения

$$\dot{\xi}_k = \varepsilon A_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k), \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}, \quad (14)$$

медленное время $\tau = \varepsilon t$, $0 \leq \tau \leq L$.

Система (14) (с учетом того, что $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon \frac{d}{d\tau}$) примет вид

$$\frac{d\xi_k}{d\tau} = A_1(\xi_k) + \varepsilon A_2(\xi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1} A_k(\xi_k), \quad 0 \leq \tau \leq L, \quad (15)$$

которой более удобен конечностью промежутка $[0, L]$ как для численного интегрирования, так и для приближенного асимптотического решения.

Выше мы ожидали, что усредненная система окажется проще исходной. Видно, что именно автономность усредненной системы позволила перейти от асимптотически большого промежутка времени $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ к конечному $[0, L]$.

Регулярный метод малого параметра позволяет построить на конечном промежутке $[0, L]$ приближенное решение системы (15) на основе решения $\xi_1(\tau)$ усредненной системы первого приближения.

Пусть нам известно решение $\xi_1(\tau)$ системы первого приближения

$$\frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau} = A_1(\xi_1). \quad (16)$$

Решение системы (15) ищем в виде

$$\xi_k(\tau, \varepsilon) = \xi_1(\tau) + \varepsilon\delta\xi_1(\tau) + \varepsilon^2\delta\xi_2(\tau) + \dots, \quad (17)$$

где $\delta\xi_i(\tau)$ неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (17) в (15), разлагая по степеням ε и учитывая известное решение ξ_1 системы (16), находим линейную систему для определения вектора $\delta\xi_1$

$$\frac{d(\delta\xi_1)}{d\tau} = \frac{\partial A_1(\xi_1(\tau))}{\partial \xi} \cdot \delta\xi_1 + A_2(\xi_1(\tau)) \quad (18)$$

с известной, вообще говоря переменной, матрицей $\frac{\partial A_1(\xi_1(\tau))}{\partial \xi}$ и известной на $\xi_1(\tau)$ функцией $A_2(\xi_1(\tau))$.

Для поправок $\delta\xi_2(\tau)$ и т.д. получаются аналогичные линейные системы с той же известной матрицей коэффициентов $\frac{\partial A_1(\xi_1(\tau))}{\partial \xi}$ и известными на каждом шаге неоднородностями.

Если удастся найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы

$$\frac{d(\delta\xi_1)}{d\tau} = \frac{\partial A_1(\xi_1(\tau))}{\partial \xi} \delta\xi_1$$

(вообще говоря, с переменными коэффициентами), то далее решение системы (18) и всех остальных аналогичных находятся квадратурами.

Конечный промежуток $[0, L]$ позволяет также применять для решения систем вида (18) численное интегрирование.

По поводу выбора начальных условий для решения усредненной системы и функций $\delta\xi_i$ ограничимся замечанием, что это можно делать в рамках каждого приближения, если начальные данные для исходной системы (2) разложены по степеням ε .

Не зависящие от параметра ε начальные условия естественно «поручить» усредненной системе первого приближения, а все задачи для функций $\delta\xi_i$ рассматривать с нулевыми начальными условиями.

4. Определение функций $A_i(\xi)$ и $u_i(\xi, t)$. Вернемся к задаче последовательного определения функций $A_i(\xi)$ и $u_i(\xi, t)$.

Напомним, что функции $X_k(x, t)$ мы договорились считать периодическими и представимыми в виде рядов Фурье

$$X_k(x, t) = \overline{X}_k(x) + \sum_{n \neq 0} X_{kn}(x) e^{int}. \quad (19)$$

Здесь $\overline{X}_k(x)$ – среднее значение $X_k(x, t)$ за период 2π (нулевая гармоника ряда Фурье).

$$\overline{X}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_k(x, t) dt, \quad (20)$$

а остальные коэффициенты $X_{kn}(x)$ находятся по известным формулам

$$X_{kn}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_k(x, t) e^{-int} dt, \quad n \neq 0.$$

Дифференцируя формулы замены переменных

$$x = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t) + \varepsilon^2 u_2(\xi, t) + \dots \quad (21)$$

и подставляя \dot{x} и x в исходную систему (2), находим

$$\begin{aligned} & \dot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \dot{\xi} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \dot{\xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots = \\ & = \varepsilon X_1(\xi + \varepsilon u_1(\xi, t) + \varepsilon^2 \dots, t) + \varepsilon^2 X_2(\xi + \varepsilon \dots, t) + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned}$$

где

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots \quad (22)$$

Подставляя $\dot{\xi}$ в силу (22) и разлагая функции X_k по степеням ε , получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} [A_1(\xi) + \varepsilon A_2(\xi) + \dots] + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots = \\ & = \varepsilon X_1(\xi, t) + \varepsilon^2 \frac{\partial X_1}{\partial \xi} u_1 + \varepsilon^3 \dots + \varepsilon^2 X_2(\xi, t) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях ε :

$$A_1(\xi) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, t), \quad (23)$$

$$A_2(\xi) + \frac{\partial u_2}{\partial t} = X_2(\xi, t) + \frac{\partial X_1}{\partial \xi} u_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} A_1(\xi) \equiv F_2(\xi, t) \quad (24)$$

Из бесконечной системы (23)–(24) последовательно определяются функции $A_1, u_1, A_2, u_2, \dots$ и т.д. следующим образом.

Приравняем в тождестве (23) постоянные и переменные по отношению к t части

$$A_1(\xi) = \overline{X_1}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(\xi, t) dt, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u_1(\xi, t)}{\partial t} = X_1(\xi, t) - \overline{X_1}(\xi) = \sum_{n \neq 0} X_{1n}(\xi) e^{int}. \quad (26)$$

Замечание 1 В случае существования у функции $X_1(\xi, t)$ среднего значения общего типа (3) функция $A_1(\xi)$ имеет вид

$$A_1(\xi) = \overline{X_1}(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(\xi, t) dt. \quad (27)$$

Для функции $u_1(\xi, t)$ имеем то же уравнение

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, t) - \overline{X_1}(\xi). \quad (28)$$

Интегрируя (26) или (28) по явно входящему времени t , имеем

$$u_1(\xi, t) = \int_0^t (X_1(\xi, t) - \overline{X_1}(\xi)) dt + u_{10}(\xi).$$

Подчеркнем, что при интегрировании ξ рассматривается как параметр.

В случае периодической по t функции $X_1(\xi, t)$ из (28) получаем

$$u_1(\xi, t) = \sum_{n \neq 0} X_{1n}(\xi) \frac{e^{int}}{in} + u_{10}(\xi).$$

Показано, что в теоретическом смысле выбор постоянных интегрирования $u_{10}(\xi)$ безразличен, хотя в конкретных задачах выбор этих слагаемых может представлять интерес.

Для упрощения последующих выражений для A_2 , u_2 и т.д. будем считать $u_{10}(\xi)$ и другие аналогичные слагаемые равными нулю.

Отметим, что для периодической функции $X_1(\xi, t)$ очевидно, что интегрируя периодическую функцию $X_1(\xi, t) - \overline{X_1}(\xi)$ с нулевым средним мы получаем *ограниченную периодическую функцию* $u_1(\xi, t)$.

Подставляя найденные функции $A_1(\xi)$ и $u_1(\xi, t)$ в правую часть тождества (24), мы получаем для A_2 и u_2 равенство той же структуры, что и (23) с известной правой частью $F_2(\xi, t)$.

Опять полагаем равными друг другу не зависящие и зависящие от t слагаемые

$$A_2(\xi) = \overline{F_2}(\xi, t)$$

(среднее правой части (24)),

$$\frac{\partial u_2(\xi, t)}{\partial t} = F_2(\xi, t) - \overline{F_2}(\xi)$$

и т.д.

Таким образом определяется любое количество функций $A_i(\xi)$ и $u_i(\xi, t)$.

В заключение обсудим точность определения по методу усреднения быстрой переменной $y(t)$ — решения квазилинейного уравнения $\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon f(y, \dot{y})$, которое выше было сведено к системе в стандартной форме. При этом $y(t)$ было представлено в виде

$$y(t, \varepsilon) = a(t, \varepsilon) \cos(\omega t + \theta(t, \varepsilon)).$$

Пусть по изложенной выше процедуре найдено k -е приближение $a_k(t, \varepsilon)$, $\theta_k(t, \varepsilon)$ стандартной системы для переменных a и θ и получена функция

$$y_k(t, \varepsilon) = a_k(t, \varepsilon) \cos(\omega t + \theta_k(t, \varepsilon)).$$

Согласно приведенным выше ожидаемым оценкам для вектора $\xi = (a, \theta)$ $a - a_k \sim \varepsilon^k$ и $\theta - \theta_k \sim \varepsilon^k$ на $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ и виду y и y_k верно также $y(t, \varepsilon) - y_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^k$ на $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$.

Таким образом, если квазилинейное уравнение колебаний сведено к системе в стандартной форме, то точность определения быстрой переменной y совпадает с точностью определения амплитуды a и фазовой добавки θ .

5. Способы вычисления средних значений функций (следуем [4]).

1. Во многих конкретных приложениях усреднять приходится произведения тригонометрических функций. В этих случаях выделить среднее значение помогают формулы тригонометрии. Например:

$$\begin{aligned} \overline{\cos^2 \psi} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\psi) d\psi = \frac{1}{2}, \\ \overline{\sin^2 \psi} &= \frac{1}{2}, \\ \overline{\cos^4 \psi} &= \overline{\sin^4 \psi} = \frac{3}{8}, \\ \overline{\cos^2 \psi \cdot \sin^2 \psi} &= \frac{1}{8}, \\ \overline{\cos^6 \psi} &= \overline{\sin^6 \psi} = \frac{5}{16}, \\ \overline{\cos^4 \psi \sin^2 \psi} &= \overline{\cos^2 \psi \cdot \sin^4 \psi} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Любые произведения степеней синуса и косинуса, содержащие хотя бы одну нечетную степень, имеют нулевые средние:

$$\overline{\sin \psi \cdot \cos \psi} = \overline{\sin \psi \cdot \cos^{10} \psi} = \overline{\cos^5 \psi \cdot \sin^{10} \psi} = 0.$$

2. Достаточное условие существования среднего общего вида дает правило Лопиталья:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dT} \left(\int_0^T f(t) dt \right)}{\frac{d}{dT} T} = \lim_{T \rightarrow \infty} f(T).$$

Среднее существует, если существует последний предел. Например:

$$\overline{\frac{1}{t} \sin^2 t} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sin^2 T = 0.$$

Видно, что для такого способа вычисления среднего значения не нужно знания первообразной. Функция $f(t)$ может вообще не иметь элементарной первообразной, как в приведенном примере.

3. Если $f(t)$ — периодическая функция, то $\lim_{T \rightarrow \infty} f(t)$ не существует и предыдущий прием не годится.

В задачах теории колебаний часто возникают средние вида

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos \psi, \sin \psi)}{Q(\cos \psi, \sin \psi)} d\varphi,$$

где P и Q — многочлены от $\cos \psi$ и $\sin \psi$.

Полагая $z = e^{i\psi}$, находим

$$\psi = -i \ln z, \quad d\psi = -i \frac{dz}{z}, \quad \cos \psi = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin \psi = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Интеграл I принимает вид

$$I = -\frac{i}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{P \left[\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz} \right]}{Q \left[\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz} \right]} \frac{dz}{z} = -\frac{i}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{P^*(z)}{Q^*(z)} dz,$$

где P^* и Q^* — многочлены от z . По теореме о вычетах

$$I = -\frac{i}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{P^*(z)}{Q^*(z)} dz = \sum_{|z|<1} \text{Res} \frac{P^*(z)}{Q^*(z)}.$$

Пример. Среднее от функции $\frac{1}{a + \cos \psi}$ ($a > 1$) имеет вид

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{a + \cos \psi} = -\frac{i}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}$$

с особыми точками (полюсами 1 порядка)

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Внутри круга $|z| = 1$ находится точка $z_2 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} I &= -\frac{i}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = -\frac{i}{\pi} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \\ &= \frac{2}{z_2 - z_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{a + \cos \psi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

6. Первая теорема Н.Н. Боголюбова. «Первой теоремой Н.Н. Боголюбова» принято называть теорему о первом приближении для систем в стандартной форме на промежутке $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$.

«Вторая теорема Н.Н. Боголюбова» получает аналогичный результат на бесконечном промежутке.

Сначала приведем классический вариант «Первой» теоремы (см. [1]), а затем усилим некоторые условия для сокращения доказательства.

Теорема 1 *Рассматривается задача Коши для системы в стандартной форме*

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (29)$$

где x и X — m -векторы, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть

1) функция $X(x, t)$ определена в некоторой области D переменных $x = (x_1, \dots, x_m)$ и для $t \geq 0$;

2) $\exists M > 0, \lambda > 0$ такие, что $\|X\| < M$ и

$$\|X(x', t) - X(x'', t)\| \leq \lambda \|x' - x''\| \quad \forall x', x'' \in D$$

($\|\cdot\|$ — обычная евклидова норма);

3) равномерно относительно $x \in D$ существует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt = \bar{X}(x);$$

4) $\xi = \xi(t, \varepsilon)$ — решение задачи Коши для усредненной системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varepsilon \bar{X}(\xi), \\ \xi(0) = x_0, \end{cases} \quad (30)$$

определено для $t \geq 0$ и для сколь угодно малого $\rho > 0$ принадлежит области D вместе со своей ρ -окрестностью (будем называть ρ -окрестностью некоторого множества A множество всех точек, расстояние которых до A меньше ρ).

Тогда

Любым сколь угодно малому положительному η и сколь угодно большому положительному L можно сопоставить такое положительное ε_0 , что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ выполнено неравенство

$$\|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| < \eta, \quad 0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon},$$

где $x(t, \varepsilon)$ — решение задачи (29).

Замечание 2 Эмоциональные формулировки (см. [1]) «любое, сколь угодно малое» и «любое, сколь угодно большое» формально ничего не добавляют к сухим кванторным $\forall \eta > 0$ и $\forall L > 0$, но помогают ощутить близость решений исходной и усредненной систем на большом промежутке времени. Практическая ценность теоремы наступает именно при «малых η » и «больших L ».

Замечание 3 Отметим, что в классических условиях теоремы Боголюбова требуется, чтобы было известно решение усредненной системы (30) $\forall t > 0$, но ничего не говорится о существовании $x(t, \varepsilon)$ — решения исходной, вообще говоря, нелинейной системы (29) и притом на большом промежутке $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ (что на самом деле означает для любых $t > 0$).

Тем не менее, в результате теоремы фигурирует $x(t, \varepsilon)$ на промежутке $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$. Это означает, что условия Первой теоремы Боголюбова обеспечивают существование решения исходной системы (29) на асимптотически большом промежутке $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Значит, помимо доказательства близости $x(t, \varepsilon)$ и $\xi(t, \varepsilon)$ теорема Боголюбова является еще и теоремой существования решения $x(t, \varepsilon)$ весьма произвольной системы (29) на промежутке $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Усилим требования теоремы Боголюбова для ускорения доказательства близости решений исходной системы (29) и усредненной системы (30).

Условие 3) заменим требованием периодичности функции $X(x, t)$ по t и возможности разложения ее в ряд Фурье

$$X(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n(x)e^{int} = \bar{X}(x) + \sum_{n \neq 0} X_n(x)e^{int},$$

допускающий почленное дифференцирование по x

$$\frac{\partial X(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{X}(x)}{\partial x} + \sum_{n \neq 0} \frac{\partial X_n(x)}{\partial x} e^{int},$$

с условием $\left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| \leq \lambda$.

Ясно, что тогда справедливы равенства

$$\overline{\left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right)} = \frac{\partial}{\partial x} (\overline{X(x, t)}) = \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}$$

(то есть среднее от производной равно производной от среднего).

Потребуем также существования решения $x(t, \varepsilon)$ исходной задачи (29) для $t \geq 0$.

При выполнении условий Теоремы Боголюбова с указанными усилениями результат теоремы будет таким: $\forall L > 0 \exists \varepsilon_0$ такое, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место оценка

$$\|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad \forall 0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Усиление результата связано прежде всего с заменой требования существования среднего в общем виде на условие периодичности по t функции $X(x, t)$.

Что касается требования существования решения исходной задачи (29), то оно не имеет отношения к оценке близости решений, а позволяет короче изложить доказательство (не превращая теорему еще и в теорему существования решения системы (29)).

Доказательство Первой теоремой Боголюбова в классическом варианте читатель найдет в [1].

Перейдем к доказательству теоремы при сделанных усиленных требованиях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $u_1(\xi, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(\xi, t) = X(\xi, t) - \bar{X}(\xi),$$

то есть

$$u_1(\xi, t) = \int_0^t (X(\xi, t) - \overline{X}_1(\xi)) dt,$$

где ξ — решение усредненной системы (30). Интеграл берется по явно входящему времени t , при этом ξ рассматривается как параметр и очевидно, что $u_1(\xi, 0) = 0$.

Если выполнены наши дополнительные требования периодичности по t функции $X(\xi, t)$ и ограниченности $\frac{\partial X}{\partial x}$, то $u_1(\xi, t)$ — периодическая ограниченная функция, имеющая ограниченную производную по ξ .

Действительно,

$$X(\xi, t) - \overline{X}(\xi) = \sum_{n \neq 0} X_n(\xi) e^{int}$$

— функция с нулевым средним и, в силу сделанных предположений, допускающая почленное дифференцирование.

Далее

$$u_1(\xi, t) = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n(\xi)}{in} e^{int},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\xi, t) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in} \left(\frac{\partial X_n(\xi)}{\partial \xi} \right) e^{int}.$$

Пусть

$$\|u_1(\xi, t)\| \leq M_1, \quad \left\| \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right\| \leq M_2.$$

Тогда

$$\|\varepsilon u_1\| \leq \varepsilon M_1, \quad \left\| \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right\| \leq \varepsilon M_2, \quad \forall t \geq 0.$$

Замечание 4 Из существования среднего общего вида (3) следуют лишь оценки

$$\|\varepsilon u_1\| \leq \alpha(\varepsilon), \quad \left\| \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right\| \leq \beta(\varepsilon),$$

где $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$, $\beta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Введем функцию

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi(t, \varepsilon), t),$$

где $\xi(t, \varepsilon)$ — решение задачи (30) для усредненной системы.

Оценим величину $x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t, \varepsilon)$, где $x(t, \varepsilon)$ — решение исходной задачи (29):

$$\begin{aligned} \|\dot{x} - \dot{\tilde{x}}\| &= \left\| \varepsilon X(x, \varepsilon) - \dot{\xi} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi} - \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t} \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon \|X(x, t) - X(\tilde{x}, t)\| + \varepsilon \|X(\tilde{x}, t) - X(\xi, t)\| + \\ &+ \varepsilon \left\| X(\xi, t) - \bar{X}(\xi) - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right\| + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \bar{X}(\xi) \right\|. \end{aligned} \quad (31)$$

Оценим отдельные слагаемые в (31)

$$\varepsilon \|X(x, t) - X(\tilde{x}, t)\| = \varepsilon \left\| \frac{\partial X}{\partial x}(x^*, t) \right\| \|x - \tilde{x}\| \leq \varepsilon \lambda \|x - \tilde{x}\|, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \|X(\tilde{x}, t) - X(\xi, t)\| &= \varepsilon \left\| \frac{\partial X}{\partial x}(x^{**}, t) \right\| \|\tilde{x} - \xi\| \leq \\ &\leq \varepsilon^2 \lambda \|u_1(\xi, t)\| \leq \varepsilon^2 \lambda M_1, \end{aligned} \quad (33)$$

(x^* и x^{**} означают значения x в некоторых промежуточных точках)

$$\varepsilon \left\| X(\xi, t) - \bar{X}(\xi) - \frac{\partial u_1}{\partial t} \right\| \equiv 0 \quad (34)$$

в силу уравнения для $u_1(\xi, t)$,

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\xi, t) \bar{X}(\xi) \right\| \leq \varepsilon^2 M_2 M, \quad (35)$$

так как $\|\bar{X}\| \leq \|X\| \leq M$.

Положим $z = \|x - \tilde{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \tilde{x}_i)^2}$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{2 \sum_{i=1}^m (x_i - \tilde{x}_i)(\dot{x}_i - \dot{\tilde{x}}_i)}{2 \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - \tilde{x}_i)^2}} = \frac{((x - \tilde{x}), (\dot{x} - \dot{\tilde{x}}))}{\|x - \tilde{x}\|} \leq \\ &\leq \frac{\|x - \tilde{x}\| \cdot \|\dot{x} - \dot{\tilde{x}}\|}{\|x - \tilde{x}\|} = \|\dot{x} - \dot{\tilde{x}}\|. \end{aligned}$$

С учетом (31) и оценок (32-35) находим

$$\dot{z} \leq \|\dot{x} - \dot{\tilde{x}}\| \leq \varepsilon \lambda z + \varepsilon^2 (\lambda M_1 + M_2 M).$$

Полагая $N = \lambda M_1 + M_2 M$, получаем дифференциальное неравенство

$$\begin{cases} \dot{z} \leq \varepsilon \lambda z + \varepsilon^2 N, & 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}, \\ z(0) = 0, \end{cases} \quad (36)$$

так как $z(0) = x(0) - \xi(0) - \varepsilon u_1(\xi, 0) = x_0 - x_0 - 0 = 0$.

Дальнейшие действия зависят от личного вкуса исследователя. Одни используют полученное дифференциальное неравенство (36), другие предпочитают интегральное неравенство.

Ради применения популярной в математике Леммы Гронуолла придадим неравенству (36) интегральную форму.

Интегрируя неравенство (36) от 0 до t , получаем

$$z(t) \leq z(0) + \int_0^t (\varepsilon \lambda) \cdot z(\tau) d\tau + \varepsilon^2 N t,$$

а с учетом того, что $0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ и $z(t) \geq 0$ имеем

$$z(t) \leq \left(z(0) + \varepsilon^2 N \frac{L}{\varepsilon} \right) + \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} (\varepsilon \lambda) z(\tau) d\tau,$$

$$z(t) \leq C + \int_0^{\frac{L}{\varepsilon}} (\varepsilon \lambda) z(\tau) d\tau, \quad (37)$$

где $C = z(0) + \varepsilon^2 N \cdot \frac{L}{\varepsilon} = \varepsilon N L$, так как $z(0) = 0$.

Лемма Гронуолла. Пусть $z(t)$ и $f(t)$ — непрерывные при $t \geq 0$ функции, $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ и выполняется неравенство

$$z(t) \leq C + \int_0^t f(\tau) z(\tau) d\tau. \quad (38)$$

Тогда $\forall t$ справедлива оценка

$$z(t) \leq C e^{\int_0^t f(\tau) d\tau}. \quad (39)$$

Доказательство. Из данного в условии неравенства (38) следует

$$\frac{z(t)}{C + \int_0^t f(\tau) z(\tau) d\tau} \leq 1.$$

Умножая это неравенство на $f(t)$, получаем

$$\frac{f(t)z(t)}{C + \int_0^t f(\tau)z(\tau)d\tau} \leq f(t). \quad (40)$$

Так как $f(t)z(t) = \frac{d}{dt} \left(C + \int_0^t f(\tau)z(\tau)d\tau \right)$, то интегрируя (40) от 0 до t , находим

$$\ln \left(C + \int_0^t f(\tau)z(\tau)d\tau \right) - \ln C \leq \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

$$C + \int_0^t f(\tau)z(\tau)d\tau \leq C e^{\int_0^t f(\tau)d\tau},$$

откуда с учетом неравенства (38) имеем

$$z(t) \leq C e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}.$$

Завершаем доказательство Теоремы Боголюбова. Неравенство (37) имеет вид неравенства (38) из Леммы Гронуолла при $t = \frac{L}{\varepsilon}$, $f(\tau) = \varepsilon\lambda = \text{const}$, $C = \varepsilon NL$.

Значит, согласно Лемме Гронуолла справедлива оценка

$$z(t) = \|x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon N L e^{\varepsilon\lambda \cdot \frac{L}{\varepsilon}}, \quad (41)$$

$$z(t) \leq \varepsilon N L e^{\lambda L}, \quad N = \lambda M_1 + M_2 M,$$

$$z(t) = \|x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \quad 0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon} \quad (42)$$

(напомним, что мы договорились пользоваться расширенным определением $O(\varepsilon)$ на основании неравенства).

Из неравенства (42) и того, что $\tilde{x}(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi, t)$, следует, что удерживать слагаемое εu_1 , также имеющее порядок $O(\varepsilon)$, не имеет смысла. Действительно:

$$\begin{aligned} \|x - \xi\| &\leq \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x} - \xi\| = \|x - \tilde{x}\| + \|\varepsilon u_1\| = \\ &= O(\varepsilon) + O(\varepsilon) = O(\varepsilon), \quad 0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Итак,

$$\|x - \xi\| = O(\varepsilon), \quad 0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Доказательство Теоремы Боголюбова завершено.

Важное замечание. Для ограниченности множителя $e^{\varepsilon \lambda \cdot \frac{L}{\varepsilon}}$ в (41) существенно, что длина промежутка $[0, t]$ есть $\frac{L}{\varepsilon}$. Именно в этом месте доказательства возникает ограничение на длину промежутка, при которой остается справедливой оценка $\|x - \xi\| = O(\varepsilon)$.

Пример 1. Первым примером на любую асимптотическую теорему должна быть задача, где справедливость обещанной асимптотики непосредственно проверяется для известного точного решения.

Для теоремы Боголюбова знание точного решения $x(t, \varepsilon)$ позволяет проверить справедливость оценки $\|x - \xi_1\| = O(\varepsilon)$ для $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$, где ξ_1 — решение усредненной системы первого приближения.

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} \ddot{y} + \varepsilon \cdot 2\nu \dot{y} + \omega^2 y = 0, & \nu > 0, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \end{cases} \quad (43)$$

Обсуждавшаяся выше замена переменных

$$y = a \cos(\omega t + \theta), \quad \dot{y} = -a\omega \sin(\omega t + \theta)$$

переводит задачу от переменных (y, \dot{y}) к переменным (a, θ) .

При $t = 0$ получаем равенства, определяющие начальные значения a_0 и θ_0

$$\begin{cases} a_0 \cos \theta_0 = y_0, \\ -a_0 \omega \sin \theta_0 = \dot{y}_0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$a_0 = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0'^2}{\omega^2}}, \quad \theta_0 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega y_0}\right). \quad (44)$$

Для a и θ находим систему в стандартной форме

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon \nu a + \varepsilon \nu a \cdot \cos 2(\omega t + \theta), \\ \dot{\theta} = -\varepsilon \nu \cdot \sin 2(\omega t + \theta), \\ a(0) = a_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (45)$$

Усредненная система первого приближения

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_1 = -\varepsilon \nu \bar{a}_1, \\ \dot{\bar{\theta}}_1 = 0, \\ \bar{a}_1(0) = a_0, \quad \bar{\theta}_1(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (46)$$

Ее решение $(\bar{a}_1, \bar{\theta}_1)$ - первое приближение для (a, θ) :

$$\bar{a}_1 = a_0 e^{-\varepsilon \nu t}, \quad \bar{\theta}_1 = \theta_0.$$

Тогда первым приближением для $y(t, \varepsilon)$ будет

$$y_1 = \bar{a}_1(t) \cos(\omega t + \bar{\theta}_1(t)) = a_0 e^{-\varepsilon \nu t} \cdot \cos(\omega t + \theta_0). \quad (47)$$

Выпишем теперь точное решение задачи (43) для исходного линейного уравнения, придав ему форму, удобную для сравнения с y_1 :

$$\begin{aligned} y &= a_0 e^{-\varepsilon \nu t} \cdot \cos\left(\omega t \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon \nu}{\omega}\right)^2} + \theta_0\right) = \\ &= a_0 e^{-\varepsilon \nu t} \cdot \cos\left(\omega t - \omega t \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon \nu}{\omega}\right)^2 + O(\varepsilon^4 t) + \theta_0\right) = \\ &= a(t) e^{-\varepsilon \nu t} \cdot \cos(\omega t + \theta(t)), \end{aligned}$$

где

$$a(t) = a_0 e^{-\varepsilon \nu t},$$

$$\theta(t) = -\varepsilon^2 t \cdot \frac{\nu^2}{2\omega} + O(\varepsilon^4 t) + \theta_0.$$

Для получения результата теоремы Боголюбова $\|x - \xi\| = O(\varepsilon)$ на промежутке $0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon}$, где $x = (a, \theta)$, $\xi = (\bar{a}_1, \bar{\theta}_1)$ нас интересуют погрешности $a - \bar{a}_1 = O(\varepsilon)$ и $\theta - \bar{\theta}_1 = O(\varepsilon)$ для $0 < t \leq \frac{L}{\varepsilon}$.

Видно, что

$$a(t) - \bar{a}_1(t) = a_0 e^{-\varepsilon \nu t} - a_0 e^{-\varepsilon \nu t} \equiv 0 < C\varepsilon,$$

то есть погрешность $a - \bar{a}_1$ укладывается в $O(\varepsilon)$.

Погрешность фазовой добавки $\theta - \bar{\theta}_1$ имеет вид

$$\theta - \bar{\theta}_1 = -\varepsilon^2 t \frac{\nu^2}{2\omega} + O(\varepsilon^4 t) + \theta_0 - \theta_0 < C\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = C\varepsilon,$$

значит $\theta - \bar{\theta}_1 = O(\varepsilon)$ для $0 < t < \frac{L}{\varepsilon}$.

Таким образом, погрешность в определении вектора (a, θ) с помощью решения $(\bar{a}_1, \bar{\theta}_1)$ усредненной системы первого приближения составляет $O(\varepsilon)$, что соответствует результату Теоремы Боголюбова.

Юмористическое замечание. Коэффициенты C в приведенных выше оценках вовсе не обязаны совпадать. Специалисты по асимптотическим оценкам все подобные константы обозначают буквой C . Это приводит к грустной тишине в зале после вопроса докладчику: «У меня $\varepsilon = \frac{3}{8}$, можете ли вы назвать погрешность вашей формулы?»

Стационарным значением амплитуды \bar{a}_1 является точка $\bar{a}_1^0 = 0$ — корень уравнения $\bar{X}(\bar{a}_1) = -\varepsilon \nu \bar{a}_1 = 0$. При этом $\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{a}_1} = -\varepsilon \nu < 0$, следовательно, точка $\bar{a}_1^0 = 0$ асимптотически устойчива. К ней экспоненциально притягиваются все другие решения $\bar{a}_1 = a_0 e^{-\varepsilon \nu t}$ усредненного уравнения при любом a_0 .

Для упрощения формул положим в исходной задаче (43) $\dot{y}(0) = 0$, тогда из (44) и (46) следует $a_0 = y_0$ и $\bar{\theta}_1 = \theta_0 = 0$. Формулы координат точки (y_1, \dot{y}_1) на фазовой плоскости приобретают вид

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 e^{-\varepsilon \nu t} \cdot \cos \omega t, \\ \dot{y}_1 &= -y_0 \omega e^{-\varepsilon \nu t} \cdot \sin \omega t. \end{aligned} \quad (48)$$

Возводя выражения (48) в квадрат и складывая, получаем спирали

$$y_1^2 + \frac{\dot{y}_1^2}{\omega^2} = y_0^2 e^{-\varepsilon \nu t}, \quad (49)$$

навивающиеся на асимптотически устойчивое начало координат — *устойчивый фокус*.

Точка покоя или состояние равновесия $(0,0)$ притягивает все другие фазовые кривые (y, \dot{y}) . Такие притягивающие множества и называются поэтому *аттракторами*. В данном случае мы имеем простейший аттрактор — точку покоя $(y, \dot{y}) = (0, 0)$.

Траектория (48) начинается при $t = 0$ в точке с координатами

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Направление движения по этой траектории определится касательным вектором $(dy(0), d\dot{y}(0))$:

$$dy(0) = \dot{y}(0)dt = 0,$$

$$d\dot{y}(0) = -y_0\omega^2 dt.$$

Вернемся к полученным оценкам $a - \bar{a}_1 = O(\varepsilon)$, $\theta - \bar{\theta}_1 = O(\varepsilon)$ и бодрому заключению: «что соответствует результату Теоремы Боголюбова».

Всегда найдется внимательный читатель, который поинтересуется: «А где проверка условий теоремы Боголюбова для системы в стандартной форме (45)?» В самом деле, какой константой M ограничена $\|X\|$ (правые части системы (45)) во всей, то есть неограниченной области D ? Действительно, если рассматривать функцию a во всей области определения, то она ничем не ограничена.

Найти выход из этого затруднительного положения позволяет другое условие теоремы, требующее, чтобы решение усредненной системы (46) было известно для $t > 0$ и принадлежало области D вместе со своей ρ -окрестностью.

В самом деле, если решение усредненной системы занимает некоторую ограниченную область переменных x , то именно эта область и может выступать в роли области D и именно в ней нужно обеспечивать условие $\|X\| < M$.

Вернемся к усредненной системе (46)

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_1 = -\varepsilon \nu \bar{a}_1, \\ \dot{\bar{\theta}}_1 = 0, \\ \bar{a}_1(0) = a_0, \quad \bar{\theta}_1(0) = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Выше, для краткости формул мы положим $\dot{y}(0) = 0$, откуда следовало $\bar{\theta}_0 = 0$.

Решение (50) имеет вид

$$\bar{a}_1 = a_0 e^{-\varepsilon \nu t}, \quad \bar{\theta}_1 = 0. \quad (51)$$

Это решение в пространстве (a, θ, t) — плоская кривая, проекция которой на плоскость (a, θ) — отрезок $[a_0, 0)$.

В качестве D в переменных (a, θ) выберем прямоугольник $-\rho \leq a \leq a_0 + \rho$, $-\rho \leq \theta \leq \rho$. В этом прямоугольнике решение (51) усредненной системы (50) лежит вместе со своей ρ -окрестностью.

Как было отмечено выше, классическое доказательство теоремы Боголюбова обеспечивает существование решения исходной стандартной системы (45) в области D на промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$.

Сошлемся на этот результат (в нашем примере он вообще очевиден) и получим используемые нами в доказательстве $\|X\|$ и $\left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\|$, где $x = (a, \theta)$.

Уравнения исходной стандартной системы (45) имели вид

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon(\nu a + \nu a \cos 2\omega t) = \varepsilon X_1, \\ \dot{\theta} = -\varepsilon \nu \sin 2\omega t = \varepsilon X_2. \end{cases}$$

Тогда для векторов $X = \{X_1, X_2\}$ и $x = (a, \theta)$ имеем

$$\begin{aligned} \|X\| &= \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \sqrt{(\nu a + \nu a \cos 2\omega t)^2 + (\nu \sin 2\omega t)^2} = \\ &= \sqrt{(\nu a)^2 (1 + \cos 2\omega t)^2 + \nu^2 \sin^2 2\omega t} \leq \sqrt{(\nu a^2) \cdot 4 + \nu^2} = \\ &= \sqrt{\nu^2 (4a^2 + 1)} \leq \nu \sqrt{4(a_0 + \rho)^2 + 1} = M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial X}{\partial x} \right\| &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \theta}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\nu + \nu \cos 2\omega t)^2 + (\nu a \cdot 2 \sin 2\omega t)^2 + 0 + (\nu \cdot 2 \cos 2\omega t)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{4\nu^2 + 4(\nu a)^2 + 4\nu^2} = 2\nu \sqrt{a^2 + 2} \leq 2\nu \sqrt{(a_0 + \rho)^2 + 2} = \lambda. \end{aligned}$$

Итак, найдены константы M и λ , входящие в наши формулировку и доказательство теоремы Боголюбова.

Вот теперь мы заслужили право написать для наших оценок $a - \bar{a}_1 = O(\varepsilon)$ и $\theta - \bar{\theta}_1 = O(\varepsilon)$ вывод: «что соответствует теореме Боголюбова». Внимательный читатель может быть спокоен.

Но! У внимательного читателя есть еще один «вопрос за пазухой». Он предлагает заменить в нашем исходном уравнении второго порядка (43) коэффициент ν на $-\nu$ и рассмотреть возможные последствия. Удовлетворим его любопытство.

При нашем техническом опыте промежуточные выкладки можно опустить.

Если в уравнении (43) изменить знак ν , то уравнение примет вид

$$\ddot{y} - \varepsilon \cdot 2\nu\dot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Уравнением для \bar{a}_1 в усредненной системе станет

$$\dot{\bar{a}}_1 = +\varepsilon\nu\bar{a}_1$$

с решением $\bar{a}_1 = a_0 e^{+\varepsilon\nu t}$, неограниченным при $t > 0$. Амплитуда точного решения будет

$$a = a_0 e^{+\varepsilon\nu t}$$

и снова $a - \bar{a}_1 \equiv 0 < C\varepsilon$, то есть $a - \bar{a}_1 = O(\varepsilon)$, как в теореме Боголюбова.

Но условия теоремы Боголюбова не выполнены, решение усредненной системы неограничено, значит область D неограничена и для функции a $M = \infty$.

Значит, надо осознать, что теорема Боголюбова дает достаточные (!) условия и если они не выполнены, то нельзя гарантировать близость точного и приближенного решения.

В данном случае они оказались близкими, даже совпавшими, но не благодаря теореме Боголюбова.

Вот и все!

Пример 2. Рассмотрим пример уравнения, описывающего систему с самовозбуждением, допускающую так называемый режим *автоколебаний*.

Автоколебания — это незатухающие колебания, вид и свойства которых определяются самой системой и не зависят от начальных условий (по крайней мере, в некоторых конечных пределах).

Когда-то с понятием автоколебаний связывались только периодические колебания. Затем это понятие распространилось на квазипериодические, а с не очень давнего времени и на стохастические колебания.

Классическое уравнение Ван дер Поля, описывающее колебания в электронных генераторах, имеет вид

$$\ddot{y} + y = \varepsilon(1 - y^2)\dot{y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y'_0.$$

Полагая опять

$$y = a \cos(t + \theta), \quad \dot{y} = -a \sin(t + \theta), \quad (52)$$

где $a = a(t, \varepsilon)$, $\theta = \theta(t, \varepsilon)$, получаем после тригонометрических преобразований стандартную систему

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t + \theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \theta) \right) = \varepsilon X_1, \\ \dot{\theta} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \sin 2(t + \theta) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t + \theta) \right) = \varepsilon X_2, \\ a(0) = a_0, \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (53)$$

Вычисление a_0 и θ_0 происходит по известным уже формулам (44).

Усредненная система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_1 = \varepsilon \frac{\bar{a}_1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right) \equiv \bar{X}_1, \\ \dot{\bar{\theta}}_1 = 0 \equiv \bar{X}_2, \\ \bar{a}_1(0) = a_0, \quad \bar{\theta}_1(0) = \theta_0. \end{cases} \quad (54)$$

Из системы (54) (интегрируя первое уравнение разделением переменных) находим первые приближения переменных a и θ :

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1 \right) e^{-\varepsilon t}}} = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + (4 - a_0^2)e^{-\varepsilon t}}}, \\ \bar{\theta}_1 = \theta_0. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar{a}_1 \rightarrow \bar{a}_{1c} = 2$ при $t \rightarrow \infty$.

Первое приближение для y имеет вид

$$y_1 = \frac{2a_0}{\sqrt{a_0^2 + (4 - a_0^2)e^{-\varepsilon t}}} \cos(t + \theta_0),$$

а стационарный колебательный режим, на который выходит y_1 при $t \rightarrow \infty$, в первом приближении есть

$$y_{1c} = 2 \cos(t + \theta_0).$$

Видно, что если в правой части первого уравнения (54) $\bar{a}_{11}^0 = 0$ (точка покоя), то $\bar{a}_{1c} \equiv 0$ и $y_1 = 0$ — тривиальное решение уравнения Ван дер Поля. Однако, очевидно, что этот режим неустойчив. При любом $0 < a_0 < 2$ $\bar{a}_1(0) > 0$ и амплитуда $\bar{a}_1(t)$ начинает возрастать с ростом t , стремясь к $\bar{a}_{1c} = 2$ (если $0 < a_0 < 2$, то правая часть (53) больше нуля).

Если $a_0 > 2$, то $\bar{a}_1 < 0$ и амплитуда, уменьшаясь, стремится к $\bar{a}_{1c} = 2$.

Таким образом, любые начальные толчки служат источником самовозбуждения колебаний, стремящихся к стационарному динамическому режиму с постоянной амплитудой:

$$y = 2 \cos(t + \theta_0).$$

Стационарные значения $\bar{a}_{11}^0 = 0$ и $\bar{a}_{12}^0 = 2$ находятся как точки покоя первого уравнения усредненной системы (54) первого приближения

$$\bar{X}_1(\bar{a}_1) = \frac{\bar{a}_1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right) = 0,$$

откуда $\bar{a}_{11}^0 = 0$ и $\bar{a}_{12}^0 = 2$.

Точка $\bar{a}_{11} = 0$ неустойчива, условие $\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial a} \Big|_{\bar{a}_{11}^0=0} > 0$ — условие самовозбуждения колебаний.

Условие $\frac{\partial \bar{X}_1}{\partial a} \Big|_{\bar{a}_{12}^0=2} < 0$ — условие асимптотической устойчивости точки покоя $\bar{a}_{12}^0 = 2$ первого уравнения системы (54).

На фазовой плоскости (y, \dot{y}) уравнения

$$\begin{cases} y = 2 \cos(t + \theta_0), \\ \dot{y} = -2 \sin(t + \theta_0), \end{cases}$$

или $y^2 + \dot{y}^2 = 4$ определяют окружность — предельный цикл. Направление движения задается касательным вектором.

Если при $t = 0$ положить $y'_0(0) = 0$, получим $\theta_0 = 0$ и начальной точкой будет $(2, 0)$. Для нее

$$dy(0) = -2 \sin t|_{t=0} dt = 0,$$

$$dy(0) = -2 \cos t|_{t=0} dt = -2dt.$$

К этому предельному циклу притягиваются при $t \rightarrow \infty$ другие фазовые кривые (y, \dot{y}) .

Для спокойствия читателя заметим, что, например, в первой четверти $t < 0$, поэтому $dy(A) > 0$, $d\dot{y}(A) < 0$.

Если в Примере 1 мы получили аттрактор — точку покоя, то в данном случае возникает другой тип аттрактора — *предельный цикл*, в первом приближении — окружность радиуса 2.

Заметим, что только в первом приближении периодический стационарный режим является гармоническим колебанием $y = 2 \cos(t + \theta_0)$, укладываемым в силу погрешности первого приближения в полосу шириной $O(\varepsilon)$.

На самом деле, это периодическое решение исходного уравнения Ван дер Поля устроено сложнее. Для выяснения этого надо заглянуть во второе приближение.

Во втором приближении усредненная система имеет вид

$$\dot{\bar{a}}_2 = \varepsilon \frac{\bar{a}_2}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_2^2}{4} \right) + O \cdot \varepsilon^2 = \bar{X}_1, \quad (55)$$

$$\dot{\bar{\theta}}_2 = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{a}_2^2}{8} + \frac{7\bar{a}_2^4}{256} \right) = \bar{X}_2 \quad (56)$$

(уравнение для \bar{a}_2 не изменилось по сравнению с уравнением для \bar{a}_1 , оно имеет те же точки покоя $\bar{a}_{11}^0 = 0$ и $\bar{a}_{12}^0 = 2$).

Напомним, что вторые приближения a_2 и θ_2 функций a и θ определяются формулами

$$a_2 = \bar{a}_2 + \varepsilon u_1^{(1)}(\bar{a}_2, \bar{\theta}_2, t), \quad (57)$$

$$\theta_2 = \bar{\theta}_2 + \varepsilon u_1^{(2)}(\bar{a}_2, \bar{\theta}_2, t) \quad (58)$$

(см. (9)).

Для изучения стационарного режима при $\bar{a}_{12}^0 = 2$ подставляем $\bar{a}_2 = a_{12}^0 = 2$ в (57) и (58).

Тогда для $\bar{\theta}_2$ из уравнения (56) находим

$$\bar{\theta}_2 = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{a}_2^2}{8} + \frac{7\bar{a}_2^4}{256} \right) \Big|_{\bar{a}_2=2} t + \theta_0 = -\frac{\varepsilon^2}{16} t + \theta_0.$$

Напомним, что функции $u_1^{(i)}$ находятся по формулам

$$u_1^{(i)} = \int_0^t (X_i - \bar{X}_i) dt, \quad i = 1, 2$$

для систем (53) и (54).

Значит, для периодического стационарного режима во втором приближении имеем выражения

$$\begin{cases} a_{2c} = 2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} \sin 4(t + \bar{\theta}_2) \right), \\ \theta_{2c} = \bar{\theta}_2 + \varepsilon \left(\frac{1}{4} \cos 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{8} \cos 4(t + \bar{\theta}_2) \right). \end{cases} \quad (59)$$

Подставляя величины (59) в исходный вид y и \dot{y}

$$y = a \cos(t + \theta), \quad \dot{y} = -a \sin(t + \theta) \quad (60)$$

и удерживая члены порядка ε , находим второе приближение стационарного колебательного режима уравнения Ван дер Поля.

$$y_{2c} = a_{2c} \cdot \cos(t + \theta_{2c}) = \left[2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} \sin 4(t + \bar{\theta}_2) \right) \right] \cdot \cos \left((t + \bar{\theta}_2) + \varepsilon \left(\frac{1}{4} \cos 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{8} \cos 4(t + \bar{\theta}_2) \right) \right), \quad (61)$$

$$\dot{y}_{2c} = -a_{2c} \cdot \sin(t + \theta_{2c}) = - \left[2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{4} \sin 4(t + \bar{\theta}_2) \right) \right] \cdot \sin \left((t + \bar{\theta}_2) + \varepsilon \left(\frac{1}{4} \cos 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{8} \cos 4(t + \bar{\theta}_2) \right) \right).$$

Обозначая

$$\varphi = t + \bar{\theta}_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right) t + \theta_0,$$

$$\varepsilon\delta = \varepsilon \left(\frac{1}{4} \cos 2(t + \bar{\theta}_2) + \frac{1}{8} \cos 4(t + \bar{\theta}_2) \right)$$

и сохраняя члены порядка ε , преобразуем вторые множители $\cos(\dots)$ и $\sin(\dots)$ в (61).

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \varepsilon\delta) &= \cos \varphi \cdot \cos(\varepsilon\delta) - \sin \varphi \cdot \sin(\varepsilon\delta) = \\ &= \cos \varphi + O(\varepsilon^2) - \sin \varphi \cdot (\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^3) = \\ &= \cos \varphi - \sin \varphi \cdot (\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi + \varepsilon\delta) &= \sin \varphi \cdot \cos(\varepsilon\delta) - \cos \varphi \cdot \sin(\varepsilon\delta) = \\ &= \sin \varphi + O(\varepsilon^2) + \cos \varphi \cdot (\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^3) = \end{aligned}$$

$$= \sin \varphi + \cos \varphi \cdot (\varepsilon \delta) + O(\varepsilon^2).$$

Для y_{2c} , сохраняя уже только обозначения φ и ограничиваясь в преобразованиях членами порядка ε , имеем

$$\begin{aligned} y_{2c} &= \left(2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi\right)\right) \times \\ &\quad \times \left(\cos \varphi - \varepsilon \sin \varphi \left(\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi\right) + O(\varepsilon^2)\right) = \\ &= 2 \cos \varphi + \varepsilon \left[-\frac{1}{2} (\sin 2\varphi \cos \varphi + \cos 2\varphi \sin \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (\sin 4\varphi \cos \varphi - \cos 4\varphi \sin \varphi)\right] + O(\varepsilon^2) = \\ &= 2 \cos \varphi + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 3\varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Итак,

$$y_{2c} = 2 \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3\varphi + O(\varepsilon^2), \quad \varphi = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) t + \theta_0. \quad (62)$$

Аналогично для \dot{y}_{2c} получаем

$$\begin{aligned} \dot{y}_{2c} &= - \left(2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi\right)\right) \times \\ &\quad \times \left(\sin \varphi + \varepsilon \cos \varphi \left(\frac{1}{4} \cos 2\varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi\right) + O(\varepsilon^2)\right) = \\ &= - \left(2 \sin \varphi + \varepsilon \left[-\frac{1}{2} (\sin 2\varphi \sin \varphi - \cos 2\varphi \cos \varphi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} (\sin 4\varphi \sin \varphi + \cos 4\varphi \cos \varphi)\right]\right) + O(\varepsilon^2) = \\ &= -2 \sin \varphi - \varepsilon \left(\frac{1}{2} \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \cos 3\varphi\right) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Итак,

$$\dot{y}_{2c} = -2 \sin \varphi - \varepsilon \cdot \frac{3}{4} \cos 3\varphi + O(\varepsilon^2), \quad \varphi = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) t + \theta_0 \quad (63)$$

— фаза с «подправленной» на $-\frac{\varepsilon^2}{16}$ частотой $\omega = 1$ в исходном уравнении Ван дер Поля.

Объединяя (62) и (63), получаем координаты точки (y_{2c}, \dot{y}_{2c}) на фазовой траектории

$$\begin{cases} y_{2c} = 2 \cos \varphi - \varepsilon \cdot \frac{1}{4} \sin 3\varphi + O(\varepsilon^2), \\ \dot{y}_{2c} = -2 \sin \varphi - \varepsilon \cdot \frac{3}{4} \cos 3\varphi + O(\varepsilon^2), \\ \varphi = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right) t + \theta_0 \end{cases} \quad (64)$$

— второе приближение стационарного периодического режима — предельного цикла уравнения Ван дер Поля.

Возводя выражения (64) в квадрат и складывая, получаем второе приближение предельного цикла в полярных координатах

$$r = 2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) + O(\varepsilon^2). \quad (65)$$

Напомним, что первое приближение этого цикла имело вид

$$r = 2 + O(\varepsilon), \quad (66)$$

то есть окружность $r = 2$ укладывалась в полосу $O(\varepsilon)$. Действительно, вся добавка к $r = 2$ в (65) есть $O(\varepsilon)$.

Заглянув подробнее в эту полосу, мы обнаружили цикл (65), который с точностью(!) до членов порядка ε включительно укладывается уже в полосу $O(\varepsilon^2)$.

Напомним, что под «точностью» мы понимаем точно известные слагаемые.

Таким образом можно продолжать уточнять структуру предельного цикла уравнения Ван дер Поля.

Владеющие компьютерной графикой могут нарисовать оба цикла (естественно, без O -больших). Второй — для конкретного ε , например, $\varepsilon = 1$ (такое ε полезно, чтобы не заморачиваться размышлениями по поводу $O(1)$).

Затем надо найти концентрическое кольцо, включающее посередине окружность $r = 2$, и такой ширины, что в нем содержится цикл второго приближения тоже вместе с некоторой полоской.

Тогда можно почувствовать $O(\varepsilon)$ как ширину кольца, и $O(\varepsilon^2)$ как ширину этой «некоторой полоски».

§ 3. Системы с быстрой фазой

Системой с *быстрой фазой* называют систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi, \varepsilon) \equiv \varepsilon X_1(x, \psi) + \varepsilon^2 X_2(x, \psi) + \varepsilon^3 \dots, \\ \dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon \Psi(x, \psi, \varepsilon) \equiv \omega(x) + \varepsilon \Psi_1(x, \psi) + \varepsilon^2 \Psi_2(x, \psi) + \varepsilon^3 \dots, \end{cases} \quad (1)$$

где x, X — m -векторы, ψ, Ψ — скаляры, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Функции X и Ψ периодичны по ψ с периодом 2π и разложимы в ряды Фурье

$$X_k(x, \psi) = X_{k0} + \sum_{n \neq 0} X_{kn}(x) e^{in\psi},$$

$$X_{k0} = \bar{X}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_{k0}(x, \psi) d\psi$$

— среднее значение функции $X_k(x, \psi)$.

Название «быстрая фаза» объясняется нулевым по ε порядком производной ψ по сравнению с первым по ε порядком производной «медленной» переменной x .

1. Редукция квазилинейного уравнения колебаний к системе с быстрой фазой. Рассмотрим квазилинейное уравнение колебаний вместе с вектором медленных переменных $x = \{x_1, \dots, x_m\}$:

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2(x)y = \varepsilon f(x, y, \dot{y}), \\ \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \dot{y}). \end{cases} \quad (2)$$

При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущенную систему

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2(x)y = 0, \\ \dot{x} = 0, \end{cases}$$

сводящуюся к системе уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\omega^2(x)y, \\ x = const, \end{cases}$$

периодическое решение которой запишем в виде

$$\begin{cases} y = a \cos \psi(t), \\ z = \dot{y} = -a\omega(x) \sin \psi(t), \\ x = const \end{cases} \quad (3)$$

с постоянной амплитудой a и линейной фазой $\psi = \omega(x)t + \psi_0$.

При $\varepsilon \neq 0$, сохраняя структуру формул (3), будем считать a уже не постоянной, а одной из новых переменных. Функцию ψ

будем считать уже не линейной функцией, а второй из новых переменных:

$$y = a(t, \varepsilon) \cos \psi(t, \varepsilon), \quad z = \dot{y} = -a(t, \varepsilon)\omega(x) \sin \psi(t, \varepsilon). \quad (4)$$

Тождества (4) рассматриваем как формулы замены переменных, формулы перехода от переменных y и $z = \dot{y}$ к переменным a и ψ .

Переменные x , как говорят, преобразуются тождественно.

Дифференцируя первую из формул (4), приравняем результат второй из формул (4).

Результат дифференцирования второй из формул (4), а также переменные y и \dot{y} подставляем в исходное возмущенное уравнение (2).

В результате получаем линейную алгебраическую систему относительно \dot{a} и $\dot{\psi}$ (с определителем, отличным от нуля):

$$\begin{cases} \dot{a} \cos \psi - a \dot{\psi} \sin \psi = -a\omega(x) \sin \psi, \\ -\dot{a}\omega \sin \psi - a\omega \dot{\psi} \cos \psi = -a\omega^2 \cos \psi + \varepsilon f(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \\ + a\omega' \sin \psi \cdot \varepsilon X(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \\ \dot{x} = \varepsilon X(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi). \end{cases} \quad (5)$$

Обозначим члены порядка ε во втором уравнении (5) через εf_1 :

$$\varepsilon f_1 = \varepsilon f(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) + \varepsilon a\omega' \sin \psi \cdot X(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi).$$

Разрешая (5) относительно \dot{a} и $\dot{\psi}$, находим

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{a\omega} (a^2\omega^2 \sin \psi \cos \psi - a^2\omega^2 \sin \psi \cos \psi + \varepsilon a f_1 \sin \psi) = \\ = -\frac{\varepsilon}{\omega} f_1 \cdot \sin \psi, \\ \dot{\psi} = -\frac{1}{a\omega} (-a\omega^2 \cos^2 \psi - a\omega^2 \sin^2 \psi + \varepsilon f_1 \cos \psi) = \\ = \omega(x) - \frac{\varepsilon}{a\omega} f_1 \cdot \cos \psi, \\ \dot{x} = \varepsilon X(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \end{cases}$$

и окончательно

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi, \\ \dot{x} = \varepsilon X(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi), \\ \dot{\psi} = \omega(x) - \frac{\varepsilon}{a\omega} f_1(x, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi, \end{cases} \quad (6)$$

где (a, x) — $m + 1$ -мерный вектор медленных переменных, ψ — быстрая фаза.

2. Алгоритм построения приближенных решений системы с быстрой фазой. Как и для стандартных систем, изложим формальный аппарат усреднения системы (1). Он позволяет:

1) исключить быструю фазу из правых частей (1) перейдя к усредненной системе,

2) построить усредненную систему с любой выбранной степенью точности,

3) построить с помощью решений этой усредненной системы приближенное решение системы (1) с соответствующей степенью точности.

Решение системы (1) будем строить на большом промежутке времени $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$. На этом промежутке медленные переменные x могут получить, вообще говоря, конечное приращение $\Delta x \sim 1$, а быстрая переменная ψ – большое приращение $\Delta \psi \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

Будем искать формальную замену переменных, позволяющую перейти от исходных переменных $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ и ψ к новым переменным $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ и φ .

Новые переменные ξ и φ удовлетворяют *усредненной системе*, которая проще исходной системы (1).

Положим

$$\begin{aligned} x &= \xi + \varepsilon u_1(\xi, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \varphi) + \varepsilon^3 \dots \\ \psi &= \varphi + \varepsilon v_1(\xi, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(\xi, \varphi) + \varepsilon^3 \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

где вектор ξ и переменная φ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots, \\ \dot{\varphi} = \omega(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Phi_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots \end{cases} \quad (8)$$

Систему (8) будем называть *усредненной* для системы (1).

В системе (8) разделены медленные переменные ξ и быстрая фаза φ . После отыскания ξ из первого уравнения системы (8) функция φ находится из второго уравнения (8) квадратурой.

В стандартных системах мы начали с построения приближенного решения исходной системы, предположив известными некоторое количество функций u_i и A_i , а затем занимались их отысканием.

Для разнообразия начнем здесь с определения функций u_i , v_i , A_i и Φ_i , а затем используем их для построения приближенного решения системы (1).

Дифференцируя формулы замены переменных (7) и подставляя их в систему (1), находим

$$\begin{aligned}
& \dot{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \varepsilon^3 \dots = \\
& = \varepsilon X_1(\varepsilon + \varepsilon u_1 + \dots, \varphi + \varepsilon v_1 + \dots) + \\
& + \varepsilon^2 X_2(\varepsilon + \varepsilon u_1 + \dots, \varphi + \varepsilon v_1 + \dots) + \varepsilon^3 \dots, \\
& \dot{\varphi} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \varepsilon^3 \dots = \\
& = \omega(\varepsilon + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_1 + \dots) + \varepsilon \Psi_1(\varepsilon + \varepsilon u_1 + \dots, \varphi + \varepsilon v_1 + \dots) + \\
& + \varepsilon^2 \Psi_2(\varepsilon + \varepsilon u_1 + \dots, \varphi + \varepsilon v_1 + \dots) + \varepsilon^3 \dots,
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots, \\ \dot{\varphi} = \omega(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Phi_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots \end{cases} \tag{10}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \dots + \varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} (\omega(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) + \dots) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \omega(\xi) + \varepsilon^3 \dots = \\
& = \varepsilon X_1(\xi, \varphi) + \varepsilon^2 \frac{\partial X}{\partial \xi} u_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} v_1 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 X_2(\xi, \varphi) + \varepsilon^3, \\
& \omega(\xi) + \varepsilon \Phi_1(\xi) + \varepsilon^2 \Phi_2(\xi) + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \xi} (\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 \dots) + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} (\omega(\xi) + \\
& + \varepsilon \Phi_1(\xi) + \varepsilon^3 \dots) = \omega(\xi) + \varepsilon \frac{\omega}{\xi} u_1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} u_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} u_1^2 \right) + \\
& + \varepsilon \Psi_1(\varepsilon, \varphi) + \varepsilon^2 \Psi_2(\varepsilon, \varphi) + \varepsilon^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} u_1 + \varepsilon^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} v_1 + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned} \tag{11}$$

Приравниваем члены при одинаковых степенях ε :

$$A_1(\xi) + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \omega(\xi) = X_1(\xi, \varphi), \tag{12}$$

$$\Phi_1(\xi) + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \omega(\xi) = \Psi_1(\xi, \varphi) + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} u_1(\xi, \varphi) \equiv F_1(\xi, \varphi) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
& A_2(\xi) + \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \omega(\xi) = X_2(\xi, \varphi) + \frac{\partial X_1}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} v_1 - \\
& - \frac{\partial u_1}{\partial \xi} A_1(\xi) - \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \Phi_1(\xi) \equiv F_2(\xi, \varphi),
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi) + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \omega(\xi) = \Psi_2(\xi, \varphi) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \xi} A_1(\xi) - \\ - \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \Phi_1(\xi) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} u_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} u_1^2 \right) \equiv F_3(\xi, \varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Из бесконечной системы (10) последовательно определяем пары функций $A_1, u_1; \Phi_1, v_1; A_2, u_2; \Phi_2, v_2$ и т.д.

Приравниваем в тождестве (10₁) постоянные и переменные по отношению к φ части, имеем

$$A_1(\xi) = \overline{X_1}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(\xi, \varphi) d\varphi = X_{10}(\xi), \quad (16)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \omega(\xi) = X_1(\xi, \varphi) - \overline{X_1}(\xi) = \sum_{n \neq 0} X_{1n}(\xi) \exp^{in\varphi}. \quad (17)$$

Интегрируя (12) по явно входящему φ , получаем

$$u_1(\xi, \varphi) = \frac{1}{\omega(\xi)} \int_0^\varphi (X_1(\xi, \varphi) - \overline{X_1}(\xi)) d\varphi = \frac{1}{\omega(\xi)} \sum_{n \neq 0} X_{10}(\xi) \frac{\exp^{in\varphi}}{in}. \quad (18)$$

Постоянную интегрирования, как и в стандартных системах, положим равным нулю. В теоретическом смысле выбор этих постоянных безразличен, но может представлять интерес в конкретных задачах.

Аналогично поступаем и для определения следующей пары функций Φ_1 и v_1 :

$\Phi_1(\xi) = \overline{F_1}(\xi)$ (среднее значение $F_1(\xi, \varphi)$),

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \omega(\xi) = F_1(\xi, \varphi) - \overline{F_1}(\xi), \quad (19)$$

откуда

$$v_1(\xi, \varphi) = \frac{1}{\omega(\xi)} \int_0^\varphi (F_1(\xi, \varphi) - \overline{F_1}(\xi)) d\varphi.$$

Видно, что функция $v_1(\xi, \varphi)$ определяется уравнением той же структуры, что и функция $u_1(\xi, \varphi)$. Эти функции получаются

интегрирование известных периодических функций с нулевым средним

$$X_1(\xi, \varphi) - \overline{X_1}(\xi) \text{ или } F_1(\xi, \varphi) - \overline{F_1}(\xi).$$

Подставляя A_1, u_1, Φ_1, v_1 в правую часть (10₃), получаем известную функцию $F_2(\xi, \varphi)$, после чего находим $A_2(\xi) = \overline{F_2}(\xi)$ (среднее значение $F_2(\xi, \varphi)$),

$$\frac{\partial u_2}{\partial \varphi} \omega(\xi) = F_2(\xi, \varphi) - \overline{F_2}(\xi),$$

откуда

$$u_2(\xi) = \frac{1}{\omega(\xi)} \int_0^\varphi (F_2(\xi, \varphi) - \overline{F_2}(\xi)) d\varphi.$$

Затем на очереди

$$\Phi_2(\xi) = \overline{F_3}(\xi), \quad \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \omega(\xi) = F_3 - \overline{F_3}(\xi),$$

откуда

$$v_2(\xi) = \frac{1}{\omega(\xi)} \int_0^\varphi (F_3(\xi, \varphi) - \overline{F_3}(\xi)) d\varphi \text{ и т.д.}$$

Таким образом можно определить любое количество функций A_i, u_i, Φ_i, v_i .

3. Построение k -го приближения системы с быстрой фазой. Предположим, что некоторое количество функций A_i, v_i, Φ_i, v_i определено. Обсудим вопрос о построении решения системы (1) в некотором k -ом приближении. Удерживая в правых частях (7₁) члены $\sim \varepsilon^k$ и отбрасывая последующие, мы получаем систему

$$\dot{\xi}_k = \xi A_1(\varepsilon_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k). \quad (20)$$

Опять обозначим через $\xi_k(t, \varepsilon)$ решение системы (15), а через $\xi(t, \varepsilon)$ решение системы (7₁). Тогда на промежутке времени $\Delta \sim \frac{1}{\varepsilon}$, вообще говоря,

$$\xi(t, \varepsilon) - \xi_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^k$$

разность $\dot{\xi}(t, \varepsilon) - \dot{\xi}_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^{k+1}$ интегрируется на промежутке $\Delta \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Как и в стандартных системах, будем называть $\xi_k(t, \varepsilon)$

K -ым приближением для $\xi(t, \varepsilon)$ (номер приближения медленных переменных ξ совпадает с порядком погрешности). Когда найдена функция $\xi_k(t, \varepsilon)$, можно приближенно найти переменную функцию φ квадратурой, подставляя $\xi_k(t, \varepsilon)$ в последнее уравнение (7₂) усредненной системы и интегрируя получившуюся функцию t . Поскольку погрешность при подстановке ξ_k в $\omega(\xi)$ составляет

$$\omega(\xi) - \omega(\xi_k) \sim \xi - \xi_k \sim \varepsilon^k,$$

то в формуле (7₂) нет смысла удерживать члены порядка ε^k :

$$\dot{\varphi}_{k-1} = \omega(\xi_k) + \varepsilon\Phi_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1}\Phi_{k-1}(\xi_k). \quad (21)$$

Интегрируя (16), получаем

$$\varphi_{k-1}(t, \varepsilon) = \varphi_0 + \int_0^t [\omega(\xi_k) + \varepsilon\Phi_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1}(\xi_k)] dt.$$

Функция под интегралом, прежде всего за счет $\omega(\xi_k)$, имеет погрешность $\xi - \xi_k \sim \varepsilon^k$. Интегрирование на большом промежутке $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ дает погрешность порядка ε^{k-1} . Поэтому естественно обозначить результат через φ_{k-1} и назвать его $(k-1)$ -м приближением функции φ . Итак, зная k -е приближение для медленных переменных ξ , можно, вообще говоря, получить лишь $(k-1)$ -е приближение для быстрой переменной φ . Поэтому говорят, что в системах вида (1) (с медленными переменными x и быстрой переменной Ψ в рамках каждого приближения быстрая переменная на один порядок хуже, чем медленные переменные. Обычно в большинстве задач амплитудные переменные ξ представляют больший интерес, чем фазовая переменная φ . Поэтому естественно, что нумерация приближений решений системы с фазой ведется по порядку погрешности определения медленных переменных, то есть пару (ξ_k, φ_{k-1}) называют k -ым приближением для (ξ, φ) . Соответственно усредненной системой k -го приближения называют систему (15) – (16):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \varepsilon A_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k), \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \omega(\xi_k) + \varepsilon\Phi_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1}\Phi_{k-1}(\xi_k). \end{aligned} \quad (22)$$

Итак, для построения k -го приближения решения системы (1) с быстрой фазой требуется:

1) решить усредненную систему k -го приближения

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_k &= \varepsilon A_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k), \\ \dot{\xi}_{k-1} &= \omega(\xi_k) + \varepsilon \Phi_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1} \Phi_{k-1}(\xi_k).\end{aligned}$$

Найдя из (17₁) $\xi_k(t, \varepsilon)$, подставляем его в (17₂) и находим $\varphi_{k-1}(t, \varepsilon)$ квадратурой. Заметим, что с сохранением порядка погрешности ε^k достаточно в $\Phi_i(\xi)$ подставлять не $\xi_k(t, \varepsilon)$, а $\xi_{k-i}(t, \varepsilon)$ — решение усредненной системы $(k-i)$ -приближения.

2) Зная $\xi_k(t, \varepsilon)$ и $\varphi_{k-1}(t, \varepsilon)$ — приближенные значения усредненных переменных ξ и φ , по формулам замены (6) находим приближенные значения исходных переменных x и ψ :

$$\begin{aligned}x_k(t, \varepsilon) &= \xi_k + \varepsilon u_1(\xi_k, \varphi_{k-1}) + \dots + \varepsilon^{k-1} u_{k-1}(\xi_k, \varphi_{k-1}), \\ \psi_{k-1}(t, \varepsilon) &= \varphi_{k-1} + \varepsilon v_1(\xi_k, \varphi_{k-1}) + \dots + \varepsilon^{k-2} v_{k-2}(\xi_k, \varphi_{k-1}).\end{aligned}$$

Видно, что порядок ε^k отброшенных членов в (18₁) и ε^{k-1} в (18₂) определяется порядком погрешности определения первых (самых больших) слагаемых ε_k и φ_{k-1} . Опять замечаем, что с сохранением порядка погрешности определения первых слагаемых в (18₁) и (18₂) достаточно в функции $u_i(\xi, \varphi)$ и $v_i(\xi, \varphi)$ подставлять не ξ_k и φ_{k-1} , а ξ_{k-i} и φ_{k-i-1} .

3) что касается начальных условий

$$x(0) = x_0, \psi(0) = \psi_0,$$

то их можно поручить функциям ξ_k и φ_{k-1} , а u_i и v_i подчинять нулевым начальным условиям.

В общем случае, если начальные значения сами являются функциями параметра ε , можно разложить их по степени ε и выбирать подходящие начальные условия для $\xi_k, \varphi_{k-1}, u_i, v_i$ в рамках рассматриваемого приближения.

В заключение подчеркнем еще раз, что достоинством усредненной системы любого приближения (17) является разделение в ней медленных и быстрых переменных. Правые части (17) не зависят от φ и допускают последовательное определение сначала медленных переменных ξ_k а затем — быстрой переменной $\varphi - k - 1$ интегрированием известного выражения.

Замечание 1 Опять, как и в стандартных системах, существенную роль играет усредненная система первого приближения.

Если в системе для k -го приближения функции ξ ,

$$\dot{\xi}_k = \varepsilon A_1(\xi_k) + \varepsilon^2 A_2(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k), \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$$

ввести медленное время $\tau = \varepsilon t, 0 \leq \tau \leq \frac{L}{\varepsilon}$, то получится система

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = A_1(\xi_k) + \varepsilon A_2(\xi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1} A_k(\xi_k), \quad 0 \leq \tau \leq L$$

для конечного промежутка времени $[0, L]$, позволяющая построить регулярным методом малого параметра функцию ξ_k в виде

$$\xi_k(\tau) = \xi_1(\tau) + \varepsilon \delta \xi_1(\tau) + \varepsilon^k \delta \xi_2(\tau) + \dots,$$

где $\xi_1(\tau)$ — решение усредненной системы первого приближения $\frac{\partial \xi_1}{\partial \tau} = A_1(\xi_1)$, а поправки $\delta \xi_i$ находятся из линейных систем вида

$$\frac{\partial(\delta \xi_i)}{\partial \tau} = \frac{A_1(\xi_1(\tau))}{\partial \xi} \delta \xi_i + F_i(\xi(\tau))$$

с одной и той же известной матрицей $\frac{\partial A_1(\xi_1(\tau))}{\partial \xi}$ и известными для каждой $\delta \xi_i$ правыми частями $F_i(\xi_1(\tau))$. Например, для $\delta \xi_1$ такой правой частью будет $F_2(\xi_1(\tau)) = A_2(\xi_1(\tau))$.

Остановимся на частном случае $\omega = const$. Если частота ω не зависит от медленных переменных x , то первое слагаемое ω в последнем уравнении (7₂) усредненной системы известно всегда точно. Поэтому в это уравнение ξ_k вместо ξ начинается с члена $\varepsilon \Phi_1(\xi)$, при этом его погрешность оказывается порядка $\varepsilon \varepsilon^k = \varepsilon^{k+1}$. Следовательно, в случае $\omega = const$ после определения $\xi_k(t, \varepsilon)$ имеет смысл в формуле (7₂) удерживать члены $\varepsilon^k \Phi_k(\xi_k)$. При этом усредненная система k -го приближения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \varepsilon A_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k A_k(\xi_k), \\ \dot{\varphi}_k &= \omega + \varepsilon \Phi_1(\xi_k) + \dots + \varepsilon^k \Phi_k(\xi_k) \end{aligned}$$

и погрешность определения медленных переменных ξ и быстрой φ оказывается одинаково: $\xi - \xi_k \sim \varepsilon^k, \varphi - \varphi_k \sim \varepsilon^k$. В соответ-

ствии с (19) формулы (6), определяющие x и ψ , в этом случае приобретает вид

$$\begin{aligned}x_k(t, \varepsilon) &= \xi_k + \varepsilon v_1(\xi_k, \varphi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1} u_{k-1}(\xi_k, \varphi_k), \\ \psi_k(t, \varepsilon) &= \varphi_k + \varepsilon v_1(\xi_k, \varphi_k) + \dots + \varepsilon^{k-1} v_{k-1}(\xi_k, \varphi_k)\end{aligned}$$

и погрешность в определении x и ψ оказывается тоже одинаковой:

$$x - x_k \sim \varepsilon^k, \psi - \psi_k \sim \varepsilon^k.$$

В заключение обсудим точность определения исходной быстрой переменной y в решении задачи (2)

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2(x)y = \varepsilon f(x, y, \dot{y}) \\ \dot{x} = \varepsilon X(x, y, \dot{y}) \end{cases}$$

выражается через a и ψ формулой
1° $y = a(t, \varepsilon) \cos \psi(t, \varepsilon)$ $\omega = \omega(x) \neq \text{const}$. Пусть

$$y_{k-1}(t, \varepsilon) = a_k(t, \varepsilon) \cos \psi_{k-1}(t, \varepsilon),$$

где a_k и ψ_{k-1} — соответственно k -е и $k-1$ приближение a и ψ , найденное на основе решения усредненной системы k -го приближения (17). Напомним, что амплитуда a входит, согласно (5), в вектор медленных переменных $\{a, x\}$. Значит, для a_k и ψ_{k-1} верны оценки

$$a - a_k \sim \varepsilon^k, \psi - \psi_{k-1} \sim \varepsilon^{k-1}.$$

Тогда верно также

$$y(t, \varepsilon) - y_{k-1}(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^{k-1}.$$

Таким образом, если квазилинейное уравнение при $\omega = \omega(x)$ сведено к системе с быстрой фазой, то точность определения быстрых переменных y и \dot{x} совпадает с точностью определения быстрой переменной ψ . Поэтому для получения первого приближения переменной y нужно решить усредненную систему второго приближения, что позволит получить второе приближение для a и первое для ψ .

2° $\omega = \text{const}$.

Теперь усредненная система k -го приближения имеет вид (19). Ее решение (ξ_k, φ_k) позволяет получить по формулам (20) k -е приближение (x_k, ψ_k) , дающее погрешности $x - x_k \sim \varepsilon^k$ и

$\psi - \psi_k \sim \varepsilon^k$. В этом случае мы получаем функцию $y_k(t, \varepsilon) = a_k(t, \varepsilon) \cos \psi_k(t, \varepsilon)$, где a_k и ψ_k — k -е приближение a и ψ , для которых верны оценки

$$a - a_k \sim \varepsilon^k, \quad \psi - \psi_k \sim \varepsilon^k.$$

Тогда верно также $y(t, \varepsilon) - y_k(t, \varepsilon) \sim \varepsilon^k$, то есть в случае $\omega = \text{const}$ погрешность определения и одинакова, a и ψ такую же погрешность имеет функция $y_k(t, \varepsilon)$.

4. Результаты теорем о первом и втором приближениях для системы с фазой.

1° $\omega = \omega(x) \neq \text{const}$.

Теорема о первом приближении для системы с фазой

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi), \\ \dot{\psi} = \omega(x) + \varepsilon \Psi(x, \psi), \end{cases} \quad X \text{ и } \Psi \text{ периодичны по } \psi \quad (23)$$

утверждает, что

$$x(t, \varepsilon) - \xi(x, \varepsilon) = O(\varepsilon) \text{ для } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon},$$

где $x(t, \varepsilon)$ — решение системы (1), а ξ_1 — решение усредненной системы первого приближения $\dot{\xi}_1 = \varepsilon \bar{X}(\xi_1)$ с одинаковыми начальными условиями. Таким образом, результатом теоремы о первом приближении является близость медленных переменных x на асимптотически большом промежутке времени $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Быстрая фаза ψ в рамках первого приближения определяется лишь из порождающего уравнения

$$\psi_0(t, \varepsilon) = \varphi_0(t, \varepsilon),$$

где $\dot{\varphi}_0 = \omega(\xi_1(t, \varepsilon))$. Ясно, что

$$\psi(t, \varepsilon) - \psi_0(t, \varepsilon) = O(1), \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Действительно,

$$\dot{\psi} = \omega(x) + O(\varepsilon), \quad \omega(x) - \omega(\xi_1) = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon},$$

поэтому на промежутке $\left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$

$$\psi(t, \varepsilon) - \varepsilon_0(t, \varepsilon) = \int_0^t (\omega(x) - \omega(\xi_1)) dt = O(1),$$

то есть медленные переменные x и быстрая фаза ψ в этом случае определяются с одинаковой точностью. В случае $\omega = const$ во втором приближении получаем

$$\begin{aligned}x_2(t, \varepsilon) &= \xi_2 + \varepsilon u_1(\xi_2, \varphi_2), \\ \psi_2(t, \varepsilon) &= \varphi_2 + \varepsilon v_1(\xi_2, \varphi_2),\end{aligned}$$

где (ξ_2, φ_2) — решение усредненной системы второго приближения

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = \varepsilon \bar{I}(\xi_2) + \varepsilon^2 A_2(\xi_2), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega + \varepsilon \Phi_1(\xi_2) + \varepsilon^2 \Phi_2(\xi_2). \end{cases}$$

Теперь результатом теоремы о втором приближении являются оценки

$$\begin{aligned}x - x_2 &\equiv x - \xi_2 - \varepsilon u_1(\xi_2, \varphi_2) = O(\varepsilon^2), \\ \psi - \psi_2 &\equiv \psi - \varphi_2 - \varepsilon v_1(\xi_2, \varphi_2) = O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}u_1(\xi_2, \varphi_2) &= \frac{1}{\omega(\xi_2)} \int_0^{\varphi_2} (X_1(\xi_2, \varphi) - \bar{X}_1(\xi_2)) d\varphi, \\ v_1(\xi_2, \varphi_2) &= \frac{1}{\omega(\xi_2)} \int_0^{\varphi_2} (F_1(\xi_2, \varphi) - \bar{F}_1(\xi_2)) d\varphi, \\ F_1(\xi_2, \varphi) &= \Psi_1(\xi, \varphi) \text{ (см. (10}_2\text{))}.\end{aligned}$$

Отметим, что при постоянной ω слагаемое $\frac{\partial \omega}{\partial \xi} u_1$ в F_1 отсутствует.

Опять видим, что при $\omega = const$ медленные переменные x и быстрая фаза ψ определяются с одинаковой точностью. Функция $A_2(\xi) = \bar{F}_2(\xi)$, где $F_2(\xi, \varphi)$ была выписана выше в пункте 1°, а функция $\Phi_2(\xi)$ имеет аналогичную структуру $\Phi_2(\xi_2) = \bar{F}_3(\xi)$, где $\bar{F}_3(\xi_2)$ — среднее значение по φ функции (см. (10₄)):

$$F_3(\xi, \varphi) = \Psi_2(\xi, \varphi) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} v_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \xi} A_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \Phi_1$$

(при постоянной ω слагаемые $\frac{\partial \omega}{\partial \xi} u_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} U_1^2$ отсутствуют).

5. «Улучшенное» первое приближение. Функцией, аналогичной первому «улучшенному» приближению для стандартных систем в случае системы с фазой является функция

$$\tilde{x}_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \varepsilon u_1(\xi_1(t, \varepsilon), \varphi_0(t, \varepsilon)),$$

где (ξ_1, φ_0) — решение системы

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \varepsilon X_1(\xi_1), \\ \dot{\varphi}_0 = \omega(\xi_1), \end{cases}$$

Замена φ на φ_0 дает погрешность

$$\varphi - \varphi_0(t, \varepsilon) = \int_0^t (\omega(\xi) - \omega(\xi_1)) + O(\varepsilon) dt = O(1) \text{ для } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Отметим это ограниченное «расползание» $\varphi - \varphi_0$ в отличие от неизменного t в $u_1(\xi_1, t)$ в стандартной системе. Тем не менее оно не мешает порядку малости $O(\varepsilon)$ поправки εu_1 . Заметим, что в случае $\omega = \text{const}$ разность двух первых слагаемых под интегралом обращается в нуль. Оценка погрешности $O(1)$ сохраняется за счет наличия членов порядка $O(\varepsilon)$ в исходном точном уравнении для φ (см. (7₂)).

Как и в стандартных системах, в доказательстве теорем, аналогичной теореме Боголюбова для систем с фазой, будет верна оценка

$$x - \tilde{\xi}_1 = x - \xi_1 - \varepsilon u_1(\xi, \varphi_0) = O(\varepsilon).$$

Поэтому удерживать εu_1 не имеет смысла и первым приближением в системе с фазой называют функцию $\xi_1(t, \varepsilon)$, определяемую уравнением $\dot{\xi}_1 = \varepsilon \overline{X}_1(\xi_1)$. Но, если поправка

$$\varepsilon u_1(\xi_1, \varphi_0), \text{ где } \varphi_0 = \int_0^t \omega(\xi_1(t, \varepsilon)) dt + \varphi_0(0)$$

представляет интерес, и, как и в стандартных системах, достается «даром», вместе с функцией ξ_1 , то конструкцию

$$\tilde{x}_1 = \xi_1 + \varepsilon u_1(\xi_1(t, \varepsilon), \varphi_0(t, \varepsilon))$$

также называют первым «улучшенным» приближением системы с фазой. Погрешность $\tilde{x}_1(t, \varepsilon)$, конечно, та же, что и у $\xi_1(t, \varepsilon)$:

$$x - \tilde{x}_1 = x - \xi_1 - \varepsilon u_1(\xi_1, \varphi_0) = O(\varepsilon).$$

Поэтому улучшение опять означает не повышение точности, а лишь учет свойств поправки εu_1 .

Как и в стандартных системах начнем с примера, в котором справедливость обещанной асимптотики непосредственно проверяется для известного точного решения. Отличие примера для системы с фазой от аналогичного примера для стандартной системы в том, что погрешность асимптотики для стандартной системы была «обещана» доказанной теоремой Боголюбова. Теперь же мы не доказывали теорему о первом приближении для системы с постоянной фазой ω , поэтому желаемая погрешность действительно лишь «обещана» нами в силу всех предыдущих рассуждений.

Пример 1. Рассмотрим опять задачу Коши для линейного уравнения

$$\begin{cases} \ddot{y} + \varepsilon 2\nu \dot{y} + \omega^2 y = 0, & \nu \geq \omega = \text{const}, \\ y(0) = y_0, \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0. \end{cases} \quad (24)$$

Замена переменных

$$\begin{cases} y = a \cos \psi, \\ \dot{y} = -a\omega \sin \psi \end{cases} \quad (25)$$

переводит задачу от переменных (y, \dot{y}) к переменным (a, ψ) . При $t = 0$ получаем равенства, определяющие начальные значения a_0 и ψ_0 :

$$\begin{cases} a_0 \cos \psi_0 = y_0, \\ -a_0 \omega \sin \psi_0 = \dot{y}_0, \end{cases}$$

откуда $a_0 = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}}$, $\psi = -\arctg\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega y_0}\right)$. Для a и ψ получаем систему с фазой

$$\begin{cases} \dot{a} = -\varepsilon \nu a + \varepsilon \nu a \cos 2\psi, \\ \dot{\psi} = \omega - \varepsilon \nu \sin 2\psi, \\ a(0) = a_0, \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Усредненная система первого приближения соответствует условию $\omega = const$, в ней выписаны члены порядка ε в уравнении для фазы (см.(19)):

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_1 = -\varepsilon\nu\bar{a}_1, \\ \dot{\bar{\psi}}_1 = \omega + \varepsilon \cdot 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\bar{a}_1 = a_0 e^{-\varepsilon\nu t}, \quad \bar{\psi}_1 = \omega t + \psi_0,$$

а для y_1 получаем в силу замены (22)

$$y_1 = \bar{a}_1(t) \cos \bar{\psi}_1(t) = a_0 e^{-\varepsilon\nu t} \cos(\omega t + \psi_0).$$

Выпишем теперь точное решение задачи (21) для исходного линейного уравнения, придав ему форму, удобную для сравнения с y_1 :

$$y = a_0 e^{-\varepsilon\nu t} \cos \left(\omega t \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon\nu}{\omega} \right)^2} \right) + O(\varepsilon^4 t + \psi_0) = a(t) \cos \psi(t).$$

Погрешность первого приближения $(\bar{a}_1(t), \bar{\psi}_1(t))$ для (a, ψ) :

$$a(t) - \bar{a}_1 \equiv 0 \leq C_\varepsilon \text{ (погрешность укладывается в } O(\varepsilon)),$$

$$\begin{aligned} \psi(t) - \bar{\psi}_1(t) &= \omega t \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon\nu}{\omega} \right)^2} + \psi_0 - \omega t - \psi_0 = \omega t \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon\nu}{\omega} \right)^2} - 1 \right) \\ &= \omega t \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon\nu}{\omega} \right)^2 + O(\varepsilon^4) - 1 \right) = C\varepsilon^2 t \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

для $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$. Видно, что при $\omega = const$ погрешность $O(\varepsilon)$ медленной переменной \bar{a}_1 и быстрой фазы $\bar{\psi}_1$ одинакова. Для y_1 имеем

$$y - y_1 \sim \psi - \bar{\psi}_1 = O(\varepsilon) \text{ для } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon},$$

то есть погрешность $y - y_1$ совпадает с погрешностью $\psi - \bar{\psi}_1$. Это соответствует оценкам, ожидаемым нами на основе предыдущих рассуждений. Опять в силу формул замены переменных (22)

$$\begin{cases} \dot{y} = a \cos \psi, \\ \dot{\psi} = -a\omega \sin \psi \end{cases}$$

получаем на фазовой плоскости знакомый устойчивый фокус

$$\begin{cases} y_1 = a_0 e^{-\varepsilon t} \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \dot{y}_1 = -a\omega e^{-\varepsilon t} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{cases}$$

или $y_1^2 + \frac{\dot{y}_1^2}{\omega^2} = a_0^2 e^{-2\varepsilon t}$.

Пример 2. Рассмотрим с помощью системы с фазой существование стандартного колебательного решения для уравнения Ван дер Поля

$$\ddot{y} + y = \varepsilon (1 - y^2) \dot{y}. \quad (26)$$

Замена переменных

$$\begin{aligned} y &= a(t, \varepsilon) \cos \psi(t, \varepsilon), \\ \dot{y} &= -a(t, \varepsilon) \sin \psi(t, \varepsilon) \end{aligned}$$

приводит уравнение (1) к системе с фазой:

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \left(\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2\psi + \frac{a^3}{8} \cos 4\psi \right) \equiv \varepsilon X_1(a, \psi), \\ \dot{\psi} = 1 - \varepsilon \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2} \right) \cos 2\psi - \frac{a^2}{8} \sin 4\psi \right) \equiv 1 - \varepsilon \Psi_1(a, \psi), \\ \text{СКОБКИ!!!} \end{cases}$$

Усредненная системы первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_1 = \varepsilon \frac{\bar{a}_1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{2} \right), \\ \dot{\bar{\varphi}}_1 = 1 + \varepsilon \cdot 0 = 1 + \varepsilon \bar{\Psi}_1(\bar{a}_1), \end{cases}$$

Разделением переменных находим \bar{a}_1 , затем квадратурой $\bar{\varphi}_1$ и имеем оценки, соответствующие постоянной $\omega = 1$:

$$\begin{aligned} a(t, \varepsilon) - \bar{a}_1(t, \varepsilon) &= O(\varepsilon), \\ \psi(t, \varepsilon) - \bar{\varphi}_1(t, \varepsilon) &= O(\varepsilon) \text{ на } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Уравнение (25₁) имеет точки покоя $\bar{a}_1 \bar{1} = 0$ и $\bar{a}_1 \bar{2} = 2$. Первая неустойчива, вторая устойчива. Таким образом, в первом приближении устойчивый стационарный колебательный режим с $\bar{a}_{1c} = 2$ и $\bar{\varphi}_{1c} = t + \varphi_0$ вследствие формул замены переменных имеет вид:

$$\begin{cases} y_{1c} = a_{1c} \cos \psi_{1c} = 2 \cos(t + \varphi_0), \\ \dot{y}_{1c} = -a_{1c} \sin \psi_{1c} = -2 \sin(t + \varphi_0), \end{cases}$$

что дает на фазовой плоскости знакомую уже окружность $y^2 + \dot{y}^2 = 4$. Усредненная система второго приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_2 = \varepsilon \frac{\bar{a}_2}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_2^2}{4} \right) + \varepsilon^4 \cdot 0, \\ \dot{\bar{\varphi}}_2 = 1 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{a}_2^2}{8} + \frac{7\bar{a}_2^4}{256} \right), \end{cases}$$

Опять разделением переменных из (26₁) находим a_2 , подставляем в (26₂) и квадратурой получаем $\bar{\varphi}_2$. Реализацию выкладок предоставляем энтузиастам. Далее находим функции (см. (2) и (3))

$$u_1(\bar{a}_2, \bar{\varphi}_2) = \int_0^{\bar{\varphi}_2} (X_1(\bar{a}_2, \varphi) - \bar{X}_1(\bar{a}_2)) d\varphi = -\frac{\bar{a}_2}{4} \sin 2\bar{\varphi}_2 + \frac{\bar{a}_2^3}{32} \sin 4\bar{\varphi}_2,$$

$$v_1(\bar{a}_2, \bar{\varphi}_2) = \int_0^{\bar{\varphi}_2} (\Psi_1(\bar{a}_2, \bar{\varphi}_2) - \bar{\Psi}_1(\bar{a}_2, \bar{\varphi}_2)) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\bar{a}_2}{2} \right) \sin 2\bar{\varphi}_2 - \frac{\bar{a}_2^3}{32} \cos 4\bar{\varphi}_2$$

и с их помощью образуем второе приближение решения (a, φ) системы (2):

$$\begin{cases} a_2 = \bar{a}_2 + \varepsilon \left[-\frac{\bar{a}_2^2}{4} \sin 2\bar{\varphi}_2 + \frac{\bar{a}_2^3}{32} \sin 4\bar{\varphi}_2 \right] \equiv \bar{a}_2 + \varepsilon u_1(\bar{a}_2, \bar{\varphi}_2), \\ \psi_2 = \bar{\varphi}_2 + \varepsilon \left[-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\bar{a}_2}{2} \right) \sin 2\bar{\varphi}_2 - \frac{\bar{a}_2^3}{32} \cos 4\bar{\varphi}_2 \right] \equiv \bar{\varphi}_2 + \varepsilon v_1(\bar{a}_2, \bar{\varphi}_2), \end{cases}$$

Полученное второе приближение (27) удовлетворяет ожидаемым оценкам:

$$a(t, \varepsilon) - a_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2),$$

$$\psi(t, \varepsilon) - \psi_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) \quad \text{на } 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}.$$

Напомним, что $\omega = 1 = \text{const}$ и поэтому погрешности a_2 и ψ_2 одинаковы.

Для стационарного колебательного режима во втором приближении из уравнения (26₁) опять имеем устойчивую точку покоя $\bar{a}_{2c} = 2$. Подставляя ее в (26₂), получаем

$$\dot{\bar{\varphi}}_{2c} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}, \text{ откуда}$$

$$\bar{\varphi}_{2c} = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t + \psi_0 = \omega t + \psi_0,$$

через $\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$ обозначена уточненная частота.

Подставляя $\bar{a}_{2c} = 2$ и $\bar{\varphi}_{2c}$ вместо \bar{a}_2 и $\bar{\varphi}_2$ во второе приближение (27) получаем переменные a_{2c} и φ_{2c} , описывающий устойчивый стационарный колебательный режим во втором приближении:

$$\begin{cases} a_{2c} = 2 + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} \sin 2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{4} \sin 4(\omega t + \varphi_0) \right), \\ \psi_{2c} = (\omega t + \psi_0) + \varepsilon \left(\frac{1}{4} \sin 2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{8} \cos 4(\omega t + \varphi_0) \right), \\ \omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}, \end{cases}$$

Подставляя (a_{2c}, ψ_{2c}) в формулы исходной замены переменных

$$\begin{aligned} y &= a \cos \psi, \\ \dot{y} &= -a \sin \psi \end{aligned}$$

и удерживая члены до порядка ε включительно, получаем фазовые координаты предельного цикла во втором приближении

$$\begin{cases} y_{2c} = 2 \cos(\omega t + \psi_0) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(\omega t + \psi_0) + O(\varepsilon^2), \\ \dot{y}_{2c} = -2 \sin(\omega t + \psi_0) - \varepsilon \frac{3}{4} \cos 3(\omega t + \psi_0) + O(\varepsilon^2), \\ \omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}, \end{cases}$$

Для сопоставления формул (28) с выражениями (49) §2 для y_{2c} и \dot{y}_{2c} , полученными с помощью стандартной системы, напомним, что в формулах (49) §2

$$\begin{aligned} y_{2c} &= 2 \cos \varphi - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3\varphi + O(\varepsilon^2), \\ \dot{y}_{2c} &= -2 \sin \varphi - \varepsilon \frac{3}{4} \cos 3\varphi + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

использовалось обозначение $\varphi = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right)t + \theta_0 = \omega t + \psi_0$, так как $\theta_0 = \psi_0 = -\arctg\left(\frac{\dot{y}_0}{\omega y_0}\right)$. Таким образом, результаты, полученные с помощью стандартной системы и системы с фазой, совпали.

Заметим, что уравнение Ван дер Поля описывает колебания в неконсервативной системе с трением и источником энергии. Поэтому в зависимости от баланса между рассеянием энергии и ее поступлением возникающие спонтанные колебания могут возрастать, затухать или сохранять постоянное значение амплитуды в случае устойчивых автоколебаний. Поэтому исследование на устойчивость является обязательным этапом определения стационарных колебательных режимов.

До сих пор в скалярных случаях одного уравнения мы успешно пользовались качественными приемами исследования на устойчивость точки покоя. В общем случае для определения в первом приближении устойчивости автоколебательных режимов для вектора $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ нужно найти точки покоя усредненной системы

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi),$$

то есть найти корни алгебраического уравнения

$$A_1(\xi) = 0$$

и исследовать их на устойчивость.

Точка покоя $\xi_0 = \{\xi_1^0, \dots, \xi_m^0\}$ будет асимптотически устойчивой, если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, где $\lambda_k < 0$ — корни уравнения

$$\det \left\| \frac{\partial A_1(\xi_0)}{\partial \xi} - \lambda E \right\| = 0.$$

Для скалярного случая уравнения Ван дер Поля имеем

$$\dot{\bar{a}}_1 = \varepsilon A_1(\bar{a}_1) = \varepsilon \frac{\bar{a}_1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right).$$

При этом точка покоя $\bar{a}_{12} = 2$. От общего случая остается уравнение

$$A'(\bar{a})|_{\bar{a}_{12}} - \lambda = \frac{1}{2} - \frac{3\bar{a}_{12}^2}{8} \Big|_{\bar{a}_{12}} - \lambda = -1 - \lambda$$

откуда $\lambda = -1$ и точка покоя $\bar{a}_{12} = 2$ асимптотически устойчива.

В наших примерах можно было заметить совпадение результатов, когда уравнение колебаний сводимо к стандартной системе и к системе с быстрой фазой.

Действительно, в случае $\omega = \text{const}$ система с фазой легко приводится к системе в стандартной форме. Пусть имеем систему с фазой

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi), \\ \dot{\psi} = \omega + \varepsilon \Psi(x, \psi). \end{cases}$$

Положим $\theta = \psi - \omega t$, тогда $\dot{\theta} = \dot{\psi} - \omega$, и для (x, θ) получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi t + \theta), \\ \dot{\psi} = \omega + \varepsilon \Psi(x, \psi t + \theta) - \omega = \varepsilon \Psi(x, \omega t + \theta), \end{cases}$$

то есть систему в стандартной форме.

С другой стороны, в системе в стандартной форме $\dot{x} = \varepsilon X(x, t)$ единственной быстрой переменной является время t , поэтому к стандартной системе можно добавить уравнение $\dot{t} = 1$ и сделать ее системой с быстрой фазой $\psi = t$:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, t), \\ \dot{t} = 1. \end{cases}$$

Поэтому не приходится удивляться совпадению результатов для систем в стандартной форме и систем с быстрой фазой при $\omega = \text{const}$.

Следовательно, самостоятельный интерес представляют системы с одной быстрой фазой в случае $\omega = \omega(x) \neq \text{const}$ и системы с несколькими фазами, где возникает явление резонанса, невозможное в системах с одной фазой.

6. Два частных случая.

1° Медленно меняющиеся параметры. Рассмотрим важный частный случай, когда физические параметры системы медленно меняются со временем, что обычно выражают зависимостью от так называемого «медленного» времени $\tau = \varepsilon t$. Пусть возмущенное уравнение второго порядка имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2(\tau)y = \varepsilon f(\tau, y, \dot{y}), \\ \dot{\tau} = \varepsilon, \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ получаем порождающую систему

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2(\tau)y = 0, \\ \dot{\tau} = 0, \end{cases}$$

где $\tau = \text{const}$. Система (30) имеет решение вида

$$\begin{cases} y = a \cos [\omega(\tau)t + \theta], \\ \dot{y} = -a\omega(\tau) \sin [\omega(\tau)t + \theta], \\ a, \theta, \tau = \text{const}. \end{cases}$$

Попытаемся, как мы делали раньше при $\varepsilon \neq 0$, перейти по формулам (31) к стандартной системе, считая

$$\tau = \varepsilon t, \quad a = a(t, \varepsilon), \quad \theta = \theta(t, \varepsilon)$$

и рассматривая формулы (3) как замену переменных, позволяющую перейти от (τ, y, \dot{y}) к $(\varepsilon t, a(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon))$. Используя обозначения

$$\psi(t) = \omega(\tau)t + \theta, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \omega' = \frac{\partial \omega(\tau)}{\partial \tau},$$

получаем **В системе нет знака = в первом уравнении, знак эквивалентности между системами?**

$$\begin{cases} \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi (\omega + \varepsilon \omega' t + \dot{\theta}), \\ -\dot{a} \omega \sin \psi - a \omega \cos \psi (\omega + \varepsilon \omega' t + \dot{\theta}) = \\ = \varepsilon a \omega' \sin \psi - a \omega^2 \cos \psi + \varepsilon f(\tau, a \cos \psi, -a \omega \sin \psi), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot \dot{\theta} = a \omega \sin \psi - a \omega \sin \psi + \varepsilon a \omega' t \sin \psi, \\ -\dot{a} \omega \sin \psi - a \omega \cos \psi \cdot \dot{\theta} = a \omega^2 \cos \psi - a \omega^2 \cos \psi + \varepsilon a \omega \omega' t \cos \psi + \\ + \varepsilon a \omega' \sin \psi + \varepsilon f(\tau, a \cos \psi, -a \omega \sin \psi), \end{cases}$$

Решая систему (32) относительно a и θ , получаем

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} [f(\tau, a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi + a \omega' \sin^2 \psi], \\ \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{a \omega} [f(\tau, a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi + a \omega' \sin \psi \cos \psi + a \omega \omega' t], \end{cases}$$

Во введенных ранее обозначениях слагаемое $a \omega \omega' t$ имеет вид

$$a \omega \omega' t = a \omega' (\psi - \theta), \quad \omega' = \frac{\partial \omega(\tau)}{\partial \tau}.$$

Частные производные? d круглое или прямое? Система (33) формально имеет вид стандартной системы, но последнее слагаемое (34) второго уравнения не имеет среднего значения как по t , так и по ψ . Таким образом, свести уравнение (29) с $\omega = \omega(\tau)$ к системе в стандартной форме не удается.

Возникшую трудность можно преодолеть, если в качестве новых переменных взять не (a, θ) , а (a, ψ) . При этом исходное уравнение приводится к системе с быстрой фазой. Пусть опять

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega^2(\tau)y = \varepsilon f(\tau, y, \dot{y}), \\ \dot{\tau} = \varepsilon, \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ соответствующая (29) порождающая система имеет периодическое решение вида

$$\begin{cases} y = a \cos \psi, \\ \dot{y} = -a\omega(\tau) \sin \psi, \end{cases}$$

$\psi = \omega(\tau)t + \psi_0$, $\tau = \text{const}$.

При $\varepsilon \neq 0$ используем формулы (35) как формулы перехода от переменных (τ, y, \dot{y}) к (τ, a, ψ) , где ψ уже не равно $\omega(\tau)t + \psi_0$, а τ рассматривается как еще одна медленная переменная ($\dot{\tau} = \varepsilon$):

$$\begin{cases} \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \cdot \dot{\psi} = -a\omega(\tau) \sin \psi, \\ -\dot{a}\omega(\tau) \sin \psi - a\omega(\tau) \cos \psi \cdot \dot{\psi} = a(\varepsilon\omega') \cos \psi - a\omega^2 \cos \psi + \\ + \varepsilon f(\tau, a \cos \psi, -a\omega(\tau) \sin \psi), \\ \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega(\tau)} [f(\tau, a \cos \psi, -a\omega(\tau) \sin \psi) + a\omega' \cos \psi] \sin \psi, \\ \dot{\psi} = \omega(\tau) - \frac{\varepsilon}{a\omega(\tau)} [f(\tau, a \cos \psi, -a\omega(\tau) \sin \psi) + a\omega' \cos \psi] \cos \psi, \\ \dot{\tau} = \varepsilon, \end{cases}$$

где опять $\omega' = \frac{\partial \omega(\tau)}{\partial \tau}$. Получена система с медленными переменными (a, τ) и фазой ψ . При усреднении по ψ переменные a и τ , как всякие медленные переменные, считаются параметрами.

Таким образом, сведение уравнения колебаний с не совсем обычной медленной переменной τ к системе с фазой позволило преодолеть трудности, возникшие при попытке воспользоваться системой в стандартной форме.

Замечание 2 В литературе иногда, например, у Ю.А. Митропольского **Нужна ссылка!**, система с фазой тоже называется стандартной: говорится о приведении к «стандартному» виду, иногда в кавычках.

2° Консервативная колебательная система.

Рассмотрим важный случай консервативной колебательной системы, в которой возможны колебания с любой постоянной амплитудой на примере уравнения Дюффинга

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\varepsilon y^3$$

— уравнения «небольших» колебаний маятника, полезно остановиться на понятии «любой» в дальнейшем изложении. В начале нашего курса мы получили уравнение Дюффинга, удерживая члены разложения $\sin y$, сохранившие в уравнении

кубичную нелинейность. При $\varepsilon = \frac{1}{10}$ наши ограничения дали нам колебания в пределах $\approx 28^\circ$. Поэтому в дальнейших результатах слово «любой» надо принимать как «любой в пределах рассматриваемой математической модели».

Итак, пусть уравнение колебаний в нашей консервативной системе (f не зависит от \dot{y} , $f = f(y)$) имеет вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon f(y).$$

Покажем, что усредненное уравнение для амплитуды \bar{a} **всего** имеет вид

$$\dot{\bar{a}} = 0,$$

откуда $\bar{a} = a_0$ (любое!).

Действительно, уравнение для исходной амплитуды a имеет вид

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi) \sin(\psi) = \varepsilon X(a, \psi).$$

Среднее значение по ψ функции $X(a, \psi)$ равно

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(\bar{a} \cos \psi) \sin \psi d\psi = \frac{1}{2\pi\bar{a}\omega} \int_0^{2\pi} f(\bar{a} \cos \psi) d(\bar{a} \cos \psi) = \\ &= \frac{1}{2\pi\bar{a}\omega} \int_0^{2\pi} dF(\bar{a} \cos \psi) = \frac{1}{2\pi\bar{a}\omega} F(\bar{a} \cos \psi) \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

где $F(z)$ — первообразная от $f(z)$:

$$F(z) = \int_0^z f(u) du, \quad \int_0^{2\pi} dF = F(2\pi) - F(0).$$

Важным примером уравнения вида (37) является уравнение Дюффинга

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon y^3.$$

Усредненная система первого приближения (напомним, что при $\omega = const$ в уравнении для фазы надо удерживать члены порядка ε):

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_1 = 0, \\ \dot{\bar{\varphi}}_1 = \omega - \varepsilon \frac{3}{8} \frac{\bar{a}^2}{\omega}, \end{cases}$$

откуда $\bar{a}_1 = a_0$ (любое из допустимых для уравнения Дюффинга), а

$$\bar{\varphi}_1 = \left(\omega - \varepsilon \frac{3a_0^2}{8\omega} \right) t + \varphi_0.$$

Видно, что нелинейность проявляется в зависимости частоты от амплитуды a_0 . В первом приближении для y имеем

$$y_1 = \bar{a}_1 \cos \bar{\varphi}_1 = a_0 \cos \left[\left(\omega - \varepsilon \frac{3a_0^2}{8\omega} \right) t + \varphi_0 \right].$$

В дальнейших приближениях амплитуда остается постоянной ($a = a_0$), а частота получает поправки дальнейших порядков. Для второго приближения

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_2 = 0, \\ \dot{\bar{\varphi}}_2 = \omega - \varepsilon \frac{3a_0^2}{8\omega} - \varepsilon^2 \frac{15a_0^4}{256\omega^3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{a}_2 = a_0, \\ \bar{\varphi}_2 = \left(\omega - \varepsilon \frac{3a_0^2}{8\omega} - \varepsilon^2 \frac{15a_0^4}{256\omega} \right) t + \varphi_0, \end{cases}$$

Для получения второго приближения для y надо найти еще u_1 и v_1 и подставить в $y = a \cos \varphi$: $y_2 = a_2 \cos \psi_2$, где $a_2 = \bar{a}_2 + \varepsilon u_1$, $\psi_2 = \bar{\varphi}_2 + \varepsilon v_1$.

§ 4. Квазилинейные неавтономные системы с одной степенью свободы. Резонанс

Редукция колебательной системы с периодическим внешним воздействием к системе с двумя фазами. Возьмем уравнение, описывающее исходную возмущенную систему в виде

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon f(y, \dot{y}, \nu t), \quad \omega = const, \quad \nu = const,$$

где функция f 2π -периодична по аргументу νt , ν — частота внешнего воздействия. При $\varepsilon = 0$ системе (1) соответствует порождающее линейное уравнение

$$\ddot{y} = \omega^2 y = 0,$$

имеющее периодическое решение

$$y = a \cos(\psi_1), \quad \dot{y} = -a\omega \sin \psi_1, \quad \psi_1 = \omega t + \theta, \quad a, \theta = const.$$

Рассматривая вновь формулы (3) как замену переменных $(y, \dot{y}) \rightarrow (a, \psi_1)$ и повторяя известные выкладки, приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi_1, -a\omega \sin \psi_1, \psi_2) \sin \psi_1, \\ \dot{\psi}_1 = \omega - \frac{\varepsilon}{a\omega} f(a \cos \psi_1, -a\omega \sin \psi_1, \psi_2) \cos \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = \nu, \text{ откуда } \psi_2 = \nu t. \end{cases}$$

Таким образом, неавтономная колебательная система с периодическим внешним воздействием сводится к системе с одной медленной переменной a и двумя быстрыми фазами — собственной фазой ψ_1 и внешней фазой ψ_2 .

Возможность возникновения в такой системе резонанса приводит к различным вариантам ее исследования с помощью метода усреднения.

1. Усреднение в системе с двумя фазами. Запишем систему с двумя фазами в общем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi_1, \psi_2, \varepsilon) = \varepsilon X_1(x, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon^2 X(x, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon^3 \dots, \\ \dot{\psi}_i = \omega_i + \varepsilon \Psi_i(x, \psi_1, \psi_2, \varepsilon) = \omega_i + \varepsilon \Psi_{1i}(x, \psi_1, \psi_2) + \varepsilon \dots, i = 1, 2, \dots, \\ \omega_i = \text{const} \end{cases}$$

Функции X_i и Ψ_i предполагаются, как всегда в системах с фазами, разложимыми (теперь уже в двойные) ряды Фурье. Например,

$$X_1(x, \psi_1, \psi_2) = \sum_{m,n=-\text{inf}}^{\text{inf}} F_{mn}(x) e^{i(m\psi_1+n\psi_2)}$$

(используем обозначения F_{mn} , избегая X_{1mn}). Положим в системе (5)

$$\begin{cases} x = \xi + \varepsilon u_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^3, \\ \psi_i = \varphi_i + \varepsilon v_{1i}(\xi, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^2 v_{2i}(\xi, \varphi_1, \varphi_2) + \varepsilon^3 \dots, i = 1, 2, \end{cases}$$

где ξ и φ_i определяются из усредненной системы

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots, \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i + \varepsilon \Phi_{1i}(\xi) + \varepsilon^2, i = 1, 2.$$

Как и ранее, приходим к последовательности уравнений для определения $A_i, \Phi_{ij}, u_i, v_{ij}, \dots$, например,

$$A_1(\xi) + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \omega_2 = X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2).$$

Чтобы выяснить, что считать средним от X_1 , предположим, что это среднее $\bar{X}_1(\xi)$ выбрано, $A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi)$ и рассмотрим уравнение для u_1 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1} \omega_1 + \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_2} \omega_2 = X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2) - \bar{X}_1(\xi).$$

Характеристическая система для (7) имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \omega_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \omega_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2) - \bar{X}_1(\xi),$$

откуда $\varphi_i = \omega_i t + h_i, h_i = const$,

$$u_1(\xi, \varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \int_0^t [X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2) - \bar{X}_1(\xi)] \Big|_{\xi=const, \varphi_i=\omega_i t+h_i} dt$$

В новых переменных

$$X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} F_{mn}(\xi) e^{i(m\varphi_1+n\varphi_2)}$$

Будем усреднять эту функцию, как говорят, «вдоль траекторий вырожденной системы»

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 0, \\ \dot{\varphi}_i = \omega_i, \end{cases}$$

откуда $\xi = const, \varphi_i = \omega_i t + h_i$. Получаем

$$\bar{X}_1(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_0^{\infty} F_{mn}(\xi) e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t} e^{i(mh_1+nh_2)} dt.$$

Целесообразность такого усреднения следует из вида (8) и условия ограниченности функции u_1 . Заметим, что стандартную систему мы тоже усредним по t вдоль траектории вырожденной системы

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 0, \\ \dot{t} = 1, \end{cases}$$

Ограниченность функции u_1 зависит от свойств выражения $m\omega_1 + n\omega_2$.

1° Нерезонансный случай. Пусть условие

$$m\omega_1 + n\omega_2 = 0$$

выполняется только при $m = 0$ и $n = 0$. Иначе говоря, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq -\frac{n}{m}$ ни для каких целых ненулевых m и n , то есть частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы. Например, $\omega_1 = \sqrt{2}$, $\omega_2 = 1$, тогда $\frac{\sqrt{2}}{1} \neq -\frac{n}{m}$. Тогда ясно, что средним значением $\bar{X}_1(\xi)$ является нулевая гармоника ряда Фурье

$$\bar{X}_1(\xi) - F_\infty(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2,$$

а «на долю» функции $u_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ остается

$$u_1(\xi, t) = \int_0^t \sum_{m^2+n^2 \neq 0} F_{mn}(\xi) e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t} e^{i(mh_1+nh_2)} dt$$

то есть

$$u_1(\xi, t) = \sum_{m^2+n^2 \neq 0} F_{mn}(\xi) e^{i(mh_1+nh_2)} \frac{e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t} - 1}{i(m\omega_1 + n\omega_2)}.$$

Знаменатели отличны от нуля, но вот их значения и возможная «малость» могут вызывать серьезную озабоченность. В самом деле, насколько может отличаться выражение $m\omega_1 + n\omega_2$ от нуля или $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ от $-\frac{n}{m}$? Да как угодно мало! Так появляется проблема, известная как «проблема малых знаменателей».

2° Резонансный случай. Вернемся к обозначениям исходного примера $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \nu$, чтобы не писать переменные с индексами. Пусть существуют целые числа p и q , отличные от нуля, для которых выполняется равенство

$$p\omega + q\nu = 0 \text{ или } \frac{\omega}{\nu} = -\frac{q}{p},$$

то есть ω и ν соизмеримы. В этом случае говорят, что в системе имеет место резонанс. Тогда очевидно, что кроме нулевой гармоника ряда Фурье для $X_1(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ в среднее значение отправ-

ляются слагаемые для многих номеров m и n , удовлетворяющих условию (9)

$$p\omega + q\nu = m\omega + b\nu = 0,$$

то есть такие, для которых

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}.$$

Итак, среднее $\bar{X}_1(\xi)$ имеет вид

$$\bar{X}_1(\xi) = \sum_{m\omega+n\nu=0} F_{mn}(\xi)e^{i(mh_1+nh_2)},$$

и для функции u_1 получаем знакомую формулу

$$u_1(\xi, t) = \sum_{m\omega+n\nu \neq 0} F_{mn}(\xi)e^{i(mh_1+nh_2)} \frac{e^{i(m\omega+n\nu)t-1}}{i(m\omega + n\nu)}.$$

Проблема малых знаменателей опять предстает во всей своей «неприглядности». Поэтому переходим к следующему пункту.

2. Усреднение системы с двумя быстрыми фазами в резонансном случае. Фазовая расстройка. Будем считать, что условие резонанса (9) выполнено не точно, а приближенно в пределах погрешности порядка ε , то есть, что существуют также p и q , что имеет место оценка

$$\frac{1}{p}(p\omega + q\nu) = \omega + \frac{q}{p}\nu = \varepsilon\Delta, \Delta \sim 1.$$

Величину $\varepsilon\Delta$ называют расстройкой частот. Введем новые переменные

$$\varphi = \psi_1 + \frac{q}{p}\psi_2, \quad \beta = \frac{1}{p}\psi_2,$$

тогда

$$\psi_1 = \varphi - q\beta, \quad \psi_2 = p\beta.$$

Видно, что в силу системы (4) и формул (11)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{\psi}_1 + \frac{q}{p}\dot{\psi}_2 = \omega - \frac{\varepsilon}{a\omega}f \cos \psi_1 + \frac{q}{p}\nu = \left(\omega + \frac{q}{p}\nu\right) - \frac{\varepsilon}{a\omega}f \cos \psi_1 = \\ &= \varepsilon\Delta - \frac{\varepsilon}{a\omega}f \cos \psi_1, \end{aligned}$$

то есть φ является медленной переменной. Некоторое беспокойство могут вызвать появившиеся похожие обозначения. Просьба

не путать введенную сейчас медленную переменную φ с быстрыми переменными φ_i . Функцию φ называют фазовой расстройкой. В новых переменных α, φ, β система (4) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos(\varphi - q\beta), -a\omega \sin(\varphi - q\beta), p\beta) \sin(\varphi - q\beta), \\ \dot{\varphi} = \varepsilon \left[\Delta - \frac{1}{a\omega} f(a \cos(\varphi - q\beta), -a\omega \sin(\varphi - q\beta), p\beta) \cos(\varphi - q\beta) \right], \\ \dot{\beta} = \Omega, \text{ где } \varepsilon\Delta = \omega + \frac{q}{p}\nu, \Omega = \frac{1}{p}\nu \end{cases}$$

Проверить скобки!

или, короче,

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon X(a, \varphi, \beta), \\ \dot{\varphi} = \varepsilon(\Delta + \Psi(a, \varphi, \beta)), \\ \dot{\beta} = \Omega. \end{cases}$$

Таким образом, при сделанных предположениях о выполнении условий резонанса (10) с ε -погрешностью (говорят об « ε -окрестности резонанса») систему (4) удалось преобразовать к виду с одной быстрой фазой β и двумя медленными переменными — амплитудой a и фазовой расстройкой φ . Правые части (13) периодичны по фазе β и допускают обычное усреднение по периоду. Напомним, что в исходных переменных a, ψ_1, ψ_2 функция

$$-\frac{\varepsilon}{\omega} f(a \cos \psi_1, -a\omega \sin \psi_1, \psi_2) \sin \psi_1 = X(a, \psi_1, \psi_2)$$

разложима в двойной ряд Фурье по ψ_1 и ψ_2 , поэтому

$$\begin{aligned} X(a, \varphi, \beta) &= X(a, \varphi_1, \varphi_2)|_{\psi_1=\varphi-q\beta, \psi_2=p\beta} = \sum_{m,n} F_{mn}(a) e^{i(m\psi_1+n\psi_2)} = \\ &= \sum_{m,n} F_{mn}(a) e^{im\varphi} e^{i(np-mq)\beta}, \end{aligned}$$

значит,

$$\bar{X}(a, \varphi) = \sum_{np=mq} F_{mn}(a) e^{im\varphi}, \quad X - \bar{X} = \sum_{np \neq mq} F_{mn}(a) e^{im\varphi} e^{i(np-mq)\beta},$$

(φ — медленная переменная, которая при усреднении фиксируется так же, как и a).

В алгоритме усреднения систем с одной быстрой фазой существенную роль играли функции u_i и v_i , ограниченность которых обеспечивала нужную малость величине вида $\varepsilon u_1, \varepsilon v_1$ и

т.д. Эти функции вычисляются как интегралы от функций вида $X - \bar{X}$ (14) с нулевым средним:

$$u_1 = \frac{1}{\Omega} \int_0^\beta (X - \bar{X}) d\beta = \frac{1}{\Omega} \sum_{np \neq mq} F_{mn}(a) e^{im\varphi} \frac{e^{i(np-mq)\beta} - 1}{i(np-mq)}.$$

Видно, что условие $np - mq \neq 0$, то есть $\frac{m}{n} \neq \frac{p}{q}$ (p и q — фиксированные, m и n — номера членов ряда Фурье) может с ростом номеров m и n выполняться как угодно «слабо». Поэтому в высокочастотных гармониках с малыми коэффициентами Фурье $F_{mn}(a)$ могут встречаться и малые знаменатели. Вопрос: «Кто кого?». На практике можно прибегнуть к рецепту, приведенному в книге Н.Н. Боголюбова и Ю.А. Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (стр.168 изд.1958г., стр.200 изд.1974г.): «...чтобы не вдаваться в теоретико-числовые тонкости, целесообразно в практических применениях не доводить дело до появления бесконечных сумм гармонических слагаемых и отнести остаток ряда к высшим степеням ε . Иначе говоря, удобнее исходить из уравнения вида

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon f_1(y, \dot{y}, \nu t) + \varepsilon^2 f_2(y, \dot{y}, \nu t) + \varepsilon^3 \dots,$$

в котором f_1, f_2, \dots являются уже конечными суммами Фурье.» При этом, например, в рамках первого приближения участвует лишь функция f_1 , в которой m и n принимает уже ???

3. Стационарные резонансные режимы и их устойчивость. Стационарный резонансный режим системы (13) характеризуется постоянными значениями a_0 и φ_0 амплитуды a и расстройки φ , которые определяются как точки покоя усредненной системы

$$\begin{cases} \dot{a} = \varepsilon \bar{X}(\bar{a}, \bar{\varphi}), \\ \dot{\varphi} = \varepsilon (\Delta + \bar{\Psi}(\bar{a}, \bar{\varphi})), \end{cases}$$

(усреднение ведется по единственной быстрой фазе β).

Итак, чтобы найти (a_0, φ_0) , надо решить алгебраическую систему

$$\begin{cases} \bar{X}(\bar{a}, \bar{\varphi}) = 0, \\ \Delta + \bar{\Psi}(\bar{a}, \bar{\varphi}) = 0 \end{cases}$$

и получить (a_0, φ_0) — стационарные резонансные значения переменных a и φ . Для исследования точки покоя (a_0, φ_0) на

устойчивость, надо составить соответствующую (14) систему в вариациях

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta a}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{X}(a_0, \varphi_0)}{\partial a} \delta a + \varepsilon \frac{\partial \bar{X}(a_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} \delta \varphi, \\ \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{\Psi}(a_0, \varphi_0)}{\partial a} \delta a + \varepsilon \frac{\partial \bar{\Psi}(a_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} \delta \varphi. \end{cases}$$

Точка покоя $\delta a = 0, \delta \varphi = 0$ системы (16) асимптотически устойчива при выполнении известных требований. Корни p_k характеристического уравнения, соответствующего (14),

$$\det \|A - pE\| = \begin{vmatrix} \varepsilon \frac{\partial \bar{X}}{\partial a} - p & \varepsilon \frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \\ \varepsilon \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial a} & \varepsilon \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi} - p \end{vmatrix}_{(a_0, \varphi_0)} =$$

$$= p^2 - \varepsilon \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi} \right)_{(a_0, \varphi_0)} p + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial a} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial a} \right)_{(a_0, \varphi_0)} = 0,$$

должны иметь отрицательные вещественные части: $\text{Re} p_k < 0$.

Это имеет место при следующих условиях:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \bar{X}}{\partial a} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \varphi} \right|_{(a_0, \varphi_0)} < 0, \\ \left. \frac{\bar{X}}{\partial a} \frac{\partial \bar{X}}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial a} \right|_{(a_0, \varphi_0)} > 0, \end{cases}$$

(при вещественных отрицательных корнях p_k : $p_1 + p_2 < 0$, $p_1 p_2 > 0$; при $p_k = a \pm ib$, где $a < 0$, $p_1 + p_2 = 2a < 0$, $p_1 p_2 = a^2 + b^2 > 0$). Если выполнены условия (17), то, возвращаясь по формулам (3), (11) и (4) к исходной переменной y , находим устойчивый стационарный резонансный режим исходной колебательной системы.

Вспоминая, что в силу (3) $y = a \cos \psi_1$, в силу (11)

$$\psi_1 = \varphi - \frac{q}{p} \psi_2,$$

в силу (4)

$$\psi_2 = \nu t; \quad a = a_0, \quad \varphi = \varphi_0,$$

в первом приближении получаем

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= a \cos \psi_1 = a_0 \cos \left(\varphi_0 - \frac{q}{p} \psi_2 \right) = a_0 \cos \left(\varphi_0 - \frac{q}{p} \nu t \right) = \\ &= a_0 \cos \left[\left(\frac{q}{p} \nu \right) t - \varphi_0 \right],\end{aligned}$$

где (a_0, φ_0) — стационарные резонансные значения медленных переменных (a, φ) — решение системы (15).

Итак, устойчивый стационарный резонансный режим исходной системы (4) имеет вид

$$\tilde{y} = a_0 \cos \left[\left(\frac{q}{p} \nu \right) t - \varphi_0 \right].$$

Пример 1. Рассмотрим линейный осциллятор с затуханием, находящийся под воздействием внешней периодической силы

$$\ddot{y} = 2\varepsilon\lambda\dot{y} + \omega^2 y = \varepsilon 2E \sin \nu t.$$

Знание точного решения позволит, как и для предыдущих линейных примеров, сопоставить асимптотику точного решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ с результатами метода усреднения.

1) Точное решение. Будем искать режим установившихся колебаний на частоте ν вынуждающей силы в виде

$$y = a \cos(\nu t + \varphi), \quad a, \varphi = \text{const}, \quad \nu \neq \omega.$$

Форма решения выбрана удобной для сравнения с результатами метода усреднения. Подставляя (19) в уравнение (18) и переходя в правой части к аргументы $(\nu t + \varphi) \sin \nu t = \sin[(\nu t + \varphi) - \varphi]$, получаем

$$\begin{aligned}(-a\nu^2 + a\omega^2) \cos(\nu t + \varphi) - 2\varepsilon\lambda a \nu \sin(\nu t + \varphi) = \\ = 2\varepsilon E [\sin(\nu t + \varphi) \cos \varphi - \cos(\nu t + \varphi) \sin \varphi].\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos(\nu t + \varphi)$ и $\sin(\nu t + \varphi)$, получаем систему уравнений для определения a и φ :

$$a(\omega^2 - \nu^2) = -\varepsilon 2E \sin \varphi - 2\varepsilon\lambda a \nu = \varepsilon 2E \cos \varphi,$$

откуда

$$a^2 \left[(\omega^2 - \nu^2)^2 + (2\varepsilon\lambda\nu)^2 \right] = (2\varepsilon E)^2$$

и

$$\begin{cases} a = \frac{2\varepsilon E}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + (2\varepsilon\lambda\nu)^2}}, \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 - \nu^2}{2\varepsilon\lambda\nu}. \end{cases}$$

Напомним, что $y = a \cos(\nu t + \varphi)$, $a, \varphi = \text{const}$.

2) Асимптотика точного решения вблизи основного резонанса. Положим $\omega - \nu = \varepsilon\Delta$ (ε -окрестность основного резонанса). При этом условии мы будем ниже исследовать нашу систему методом усреднения Тогда

$$\nu = \omega - \varepsilon\Delta, \quad \omega^2 - \nu^2 = (\omega + \nu)(\omega - \nu) = (2\omega - \varepsilon\Delta)\varepsilon\Delta.$$

Заменяя ν на $\omega - \varepsilon\Delta$, **находим ???**

В ε -окрестности основного резонанса имеем $\omega - \nu = \varepsilon\Delta$ (частный случай общего $p\omega + q\nu = \varepsilon\Delta$ для $p = 1$, $q = -1$.) Введем фазовую расстройку $\varphi = \psi_1 - \psi_2$. Получаем систему с двумя медленными переменными a и φ и одной быстрой фазой $\beta = \frac{1}{p}\psi_2 = \psi_2$ (при этом преобразуем правые части для удобства последующего усреднения)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\varepsilon\lambda a[1 - \cos 2(\beta + \varphi)] - \varepsilon \frac{E}{\omega} [\cos \varphi - \cos(2\beta + \varphi)],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varepsilon\Delta - \varepsilon\lambda \sin 2(\beta + \varphi) - \varepsilon \frac{E}{a\omega} [-\sin \varphi + \sin(2\beta + \varphi)],$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \nu$$

(в преобразовании системы (21) использовались соотношения $\psi_2 = \beta$, $\psi_1 = \varphi + \psi_2 = \beta + \varphi$). Усредняя по фазе β , находим усредненную систему первого приближения

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = -\varepsilon\lambda \bar{a} - \varepsilon \frac{E}{\omega} \cos \bar{\varphi}, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \varepsilon\Delta + \varepsilon \frac{E}{a\omega} \sin \bar{\varphi}, \end{cases}$$

Систему для определения стационарных резонансных значений переменных (a_0, φ_0) получаем, приравняв нулю правые части системы (23):

$$\begin{cases} -\lambda a_0 - \frac{E}{\omega} \cos \varphi_0 = 0, \\ \Delta + \frac{E}{a_0\omega} \sin \varphi_0 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda a_0 = -\frac{E}{\omega} \cos \varphi_0, \\ a_0 \Delta = -\frac{E}{\omega} \sin \varphi_0, \end{cases}$$

откуда $(\lambda^2 + \Delta^2) a_0^2 = \frac{E^2}{\omega^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\Delta}{\lambda}$ и в первом приближении имеем

$$\begin{cases} a_0 = \frac{E}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \Delta^2}}, \\ \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\Delta}{\lambda}. \end{cases}$$

Сравнивая асимптотику (20) точного решения с формулами (25) видим, что верны ожидавшиеся оценки первого приближения метода усреднения

$$a - a_0 = O(\varepsilon), \quad \varphi - \varphi_0 = O(\varepsilon).$$

Итак, стационарный резонансный режим, найденный методом усреднения имеет вид $\tilde{y} = a_0 \cos \psi_1$, где $\psi_1 = \varphi_0 + \beta$, $\beta = \nu t$ или окончательно

$$\tilde{y} = a_0 \cos(\nu t + \varphi_0).$$

Напомним, что при условии $p\omega + q\nu = \varepsilon\Delta$ решение \tilde{y} в общем виде было:

$$\tilde{y} = a_0 \cos\left(\frac{q}{p}\nu t - \varphi_0\right).$$

В рассматриваемом примере $p = 1, q = -1$. Сравнивая \tilde{y} с точным y из (19) при $a - a_0 = O(\varepsilon)$ $\varphi - \varphi_0 = O(\varepsilon)$, получаем $y - \tilde{y} = O(\varepsilon)$.

Найдем условия устойчивости полученного стационарного резонансного режима. Система в вариациях для усредненной системы первого приближения (23):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\delta a)}{\partial t} = (-\varepsilon\lambda)\delta a + \left(\varepsilon\frac{E}{\omega} \sin \bar{\varphi}\right) \delta\varphi, \\ \frac{\partial(\delta\varphi)}{\partial t} = \left(-\varepsilon\frac{E}{a_0^2\omega} \sin \bar{\varphi}\right) \delta a + \left(\varepsilon\frac{E}{a_0\omega} \cos \bar{\varphi}\right) \delta\varphi, \end{array} \right|_{\bar{a}=a_0, \bar{\varphi}=\varphi_0.}$$

Характеристическое уравнение $\det \|A - pE\| = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} -\varepsilon\lambda - p\varepsilon\frac{E}{\omega} \sin \varphi_0 \\ -\varepsilon\frac{E}{a_0^2\omega} \sin \varphi_0 - \varepsilon\frac{E}{a_0\omega} \cos \varphi_0 - p \end{cases} = 0$$

или

$$p^2 - \underbrace{\varepsilon \left(\frac{E}{a_0 \omega} \cos \varphi - \lambda \right)}_{<0} p + \underbrace{\varepsilon^2 \left(-\frac{e\lambda}{a_0 \omega} \cos \varphi_0 + \frac{E^2}{a_0^2 \omega^2} \sin^2 \varphi_0 \right)}_{>0} = 0$$

Условия устойчивости — условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения:

$$\begin{cases} \frac{E}{a_0 \omega} \cos \varphi_0 - \lambda < 0, \\ -\frac{E\lambda}{a_0 \omega} \cos \varphi_0 + \frac{E^2}{a_0^2 \omega^2} \sin^2 \varphi_0 > 0, \end{cases}$$

Здесь (a_0, φ_0) удовлетворяют системе (24):

$$\begin{cases} \lambda a_0 = -\frac{E}{\omega} \cos \varphi_0, \\ a_0 \Delta = -\frac{E}{\omega} \sin \varphi_0, \end{cases}$$

Подставляя из уравнения (24₁) $\frac{E}{a_0 \omega} \cos \varphi_0 = -\lambda$ в условие (26₁), находим

$$-\lambda - \lambda < 0,$$

откуда имеем условие на λ : $\lambda > 0$, (что, естественно, ожидали).

Подставляя $-\lambda = \frac{E}{a_0 \omega} \cos \varphi_0$ в неравенство (26₂), получаем всегда выполняющееся неравенство

$$\frac{E^2}{a_0^2 \omega^2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{E^2}{a_0^2 \omega^2} \sin^2 \varphi_0 > 0.$$

Итак, при $\lambda > 0$ точка такая $\delta a = 0, \delta \varphi = 0$ системы в вариациях для усредненной системы асимптотически устойчива, а значит, стационарный резонансный режим $\tilde{y} = a_0 \cos(\nu t + \varphi_0)$ асимптотически устойчив для (a_0, φ_0) , определяемых системой (24).

Режим, отвечающий колебаниям на частоте внешней силы называют синхронным стационарным резонансным режимом.

§ 5. Замечания о системах со многими быстрыми переменными

Выше были рассмотрены системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi), \\ \dot{\psi} = \omega + \varepsilon \Psi(x, \psi) \end{cases}$$

с одной или двумя быстрыми фазами ψ и периодически по ψ правыми частями. В случае одной быстрой переменной ψ усредненная система первого приближения имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}(\bar{x}),$$

где

$$\bar{X}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, \psi) d\psi.$$

В случае двух быстрых переменных $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ в нерезонансном случае усредненная система первого приближения имеет вид

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}(\bar{x}),$$

где

$$\bar{X}(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, \psi_1, \psi_2) d\psi_1 d\psi_2.$$

При двух быстрых переменных в резонансном случае число медленных переменных увеличивается на единицу (появляется новая медленная переменная — фазовая расстройка φ). Таким образом и в случае резонанса в первом приближении исследование медленных переменных осуществляется с помощью системы типа

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}(\bar{x}), \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \varphi)$$

В частности, стационарные резонансные значения переменных \bar{x} и расстройки φ определяются как координаты точки покоя системы (4), то есть как решение алгебраической системы

$$\bar{X}(\bar{x}) = 0, \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \varphi)$$

В общем случае система с несколькими быстрыми фазами имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \psi), \\ \dot{\psi} = \omega + \varepsilon \Psi(x, \psi), \end{cases}$$

$x = (x_1, \dots, x_n), \psi = (\psi_1, \dots, \psi_m), \omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$. Условие резонанса имеет вид

$N\omega = 0, N = (n_1, \dots, n_m) \neq 0$, где N - вектор с целочисленными координатами.

Таких векторов может быть много

$$N_j \omega = 0, j = 1, 2, \dots$$

Ранг матрицы координат любого количества векторов, удовлетворяющих (6), не превосходит $m - 1$, так как условие (6) означает, что между столбцами такой матрицы существует линейная зависимость (в левой части (6) - скалярное произведение столбцов матрицы векторов N_j на вектор ω)

Пусть этот ранг равен $r \leq m - 1$.

Под окрестностью резонанса (или резонансов) будем понимать случай, когда для базисных векторов $N_j, j = 1, \dots, r$ выполнены условия

$$N_j \omega = \varepsilon \Delta_j, j = 1, \dots, r,$$

величины $\varepsilon \Delta_j$ опять назовем расстройками частот. Соответственно появляются фазовые расстройки

$$\varphi_j = N_j \varphi, j = 1, \dots, r,$$

для которых имеем в силу системы (5)

$$\dot{\varphi}_i = N_j \dot{\psi} = N_j(\omega + \varepsilon \Psi) = n_j \omega + \varepsilon N_j \Psi = \varepsilon(\Delta_j + N_j \Psi).$$

Таким образом, система (5) сводится к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, \varphi, \beta), \\ \dot{\psi} = \varepsilon \Delta + \varepsilon \Psi(x, \varphi, \beta), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r), \\ \dot{\beta} = \Omega + \varepsilon B(x, \varphi, \beta), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-r}), \end{cases}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ - вектор фазовых расстроек, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m-r})$ - вектор быстрых фаз, таких, что между их частотами $\Omega_1, \dots, \Omega_{m-r}$ уже нет линейной зависимости с целочисленными коэффициентами:

$$N\Omega \neq 0, N = (n_1, \dots, n_{m-r}).$$

Значит, в системе (7) резонанс исключен, число медленных переменных увеличилось на r , а усреднение производится по оставшимся $m - r$ быстрым переменным β

Итак, исследование резонансного случая всегда приводит к усредненным системам более высокой размерности.

В заключение упомянем системы наиболее общего вида с медленными и быстрыми переменными:

$$\begin{cases} \dot{x} = \varepsilon X(x, y, t), \\ \dot{y} = Y_0(x, y, t) + \varepsilon Y_1(x, y, t), \end{cases}$$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_m)$. Они являются обобщением систем с несколькими быстрыми фазами.

При $\varepsilon = 0$ получаем порождающую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{const}, \\ \dot{y} = Y_0(x, y, t), \end{cases}$$

Частными случаями второго уравнения в (9) были $\dot{t} = 1$ в стан-

дартной системе и $\psi = \omega$ в системе с одной или несколькими быстрыми фазами ψ . Усреднение в этих двух рассмотренных случаях велась, как говорят, «вдоль траекторий порождающей (или вырожденной) системы».

Построение асимптотики для системы (8) основывается на замене переменных

$$x = \xi + \varepsilon u_1(\xi, \eta, t) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta, t) + \varepsilon^3 \dots,$$

$$y = \eta + \varepsilon v_1(\xi, \eta, t) + \varepsilon^2 v_2(\xi, \eta, t) + \varepsilon^3 \dots,$$

где ξ и η определяются усредненной системой

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \varepsilon^3 \dots, \\ \dot{\eta} = Y_0(\xi, \eta, t) + \varepsilon B_1(\xi) + \varepsilon^2 B_2(\xi) + \dots, \end{cases}$$

достоинством которой опять является разделение медленных и быстрых переменных. Понятно, что теперь быстрые η , находятся не квадратурами, а «накручиваются» на решение порождающей системы (9). Среднее значение вдоль траектории порождающей системы имеет вид (например, для $A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi)$)

$$\bar{X}_1 = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T X_1(\xi, \varphi(x, y_0, t_0, t), t) dt.$$

Это можно опять понять по виду уравнения для u_1 ,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} Y_0(\xi, \eta, t) = X_1(\xi, \eta, t) - \bar{X}_1(\xi),$$

что в координатах для векторов $\eta = (\eta, \dots, \eta_m)$, $Y_0 = (Y_0^{(1)}, \dots, Y_0^{(m)})$

вычисляют так

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} Y_0^{(1)}(\xi, \eta, t) + \frac{\partial u_1}{\partial \eta_2} Y_0^{(2)}(\xi, \eta, t) + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial \eta_m} Y_0^{(m)}(\xi, \eta, t) = X_1(\xi, \eta, t) - \bar{X}_1(\xi)$$

Первые m уравнений характеристик

$$\frac{d\eta_1}{dt} = Y_0^{(1)}, \dots, \frac{d\eta_m}{dt} = Y_0^{(m)}, \frac{du_1}{dt} = X_1(\xi, \eta, t) - \bar{X}_1(\xi)$$

определяют решение $y = \varphi(x, y_0, t_0, t)$ порождающей системы, а требование ограниченности функции u_1 заставляет интегрировать в последнем уравнении (10) функцию с нулевым средним.

Итак, участниками доказательства теоремы о первом приближении, опять дающей приближение только для медленных переменных x , становятся

$$A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi)$$

и

$$u_1 = \int_0^t (X_1(\xi, \eta, t) - \bar{X}_1(\xi))|_{\eta=\varphi(\xi, y_0, t_0, t)} dt$$

Результатом этой теоремы будет малость $x - \xi$ на большом промежутке времени $\Delta t \sim \frac{1}{\varepsilon}$.

В заключение рассмотрим замечательную задачу, ставшую классикой теории колебаний и метода усреднения.

§6 Маятник с вибрирующей точкой подвеса. [1]

Движение маятника с вертикально вибрирующей точкой подвеса эквивалентно движению маятника с покоящейся точкой подвеса, находящемуся в поле «силы тяжести» с ускорением

$$g + \ddot{y}, \text{ где } y = a \sin \omega t, \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t$$

Замена g на $g + \ddot{y}$ приводит к уравнению

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \frac{d\theta}{dt} + \frac{g - a\omega^2 \sin \omega t}{l} \sin \theta = 0$$

1° Ограничение на λ следует из условия затухания малых колебаний при отсутствии вибрации точки подвеса ($a = 0$). Для "малых" колебаний ($\sin \theta \approx \theta$) получаем уравнение

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \omega_0^2 = \frac{g}{l}.$$

Отметим одинаковую размерность λ и ω_0 :

$$[\lambda] = [\omega_0] = \left[\frac{1}{\text{сек}} \right]$$

Характеристическое уравнение для уравнения (2) имеет вид

$$k^2 + \lambda k + \omega_0^2 = 0,$$

откуда

$$k = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}.$$

Затухающие колебания возможны, если $\lambda > 0$ и $D = \lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$,

откуда

$$0 < \lambda < 2\omega_0$$

2° Выбор малого параметра. Будем полагать амплитуду колебаний точки подвеса a малой по сравнению с l , а частоту ω этих колебаний большой по сравнению с ω_0 .

Пусть $\frac{a}{l} = \varepsilon$, $\frac{\omega_0}{\omega} \sim \varepsilon$,

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

3° Переход к безразмерным переменным.

Пусть $\tau = \omega t$ - безразмерное время (здесь τ не путать с распространенным обозначением τ как «медленного времени»)

$$\text{Тогда } \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{d}{d\tau}, \frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$$

Введем еще два безразмерных параметра k и α .

Полагая $\frac{\omega_0}{\omega} = k\varepsilon$ и учитывая, что $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ и $\varepsilon = \frac{a}{l}$, находим

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \left(\frac{g}{l} \right) \frac{1}{\omega^2} = k^2 \left(\frac{a}{l} \right)^2, \text{ откуда } k^2 = \frac{gl}{a^2 \omega^2}$$

Полагая $\frac{\lambda}{\omega} = 2\alpha\varepsilon$ (опять в силу "большой" частоты ω) и учитывая, что $\varepsilon = \frac{a}{l}$, получаем $\frac{\lambda}{\omega} = 2\alpha\left(\frac{a}{l}\right)$, откуда $\alpha = \frac{\lambda l}{2a\omega}$

Так как $0 < \lambda < 2\omega_0$, то $\frac{\lambda}{\omega} < 2\frac{\omega_0}{\omega} = 2k\varepsilon$.

Значит, $2\alpha\varepsilon < 2k\varepsilon$ и $\alpha < k$.

Перейдем в уравнении (1) к безразмерному времени τ .

Умножая (1) на $\frac{1}{\omega^2}$ и используя формулы (3), получаем

$$\frac{1}{\omega^2}(\omega^2 \frac{d^2\theta}{d\tau^2}) + \frac{1}{\omega^2}\lambda(\omega \frac{d\theta}{d\tau}) + [\frac{(\frac{g}{l})}{\omega^2} - \frac{a\omega^2}{l\omega^2} \sin\tau] \sin\theta = 0$$

Учитывая, что $\frac{\lambda}{\omega} = 2\alpha\varepsilon$, $\frac{(\frac{g}{l})}{\omega^2} = k^2\varepsilon^2$ и $\frac{a\omega^2}{l\omega^2} = \frac{a}{l} = \varepsilon$,

Находим уравнение (1) в безразмерных переменных и коэффициентах:

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2\varepsilon\alpha \frac{d\theta}{d\tau} + (k^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin\tau) \sin\theta = 0$$

4^o Приведение к системе в стандартной форме

Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} \theta = \varphi - \varepsilon \sin\tau \sin\varphi, \\ \frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon\Omega - \varepsilon \cos\tau \sin\varphi, \end{cases}$$

приводящую от пары $(\theta, \frac{d\theta}{d\tau})$ к паре (φ, Ω)

Дифференцируя (5₂) в силу уравнения (4) получаем

$$\varepsilon \frac{d\Omega}{d\tau} + \varepsilon \sin\tau \sin\varphi - \varepsilon \cos\tau \cos\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} = -(k^2\varepsilon^2 - \varepsilon \sin\tau) \sin\theta - 2\varepsilon\alpha \frac{d\theta}{d\tau}$$

Раскрывая скобки в правой части (7) и подставляя $\sin\theta$ в силу (5₁)

$$\sin\theta = \sin(\varphi - \varepsilon \sin\tau \sin\varphi) \text{ и } \frac{d\theta}{d\tau} \text{ в силу (5}_2\text{)}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon\Omega - \varepsilon \cos\tau \sin\varphi,$$

имеем

$$\varepsilon \frac{d\Omega}{d\tau} = \varepsilon \cos\tau \cos\varphi \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon \sin\tau [\sin(\varphi - \varepsilon \sin\tau \sin\varphi) - \sin\varphi] - - k^2\varepsilon^2 \sin(\varphi - \varepsilon \sin\tau \sin\varphi) - 2\varepsilon\alpha(\varepsilon\Omega - \varepsilon \cos\tau \sin\varphi)$$

Сокращая на ε и подставляя $\frac{d\varphi}{d\tau}$ в (8) в силу (6)

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\varepsilon\Omega}{1 - \varepsilon \sin\tau \cos\varphi}$$

находим

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\tau} = [\sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - \sin \varphi] \sin \tau - k^2 \varepsilon \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) + \frac{\varepsilon \Omega}{1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi}, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\varepsilon \Omega}{1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi}, \end{cases}$$

В правых частях системы (9) проведем разложения по степеням ε :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \Omega}{1 - \varepsilon \sin \tau \cos \varphi} &= \varepsilon \Omega + O(\varepsilon^2), \\ \sin(\varphi - \varepsilon \sin \tau \sin \varphi) &= \sin \varphi \cos(\varepsilon \sin \tau \sin \varphi) - \cos \varphi \sin(\varepsilon \sin \tau \sin \varphi) = \\ &= \sin \varphi (1 + O(\varepsilon^2)) - \cos \varphi (\varepsilon \sin \tau \sin \varphi + O(\varepsilon^3)) = \sin \varphi - \\ &- \varepsilon \sin \tau \cos \varphi \sin \varphi + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

С учетом этих результатов система (9) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\tau} = \varepsilon(-\sin^2 \tau \sin \varphi \cos \varphi - k^2 \sin \varphi + \Omega \cos \tau \cos \varphi - 2\alpha \Omega + 2\alpha \cos \tau \sin \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon \Omega + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

Получена система в стандартной форме для переменных φ и Ω .

5° Усредненная система первого приближения.

Усредняя правые части (10) по переменной τ , имеем

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \varepsilon \bar{\Omega}, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{d\tau} = -\varepsilon \left[\frac{1}{2} \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} + k^2 \sin \bar{\varphi} + 2\alpha \bar{\Omega} \right], \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \varepsilon \bar{\Omega}, \\ \frac{d\bar{\Omega}}{d\tau} = -\varepsilon \left[-2\alpha \bar{\Omega} - \sin \varphi \left(k^2 + \frac{1}{2} \cos \bar{\varphi} \right) \right], \end{cases}$$

6° Точки покоя усредненной системы (11) первого приближения.

Приравнивая нулю правые части системы (11), находим:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = 0, \\ -2\alpha \bar{\Omega} - \sin \varphi \left(k^2 + \frac{1}{2} \cos \bar{\varphi} \right) = 0, \end{cases}$$

Система (12) имеет три точки покоя

- 1) $(\bar{\Omega}_1 = 0, \bar{\varphi}_1 = 0)$
- 2) $(\bar{\Omega}_2 = 0, \bar{\varphi}_2 = \arccos(-2k^2))$
- 3) $(\bar{\Omega}_3 = 0, \bar{\varphi}_3 = \pi)$

Ясно, что для существования $\bar{\varphi}_2$ между $\bar{\varphi}_1 = 0$ и $\bar{\varphi}_3 = \pi$ условие $|-2k^2| < 1$, то есть $k < \frac{1}{2}$

Тогда график левой части второго из уравнений (12) при $\bar{\Omega} = 0$ имеет вид

и точка $\bar{\varphi}_3 = \pi$ будет устойчивой.

7° Устойчивость верхнего положения равновесия.

Пусть $\bar{\varphi} = \pi + \delta\varphi$, $\bar{\Omega} = 0 + \delta\Omega$

Система в вариациях для системы (11) в точке $(0; \pi)$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d(\delta\varphi)}{d\tau} = 0 \cdot \delta\varphi + \varepsilon\delta\Omega, \\ \frac{d(\delta\Omega)}{d\tau} = \varepsilon(k^2 - \frac{1}{2})\delta\varphi - \varepsilon \cdot 2\alpha \cdot \delta\Omega, \end{cases}$$

Для нее получаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 0 - p & \varepsilon \\ \varepsilon(k^2 - \frac{1}{2}) & -\varepsilon 2\alpha - p \end{vmatrix} = 0$$

или

$$p^2 + \varepsilon 2\alpha p + \varepsilon^2(\frac{1}{2} - k^2) = 0.$$

Это уравнение обеспечивает устойчивые точки покоя $(0; \pi)$, если $Re p_i < 0$, что будет выполнено при условиях $2\alpha > 0$, $\frac{1}{2} - k^2 > 0$

Первое условие ожидаемо из связи $\frac{\lambda}{\omega} = 2\alpha\varepsilon$, а второе уже знакомо нам из качественных соображений.

8° Назад к физике

Вспоминая, что

$$k^2 = \frac{gl}{a^2\omega^2} = \frac{(\frac{g}{l})(\frac{l}{a})^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}(\frac{l}{a})^2$$

имеем из условия $k^2 < \frac{1}{2}$, что

$$(\frac{\omega_0}{\omega})^2(\frac{l}{a})^2 < \frac{1}{2},$$

откуда

$$\omega > \omega_0(\frac{l}{a})\sqrt{2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Итак, если частота вибрации достаточно велика, то верхнее положение равновесия маятника становится устойчивым.

Пусть $l = 40\text{см}$, $a = 2\text{см}$. [1]

$$\omega > \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{981}{40}} \cdot 20 \approx 140 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$$

Верхнее положение равновесия такого маятника устойчиво,

если точка подвеса совершает более $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{140 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}}{2\pi \text{ рад}} \approx 22.3$ колебаний в секунду

Напоминание:

$$\text{Период } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\text{рад}}{\text{рад} \setminus \text{сек}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \left[\frac{\text{рад}}{\text{сек}} \right] - \text{круговая частота}$$

Обычная частота

$n = \frac{1}{T}$ - число периодов в секунду

то есть $n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

В заключение отметим, что наиболее существенной деталью приведенного исследования был выбор преобразования, приводящего к системе в стандартной форме.

Про эту замену в книге Н.Н.Боголюбова и Ю.А.Митропольского «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» скромно говорится:

«Как оказывается, посредством простой замены переменных рассматриваемое дифференциальное уравнение второго порядка может быть преобразовано к двум уравнениям первого порядка в стандартной форме.»

Маятник с вибрирующей точкой подвеса часто называют маятником Капицы, хотя встречается и другое название: маятник Стефенсона-Капицы. Приведем некоторые литературные сведения, представляя читателю самому определять приоритеты и названия этой знаменитой задачи.

Одна из аналогичных цитат:

«Задачу о перевернутом маятнике с вибрирующей точкой подвеса принято называть задачей Капицы. В его работах на основе приближенного решения теоретически обосновано, что начиная с некоторой определенной частоты вертикальных колебаний точки подвеса, маятника становится устойчивым в верхнем своем положении. Более того, Капица предложил механическую конструкцию для демонстрации описанного эффекта, получив тем самым экспериментальное подтверждение своего результата. Однако, задолго до Капицы в 1908 году английский математик А.Стефенсон также рассматривал такую задачу.»

Некоторые авторы называют также работу Н.Н.Боголюбова:

«Явление стабилизации верхнего положения маятника при быстрых вертикальных вибрациях точки подвеса было открыто А.Стефенсоном. (1908)... Нелинейная, теория была развита Н.Н.Боголюбовым

(1950), который использовал метод усреднения, и П.Л.Капицей (1951), который развивал метод разделения медленных и быстрых движений.»

Итак, с Эндрю Стефенсоном все ясно: «стоял у колыбели» красивой задачи (не путать с Джорджем Стефенсоном -

изобретателем паровоза).

Но заочное соперничество двух великих ученых Н.Н.Боголюбова и П.Л.Капицы продолжается и в современной научной литературе.

Приведем две ссылки и даже цитаты из двух авторитетных руководств.

М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков «Введение в теорию колебаний и волн», М.Наука,1984.

Стр.188,п.11.4 ... "Маятник Капицы"... (в заголовке)

Стр.189:"Впервые этот результат был получен в 1951 году П.Л.Капицей и применен к расчету маятника с быстро вибрирующим подвесом"

Ссылки на работы П.Л.Капицы в указанной книге:

[13]. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. - ЖЭТФ, 1951,т.21,с.598-607.

[14] Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом - УФН, 1951,т.44,с.7-20.

Ю.А.Митропольский «Метод усреднения в нелинейной механике», Киев «Наукова Думка», 1971.

Стр.76:«Этот пример рассмотрен Н.Н.Боголюбовым еще в 1942 г. задолго до опубликования П.Капицей статьи, посвященной близкому вопросу, под названием «Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса» (ЖЭТФ, т.21,вып.5,1951).

Однако рукопись под названием "Теория возмущений в нелинейной механике содержащая этот изящный пример,увидела свет лишь в 1950г."

Ссылка на работу Н.Н.Боголюбова в указанной книге

[14] Боголюбов Н.Н. Теория возмущений в нелинейной механике. - Ст.Ин-та строит.механики АН УССР, 1950, 14, с.9-34.

Выше мы изложим способ Н.Н.Боголюбова согласно [1], основанный на методе усреднения и предложенной им «простой замене переменных»

В цитированной книге М.И.Рабиновича и Д.И.Трубецкова приведен другой путь получения П.Л.Капицей этого результата. Такова вкратце история великой задачи. Из книги М.И.рабинович «Д.И.Трубецкова стоит привести схему экспериментальной реализации такого маятника по упомянутой статье П.Л.Капицы [13]:

«Схема прибора для опытов с маятником Капицы: на оси электромотора (1) от швейной машинки (число оборотов от 4000

до 6000 мин^{-1}) эксцентрично насажен шариковый подшипник (2), к обойме которого присоединена тяга (3); она приводит в колебание рычаг (4), один конец которого вращается в неподвижной опоре; на другой конец рычага подвешивается стержень маятника (5) ($L \sim 15 \text{ см}$) так, чтобы он свободно качался ($a \sim 3\text{-}4 \text{ мм}$)
(a - амплитуда вибраций конца рычага)

П.Л.Капица: «Когда прибор приведен в действие, то стержень маятника ведет себя так, как будто для него существует особая сила, направленная по оси колебания подвеса. Поскольку частота колебаний подвеса велика, то изображение стержня маятника воспринимается глазом несколько размыто, и колебательное движение незаметно. Поэтому явление устойчивости производит неожиданное впечатление. Если маятнику сообщить толчок в сторону, то он начинает качаться как обычный маятник... эти колебания затухают и маятник приходит в вертикальное положение» [13].

Таков знаменитый маятник Стефенсона–Боголюбова–Капицы.

Список литературы

1. Боголюбов Н.Н, Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: Наука, 1974.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М: Высшая школа, 1990.
3. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М: Изд-во МГУ, 1971.
4. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.