МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.Ф. Бутузов

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Учебное пособие

Москва
2015

Предисловие

Учебное пособие предназначено как для студентов, так и для преподавателей, ведущих семинарские занятия по математическому анализу. Его содержание относится к разделу ”Числовые ряды. Функциональные последовательности и ряды”, не вошедшему в известное учебное пособие ”Математический анализ в вопросах и задачах” (авторы В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин). Структура данного пособия такая же, как и структура глав в упомянутом учебном пособии. Каждый параграф разбит на четыре пункта: ”Основные понятия и теоремы”, где даются определения и приводятся (без доказательства) основные теоремы; ”Контрольные вопросы и задания”, способствующие усвоению основных понятий; ”Примеры решения задач” (начало и конец решения каждой задачи отмечены знаками $\triangle$ и $\blacktriangle$) и ”Задачи и упражнения для самостоятельной работы” (в конце пособия приведены ответы и указания к задачам этих пунктов).

Автор признателен Е.А. Михайловой за компьютерный набор текста пособия.

Рекомендовано Советом отделения прикладной математики в качестве пособия для студентов физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, обучающихся по направлениям «физика» и «астрономия».

§1. Понятие числового ряда. Критерий Коши сходимости числового ряда

Основные понятия и теоремы

1. Сходимость и сумма ряда. Под словом ряд в математическом анализе понимают сумму бесконечного числа слагаемых. Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ и образуем формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Назовём это выражение *числовым рядом* (или просто рядом), а числа a_k – *членами ряда.*

Сумма первых n членов ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *частичной суммой* (n-ой частичной суммой) ряда.

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм.

При этом число

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

называется *суммой ряда.* Пишут: $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Если же последовательность частичных сумм ряда расходится, то ряд называется *расходящимся.*

Теорема 1. *Если ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходятся, и их суммы равны соответственно S^A и S^B, то для любых чисел α и β ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$$

сходится, и его сумма равна $\alpha S^A + \beta S^B$.

2. Критерий Коши сходимости числового ряда

Теорема 2 (критерий Коши). *Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0$ существует номер N, такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то* $a_k \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Следствие 2. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то для любого* n *ряд* $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *сходится и* $r_n \to 0$ *при* $n \to \infty$
(r_n называется *остатком* n *- го порядка* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$).

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, что называется числовым рядом.

2. Сформулируйте определение сходящегося числового ряда. Что называется суммой ряда?

3. В каком случае ряд называется расходящимся? Может ли расходящийся ряд стать сходящимся, если из него удалить конечное число членов?

4. Может ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ быть сходящимся, если:
а) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится?
б) ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходятся?

5. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда.

6. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.

Примеры решения задач

1. Исследовать, для каких значений q ряд

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \qquad (2)$$

сходится и для каких – расходится.

$\triangle$ Вычислим частичную сумму ряда при $q \neq 1$, используя формулу суммы членов геометрическй прогрессии:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. Таким образом, если $|q| < 1$, то ряд (2) сходится, и его сумма S выражается формулой $S = \frac{1}{1-q}$.

Если $|q| > 1$, то $\{q^n\}$ и также $\{S_n\}$ являются бесконечно большими последовательностями, поэтому ряд (2) расходится.

Если $q = 1$, то ряд (2) принимает вид

$$1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots ,$$

следовательно, $S_n = n$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ и, значит, ряд расходится.

Если $q = -1$, то ряд (2) имеет вид

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + 1 - 1 + \cdots .$$

Последовательность его частичных сумм

$$\{S_n\} = 1, 0, 1, 0, \cdots, 1, 0, \cdots$$

явлется расходящейся, поэтому ряд расходится.

Итак, ряд (2) сходится, если $|q| < 1$, и расходитя, если $|q| \geq 1$.▲

2. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \tag{3}$$

(он называется *гармоническим рядом*) расходится.

△ Сгруппируем члены ряда следующим образом:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots .$$

Сумма дробей в каждой из круглых скобок больше $\frac{1}{2}$, откуда следует, что последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда (3) является бесконечно большой: $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, и, значит, гармонический ряд расходится.▲

3. Исследовать, для каких значений α ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

сходится и для каких - расходится.

△ Рассмотрим частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Если $\alpha > 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = 0$, поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, т.е. при $\alpha > 0$ ряд сходится, и его сумма равна 1.

Если $\alpha < 0$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \infty$, поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует, т.е. при $\alpha < 0$ ряд расходится.

Если $\alpha = 0$, то все члены ряда равны нулю $\left(\frac{1}{\kappa^0} - \frac{1}{(\kappa+1)^0} = 1 - 1 = 0\right)$, поэтому ряд сходится и его сумма равна нулю. ▲

4. Доказать, что ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\kappa!} \tag{4}$$
сходится для любого x, и найти его сумму.

△ Вспомним формулу Маклорена для функции e^x:
$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{\kappa!}+R_{n+1}(x),$$
где $R_{n+1}(x)$ – остаточный член, причём $R_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$ (для любого x). Сумма $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{\kappa!}$ является частичной суммой данного ряда (4), и так как $\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$, то $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=e^x$.

Таким образом, для любого x данный ряд сходится, и
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\kappa!}=e^x.\blacktriangle$$

5. С помощью критерия Коши доказать, что ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots \tag{5}$$
сходится.

△ Сначала получим оценку для величины
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|,$$
фигурирующей в критерии Коши (см. (1)). Для ряда (5) эта величина (обозначим её $|S_{np}|$) имеет вид
$$\left|S_{np}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\right|=\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n+2}+\dots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n+p-1}\frac{1}{n+p}\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\dots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|.$$

Если число p – чётное, то
$$S_{np}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)>0,$$
поскольку разность двух дробей в каждой из круглых скобок положительна.

С другой стороны,
$$S_{np}=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\dots-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, если p – чётное число, то $0<S_{np}<\frac{1}{n+1}$.

Если число p – нечётное, то

$$S_{np} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) + \frac{1}{n+p} > 0,$$

а с другой стороны

$$S_{np} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) < \frac{1}{n+1}.$$

Итак, в любом случае

$$0 < S_{np} < \frac{1}{n+1},$$

и, следовательно, $|S_{np}| < \frac{1}{n+1}$ для любого $p \in \mathbb{N}$.

Зададим теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмём номер N столь большим, что $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Тогда $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ получим неравенства

$$|S_{np}| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}\Big| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon,$$

т.е. $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство (1) из теоремы 2. По теореме 2 ряд (5) сходится.▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Приведите пример числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, у которого $a_k \to 0$ при $k \to \infty$, но ряд расходится (тем самым будет доказано, что условие $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ является только необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда).

2. Докажите, что если ряд расходится, то и его остаток любого порядка расходится.

3. Докажите, что следующие ряды сходятся (используя определение сходящегося ряда), и найдите их суммы:

$$\textbf{а)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}; \quad \textbf{б)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}; \quad \textbf{в)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)};$$

$$\textbf{г)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}; \quad \textbf{д)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

4. Докажите сходимость рядов из упражнения 3 с помощью критерия Коши.

5. Докажите, что следующие ряды сходятся для указанных значений x, и найдите их суммы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad -1 < x \leq 1.$$

§2. Ряды с положительными членами

Основные понятия и теоремы

1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *рядом с положительными членами*, если все его члены неотрицательны, т.е. $a_k \geq 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}$. Члены такого ряда часто обозначают p_k: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k \;\; (p_k \geq 0)$.

Теорема 3. *Для сходимости ряда с положительными членами необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.*

2. Признак сравнения.

Теорема 4. *Песть два ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad (\textit{ряд } P) \textit{ и } \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \;\; (\textit{ряд } Q)$$

являются рядами с положительными членами, и пусть

$$\forall k \in \mathbb{N} : p_k \leq q_k.$$

Тогда:

1) из сходимости ряда Q следует сходимость ряда P;

2) из расходимости ряда P следует расходимость ряда Q.

Замечание. Теорема 4 остаётся в силе, если вместо неравенства $p_k \leq q_k$, начиная с $k = 1$, выполнены неравенсива $p_k \leq c \cdot q_k$, начиная с некоторого номера k_0, где $c > 0$ – какое-то число.

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Если существует*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{p_k}{q_k} = a > 0$$

то ряды P и Q сходятся или расходятя одновременно.

3. Признаки Даламбера и Коши.

Теорема 5 (признак Деламбера). *Если начиная с некоторого номера выполнены неравенсва*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится).

Теорема 5' (признак Далембера в предельной форме).
Если существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q < 1 \quad (q > 1),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится (расходится).*

Теорема 6 (признак Коши). *Если начиная с некоторого номера выполнены неравенства*

$$\sqrt[k]{p_k} \le q < 1 \quad \left(\sqrt[k]{p_k} \ge 1\right),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится (расходится).*

Теорема 6' (признак Коши в предельной форме).
Если существует

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = q < 1 \quad (q > 1),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится (расходится).*

Замечание. Признак Коши имеет более широкую область применимости по сравнению с признаком Даламбера. Можно доказать (задача 9), что если начиная с некоторого номера k_0 для членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ выполнено неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \le q < 1,$$

(то есть "работает" признак Даламбера), то начиная с некоторого номера k_1 выполнено неравенство

$$\sqrt[k]{p_k} \le q_1 < 1,$$

(т.е. "работает" и признак Коши).

Обратное неверно (см. пример 3).

4. Признак Гаусса.

Теорема 7 (признак Гаусса). *Если члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *удовлетворяют условию*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \ \text{при} \ k \to \infty, \tag{1}$$

то при $\alpha > 1$ *ряд сходится, а при* $\alpha < 1$ *ряд расходится.*

Замечание. Если условие (1) выполнено для $\alpha = 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ может сходиться и может расходиться. Если же

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1 - \frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^{1+\gamma}}\right) \ \text{при} \ k \to \infty,$$

где $\gamma > 0$ – некоторое число, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ расходится.

5. Интегральный признак Коши – Маклорена.

Теорема 8. *Пусть ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *является рядом с положительными членами и пусть существует функция* $f(x)$, *неотрицательная и невозрастающая на полупрямой* $x \geq 1$ *и такая, что*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad f(k) = p_k.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность* $\{a_n\}$, *где* $a_n = \int_1^n f(x)dx$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какой ряд называется рядом с положительными членами? Приведите пример такого ряда.

2. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами. Является ли это условие: а) необходимым; б) достаточным условием сходимости произвольного ряда?

3. Сформулируйте теорему о признаке сравнения рядов с положительными членами. Опираясь на эту теорему, ответьте на вопрос (и обоснуйте ответ): что можно сказать о связи между сходимостью (расходимостью) рядов с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

если $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = 0$.

4. Сформулируйте утверждение о признаке сравнения рядов с положительными членами в предельной форме.

5. Сформулируйте теорему о признаке Даламбера. Можно ли условие $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ этой теоремы заменить условием $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$? Ответ обоснуйте.

6. Сформулируйте теорему о признаке Даламбера в предельной форме. Приведите пример двух рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, для каждого из которых выполнено условие $\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$, но при этом один ряд сходится, а другой расходится.

7. Сформулируйте теорему о признаке Коши. Можно ли условие $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ этой теоремы заменить условием $\sqrt[k]{p_k} < 1$? Ответ обоснуйте.

8. Сформулируйте теорему о признаке Коши в предельной форме. Приведите пример двух рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, для каждого из которых выполнено условие $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = 1$, но при этом один ряд сходится, а другой расходится.

9. Сформулируйте теорему о признаке Гаусса. Опираясь на эту теорему, обоснуйте следующее утверждение *(признак Раабе* *в предельной форме)*: если $\lim_{k\to\infty} k(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}) = \alpha$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha < 1$ расходится.

10. Сормулируйте теорему об интегральном признаке Коши – Маклорена. Приведите пример, показывающий, что если не требовать, чтобы функция $f(x)$ была невозрастающей, сохранив остальные условия теоремы, то утверждение теоремы становится неверным.

Примеры решения задач

1. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

расходится.

$\triangle$ Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, и гармонический ряд расходится, то по признаку сравнения (теорема 4) данный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ расходится.$\blacktriangle$

2. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{a^k}$$

сходится при $a > 1$ и расходится при $0 < a \leq 1$.

$\triangle$ Обозначим член ряда $\frac{k^2}{a^k}$ через p_k и воспользуемся признаком Даламбера. Так как

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2,$$

то $\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{a}$, а поскольку $\frac{1}{a} < 1$ при $a > 1$ и $\frac{1}{a} > 1$ при $0 < a < 1$, то, согласно признаку Даламбера в предельной форме (теорема 5‘), данный ряд сходится при $a > 1$ и расходится при $0 < a < 1$. К такому же выводу приводит признак Коши в предельной форме (теорема 6’), поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{a} \sqrt[k]{k^2} = \frac{1}{a}.$$

Если $a = 1$, то данный ряд принимает вид $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$. Этот ряд, очевидно, расходится, т.к. для него не выполнено необходимое условие сходимости ряда – общий член ряда k^2 не стремится к нулю при $k \to \infty$. $\blacktriangle$

3. Доказать, что для исследования на сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^{k-1}}{4}\right)^k$$

признак Даламбера непригоден, а признак Коши даёт ответ на вопрос о сходимости ряда.

△ Рассмотрим отношение $\frac{p_{k+1}}{p_k}$, фигурирующее в признаке Даламбера:

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left[2+(-1)^k\right]^{k+1}}{\left[2+(-1)^{k-1}\right]^k}=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{2m-1}}<1, & \text{если } k=2m-1,\\ \frac{1}{4}\cdot 3^{2m+1}>1, & \text{если } k=2m, \quad m=1,2,\ldots.\end{cases}$$

Полученные неравенства показывают, что признак Даламбера (теорема 5) в применении к данному ряду "не работает". Непригоден также признак Даламбера в предельной форме (теорема 5'), поскольку $\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}$ не существует.

Рассмотрим теперь величину $\sqrt[k]{p_k}$, фигурирующую в признаке Коши:

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{2+(-1)^{k-1}}{4}\le\frac{3}{4}<1.$$

Из этих неравенств следует, что по признаку Коши (теорема 6) данный ряд сходится.▲

4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}} \tag{2}$$

в зависимости от числа β (при $\beta\neq 1$ ряд (2) называется *обобщённым гармоническим рядом*).

△ Если $\beta\le 0$, то ряд (2) расходится, поскольку не выполнено необходимое условие сходимости ряда - общий член ряда не стремится к нулю при $k\to\infty$.

Для $\beta>0$ проведём исследование ряда (2) тремя способами.

1-й способ. Сравним ряд (2) с рядом из примера 3 §1

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right). \tag{3}$$

Было установлено, что ряд (3) сходится при $\alpha>0$ и расходится при $\alpha<0$. Преобразуем общий член $q_k:=\frac{1}{k^{\alpha}}-\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}$ ряда (3) при $\alpha>0$ следующим образом:

$$q_k=\frac{1}{k^{\alpha}}\left[1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^{\alpha}\right]=\frac{1}{k^{\alpha}}\left[1-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{k^{\alpha}}\left[1-\left(1-\frac{\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right]=\frac{\alpha}{k^{\alpha+1}}\left(1+o\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)\right) \quad \text{при } k\to\infty.$$

Положим $\beta=\alpha+1$ и обозначим общий член ряда (2) через p_k: $p_k=\frac{1}{k^{\alpha+1}}$. Очевидно, что для $\alpha>0$ (т.е. для $\beta>1$) выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{q_k}=\frac{1}{\alpha}>0,$$

и, следовательно, при $\beta > 1$, согласно признаку сравнения в предельной форме, обобщённый гармонический ряд (2) сходится.

Если $\beta = 1$, то ряд (2) является гармоническим рядом, и он расходится (см. пример 2 §1), а если $0 < \beta < 1$, то $\frac{1}{k^\beta} \geq \frac{1}{k}$, и так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}$ также расходится.

Итак, обобщённый гармонический ряд (2) сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$.

2-й способ. Получим тот же самый результат с помощью признака Гаусса. Так как

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^\beta = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \text{ при } k \to \infty,$$

то, согласно теореме 7 и замечанию к ней, ряд (2) сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$.

3-й способ. При $\beta > 0$ применим к ряду (2) интегральный признак Коши – Маклорена. С этой целью введём функцию $f(x) = \frac{1}{x^\beta},\ \ x \geq 1$. Она удовлетворяет всем условиям теоремы 8: $f(x)$ – неотрицательная и невозрастающая функция на полупрямой $x \geq 1$, и $f(k) = p_k = \frac{1}{k^\beta}$. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, где

$$a_n = \int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{dx}{x^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}(n^{1-\beta} - 1), & \text{если } \beta \neq 1, \\ \ln n, & \text{если } \beta = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что если $\beta > 1$, то существует $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\beta - 1}$, а если $\beta \leq 1$, то последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно большой и, значит, расходится. Поэтому, согласно интегральному признаку Коши – Маклорена (теорема 8), ряд (2) сходится при $\beta > 1$ и расходится при $0 < \beta \leq 1$.▲

5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\beta k} \tag{4}$$

в зависимости от числа β.

△ Если $\beta \leq 0$, то

$$\frac{1}{k \ln^\beta k} \geq \frac{1}{k} \text{ при } k \geq 3,$$

и так как гармонический ряд расходится, то, согасно признаку сравнения, ряд (4) также расходится.

Для $\beta > 0$ воспользуемся интегральным признаком Коши – Маклорена (при этом нужно учесть, что ряд (4) начинается с $k = 2$). Введём функцию

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^\beta x}, \ \ x \geq 2.$$

Она является неотрицательной и невозрастающей при $x \geq 2$ и удовлетворяет условию $f(k) = p_k$, где $p_k = \frac{1}{k \ln^\beta k}$ – члены ряда (4). Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ где

$$a_n = \int_2^n f(x)dx = \int_2^n \frac{dx}{x \ln^\beta x} = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta} n - \ln 2\right), & \text{если} \beta \neq 1, \\ \ln\ln n - \ln\ln 2, & \text{если } \beta = 1. \end{cases}$$

Если $\beta > 1$, то $\ln^{1-\beta} n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому существует $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\ln 2}{\beta - 1}$, а если $0 < \beta \leq 1$, то $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и, значит, $\lim_{n\to\infty} a_n$ не существует. Следовательно, по теореме 8 ряд (4) сходится при $\beta > 1$ и расходится при $0 < \beta \leq 1$.

Итак, ряд (4) сходится, если $\beta > 1$, и расходится, если $\beta \leq 1$.

▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6. Частичные суммы S_n^P и S_n^Q рядов с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \;\; (\text{ряд} P) \;\; \text{и} \;\; \sum_{k=1}^{\infty} q_k \;\; (\text{ряд} Q)$$

удовлетворяют неравенствам (начиная с некоторого номера n_0)

$$S_n^P \leq S_n^Q \;\; (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Докажите, что из сходимости ряда Q следует сходимость ряда P, а из расходимости ряда P следует расходимость ряда Q.

7. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Даламбера:

$$\text{а)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k}{k!}; \;\; \text{б)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k}{\sqrt{(k+1)!}}; \;\; \text{в)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}};$$

$$\text{г)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k!}{k^k}; \;\; \text{д)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k \cdot k!}{k^k} \;\; (a > 0); \;\; \text{е)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

8. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Коши:

$$\text{а)} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{k})^{-k^2}; \;\; \text{б)} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k (1 - \frac{1}{k})^{k^2}; \;\; \text{в)} \sum_{k=1}^{\infty} a^k (1 + \frac{1}{k})^{-k^2} \;\; (a > 0);$$

$$\text{г)} \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos^2 \frac{\pi k}{3} \;\; (a > 0); \;\; \text{д)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos k}{2 + \cos k}\right)^{k - \ln k}; \;\; \text{е)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k(k+1)}.$$

9. Докажите, что если для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ с положительными членами начиная с некоторого номера k_0 выполнено условие

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1,$$

то найдётся число $q_1 < 1$, такое, что начиная с некоторого номера k_1 будет выполнено условие

$$\sqrt[k]{p_k} \le q_1.$$

10. Докажите, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty} p_k$ с положительными членами сходится (расходится), если начиная с некоторого номера выполнено неравенство $\frac{-\ln p_k}{\ln k} \ge q > 1$ $\left(\frac{-\ln p_k}{\ln k} \le 1\right)$.

11. Исследуйте ряды на сходимость, используя различные признаки:

$$\text{а)} \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{k}}; \quad \text{б)} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}; \quad \text{в)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)(k+2)}};$$

$$\text{г)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{k+1}}; \quad \text{д)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{\alpha}}; \quad \text{е)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \cdot k^{\alpha};$$

$$\text{ж)} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k^2+2}{k^2+1}; \quad \text{з)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \ln \frac{k+1}{k}; \quad \text{и)} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sin(\pi\sqrt{k^2+1})\right|;$$

$$\text{к)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \sqrt{\ln \frac{k+1}{k}}\right); \quad \text{л)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k!)(2k)!}{(3k)!}; \quad \text{м)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^3}{(3k)!};$$

$$\text{н)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k!)}{k^{\alpha}}; \quad \text{о)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}; \quad \text{п)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln \ln k}};$$

$$\text{р)} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln k)^{\ln k}}; \quad \text{с)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{k^2}; \quad \text{т)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{k^{\alpha}};$$

$$\text{у)} \sum_{k=1}^{\infty} |\ln(k \sin \frac{1}{k})|; \quad \text{ф)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k!)}.$$

§3. Ряды с членами произвольного знака.

Основные понятия и теоремы

1. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Пусть членами ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\text{ряд A})$$

являются числа произвольного знака.

Определение. Ряд A называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 9. *Если ряд A сходится абсолютно, то он сходится.*

Определение. Ряд A называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

Пусть ряд A содержит бесконечно много положительных членов и бесконечно много отрицательных членов. Обозначим через $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ положительные члены ряда A, выписанные в том порядке, как они содержатся в ряде A, а через $-q_1, -q_2, \cdots,$ $-q_n, \cdots$ – отрицательные члены ряда A. Образуем два ряда с положительными членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \ \text{(ряд } P) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \ \text{(ряд } Q).$$

Теорема 10. *Если ряд A сходится абсолютно, то ряды P и Q сходятся, и для сумм S^A, S^P и S^Q этих рядов справедливо равенство*

$$S^A = S^P - S^Q.$$

Теорема 11. *Если ряд A сходится условно, то ряды P и Q расходятся.*

2. Теоремы о перестановке и группировке членов ряда. Переставив члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ произвольным образом, получим ряд A':

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k,$$

где $a'_k = a_{n_k}$ и $a_k = a'_{m_k}$, n_k и m_k – какие-то номера.

Теорема 12. *Если ряд A сходится абсолютно, то ряд A' также сходится абсолютно, и их суммы равны: $S^A = S^{A'}$.*

Теорема 13 (теорема Римана). *Если ряд A сходится условно, то для любого числа S можно так переставить члены ряда A, что сумма полученного ряда A' будет равна S.*

Из теорем 12 и 13 следует, что в отличие от конечных сумм, не изменяющихся при перестановке слагаемых, числовой ряд обладает перестановочным свойством тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.

Другим свойством конечных сумм – сочетательным свойством – обладает любой сходящийся ряд.

Теорема 14. *Если в сходящемся ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ какие-то группы слагаемых заключить в скобки и заменить каждую группу слагаемых в скобках их суммой, то полученный ряд будет также сходящимся, и его сумма равна сумме исходного ряда.*

Иначе говоря, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) = b_1$, $(a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) = b_2 \ldots, (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) = b_k, \ldots,$ то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ также сходится и его сумма равна сумме ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. Признаки Дирихле и Абеля, ряд Лейбница. Признаки Дирихле и Абеля применяются к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \qquad (1)$$

Теорема 15 (признак Дирихле). *Если: 1) последовательность частичных сумм ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *– ограниченная, 2) последовательность* $\{b_k\}$ *– монотонная и бесконечно малая, то ряд (1) сходится.*

Теорема 16 (признак Абеля). *Если: 1) ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, 2) последовательность* $\{b_k\}$ *– монотонная и ограниченная, то ряд (1) сходится.*

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *знакочередующимся*, если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

Определение. Знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *рядом Лейбница*, если последовательность $\{|a_k|\}$ – монотонная и бесконечно малая.

Теорема 17. *Любой ряд Лейбница сходится.*

Контрольные вопросы и задания

1. Какой ряд называется абсолютно сходящимся и какой – условно сходящимся? Может ли ряд, содержащий лишь конечное число положительных членов и бесконечно много отрицательных членов быть условно сходящимся?

2. Может ли условно сходящийся ряд содержать лишь конечное число отрицательных членов?

3. Ряд, составленный из всех положительных членов данного ряда, сходится. Может ли данный ряд: а) сходиться условно? б) сходиться абсолютно? в) расходиться?

4. Сформулируйте теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

5. Сформулируйте теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.

6. Сформулируйте теорему о сочетательном свойстве сходящихся рядов. Может ли расходящийся ряд в результате группировки членов (т.е. заключения в скобки каких-то групп членов) стать сходящимся?

7. Сформулируйте теорему о признаке Дирихле. Приведите пример ряда, сходящегося по признаку Дирихле.

8. Сформулируйте теорему о признаке Абеля. Приведите пример ряда, сходящегося по признаку Абеля.

9. Какой ряд называется: знакочередующимся? рядом Лейбница?

10. Является ли ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+(-1)^{k-1}}$$

а) знакочередующимся? б) рядом Лейбница? в) сходящимся рядом?

Примеры решения задач

1. Для каких значений α ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \tag{2}$$

сходится абсолютно и для каких условно?

$\triangle$ Если $\alpha \leq 0$, то ряд (2) расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $k \to \infty$.

Если $\alpha > 0$, то ряд (2) является, очевидно, рядом Лейбница и, следовательно, сходится (по теореме 17).

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right|$, составленный из модулей членов ряда (2), представляет собой обобщённый гармонический ряд, который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Таким образом, ряд (2) сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$.$\blacktriangle$

2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \tag{3}$$

где x – любое фиксированное число, не равное $m\pi, m \in \mathbb{Z}; \alpha > 0$.

$\triangle$ Положим

$$a_k = \sin kx, \quad b_k = \frac{1}{k^\alpha}$$

и применим признак Дирихле.

Последовательность $\{b_k\} = \left\{\frac{1}{k^\alpha}\right\}$ при $\alpha > 0$ является монотонной и бесконечно малой и, значит, удовлетворяет условию теоремы 15.

Рассмотрим последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx.$$

Умножим обе части равенства на $2\sin\frac{x}{2}$ и воспользуемся формулой

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx = \cos\left((k-\frac{1}{2})x\right) - \cos\left((k+\frac{1}{2})x\right).$$

Получим

$$S_n\cdot 2\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2} + \cdots +$$

$$+\cos\left((n-\frac{1}{2})x\right) - \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right),$$

откуда, разделив на $2\sin\frac{x}{2}$, приходим к равенству

$$S_n = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Отсюда следует неравенство

$$|S_n| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad x \ne 2m\pi. \tag{4}$$

Таким образом, последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ ограничена, т.е. выполнено условие теоремы 15 в отношении ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

По признаку Дирихле (теорема 15) ряд (3) сходится при $\alpha > 0$ для любого $x \ne m\pi, \quad m\in\mathbb{Z}$.

Если $x = m\pi, \quad m\in\mathbb{Z}$, то все члены ряда (3) равны нулю и, значит, ряд (3) сходится абсолютно.

Исследуем ряд (3) на абсолютную сходимость при $x \ne m\pi, \quad m\in\mathbb{Z}$.

Воспользуемся очевидной оценкой для членов ряда

$$\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \le \frac{1}{k^\alpha}. \tag{5}$$

Если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ сходится (это обобщённый гармонический ряд, у которого $\alpha > 1$), поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right|$ также сходится (по признаку сравнения), и, следовательно, при $\alpha > 1$ ряд (3) сходится абсолютно.

Если $0 < \alpha \le 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ расходится, однако оценка (5) не позволяет сделать вывод о расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right|$.

Воспользуемся другой оценкой:

$$\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \ge \frac{\sin^2 kx}{k^\alpha} = \frac{1-\cos 2kx}{2k^\alpha} =: q_k. \tag{6}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ расходится при $0 < \alpha \le 1$. Это следует из того, что его можно представить в виде разности двух рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^\alpha},$$

причём ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится (это обобщённый гармонический ряд при $0 < \alpha \leq 1$), а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{k^\alpha}$ сходится (это можно доказать с помощью признака Дирихле так же, как была доказана сходимость исходного ряда (3) при $\alpha > 0$; сделайте это). Так как разность расходящегося и сходящегося рядов является расходящимся рядом (докажите это), то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ при $0 < \alpha \leq 1$ расходится. Поэтому в силу оценки (6) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right|$ также расходится (по признаку сравнения).

Итак, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ при $x \neq m\pi, \ \ m \in \mathbb{Z}$ сходится абсолютно для $\alpha > 1$ и сходится условно для $0 < \alpha \leq 1$. Если же $x = m\pi, \ \ m \in \mathbb{Z}$, то этот ряд сходится абсолютно для любого α.▲

3. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \cdot \operatorname{arctg} k}{k} \tag{7}$$

где x – любе фиксированное число, не равное $m\pi, \ \ m \in \mathbb{Z}$.

△ Положим $a_k = \frac{\sin kx}{k}, \ \ b_k = \operatorname{arctg} k$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится для любого x (см. пример 2), последовательность $\{b_k\}$ – монотонная и ограниченная ($0 < b_k < \frac{\pi}{2}$), поэтому данный ряд (7) сходится по признаку Абеля (теорема 16).

Исследуем ряд (7) на абсолютную сходимость. Так как $\operatorname{arctg} k \geq \frac{\pi}{4}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$, то

$$\left|\frac{\sin kx \cdot \operatorname{arctg} k}{k}\right| \geq \frac{\pi}{4}\left|\frac{\sin kx}{k}\right|,$$

а поскольку при $x \neq m\pi, \ \ m \in \mathbb{Z}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin kx}{k}\right|$ расходится (см. пример 2), то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin kx \cdot \operatorname{arctg} k}{k}\right|$ также расходится (по признаку сравнения).

Итак, при $x \neq m\pi, \ \ m \in \mathbb{Z}$ данный ряд (7) сходится условно.▲

4. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2k^\alpha + \sin kx}, \tag{8}$$

где x – любое фиксированное число, не равное $m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

△ Если $\alpha \leq 0$, то общий член ряда не стремиться к нулю при $k \to \infty$, и, следовательно, ряд расходится. Пусть $\alpha > 0$. Для общего члена ряда справедлива оценка

$$\left|\frac{\sin kx}{2k^\alpha + \sin kx}\right| \leq \frac{1}{2k^\alpha - 1}. \tag{9}$$

Если $\alpha > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^\alpha - 1}$ сходится – это следует из сравнения со сходящимся обобщённым гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$:

$$\frac{1}{2k^\alpha - 1} \leq \frac{1}{k^\alpha}.$$

Поэтому при $\alpha > 1$ данный ряд (8) сходится абсолютно.

Если же $0 < \alpha \le 1$, то оценка (9) не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда (8).

Преобразуем выражение для общего члена ряда, используя формулу Тейлора:

$$a_k = \frac{\sin kx}{2k^\alpha + \sin kx} = \frac{\sin kx}{2k^\alpha}\left(1 + \frac{\sin kx}{2k^\alpha}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{\sin kx}{2k^\alpha}\left(1 - \frac{\sin kx}{2k^\alpha} + o\left(\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right)\right) = \qquad (10)$$
$$= \frac{\sin kx}{2k^\alpha} - \frac{\sin^2 kx}{4k^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 kx}{k^{2\alpha}}\right).$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{2k^\alpha}$ сходится по признаку Дирихле (см. пример 2), а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sin^2 kx}{4k^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 kx}{k^{2\alpha}}\right)\right]$ сходится или расходится одновременно в рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k^{2\alpha}}$. В свою очередь, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{k^{2\alpha}}$ сходится, если $2\alpha > 1$, т.е. $\alpha > \frac{1}{2}$, и расходится, если $2\alpha \le 1$, т.е. $\alpha \le \frac{1}{2}$ (это было установлено в ходе решения примера 2). Таким образом, если $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, то ряд (8) сходится, а если $\alpha \le \frac{1}{2}$, то этот ряд расходится.

Остаётся исследовать ряд (8) на абсолютную сходимость при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$. Так как

$$|a_k| \ge \frac{|\sin kx|}{2k^\alpha + 1} \ge \frac{\sin^2 kx}{3k^\alpha}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{3k^\alpha}$ расходится при $\alpha \le 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$.

Итак, ряд (8) расходится при $\alpha \le \frac{1}{2}$, сходится условно при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ и сходится абсолютно при $\alpha > 1$.▲

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

12. Известно, что ряды P и Q, фигурирующие в теоремах 10 и 11, сходятся. Докажите, что ряд A сходится и справедливо равенство $S^A = S^P - S^Q$.

13. Исследуйте ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}$; б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k^3+k}}$; в) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k[\ln(k+1) - \ln k]$;

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln \frac{\sqrt{k^2+1}}{k}$; д) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{k^2+1})$; е) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cos(\pi\sqrt{k^2+k})$;

ж) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{\sqrt{k^2+k}}$; з) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k}{\ln k}$; и) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt{k^2+1} - \sqrt{k^2-1}\right)$;

к) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\operatorname{arctg} k}{\sqrt{k}}$; л) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin^3 k}{k}$; м) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\sqrt{k+1}-\sin\sqrt{k}}{k}$;

н) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos\sqrt[3]{k^3+1}-\cos k\right)$; о) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\operatorname{arctg} k$; п) $\sum_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{[k+(-1)^k]^\alpha}$;

14. Пусть $p_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $p_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k p_k$ сходится? Ответ обоснуйте.

15. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и $\lim_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_k} = 1$. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится? Ответ обоснуйте.

16. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и последоватльность $\{b_k\}$ ограниченная. Следует ли отсюда, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится? Ответ обоснуйте.

§4. Функциональные последовательности и ряды

Основные понятия и теоремы

1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов. Если каждому наиуральному числу n поставлена в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, пределённая на множестве X, то говорят, что на множестве X задана *функциональная последовательность*

$$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots.$$

Зафиксировав какое-нибудь значение x_0 аргумента x, получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Если эта числовая последовательность сходится (расходится), то говорят, что *функциональная последовательность сходится (расходится) в точке* x_0, а точка x_0 называется *точкой сходимости (расходимости)* последовательности $\{f_n(x)\}$.

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке x множества X, то говорят, что она *сходится на множестве* X. При этом $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ зависит, вообще говоря, от x, т.е. является функцией, определённой на множестве X. Эта функция (обозначим её $f(x)$) называется *пределом* (или *предельной функцией*) последовательности $\{f_n(x)\}$, что обозначается так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ или } f_n(x) \to f(x) \text{ при } n\to\infty \text{ на множестве } X.$$

Говорят также, что *последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится к фукции* $f(x)$ *на множестве* X. Множество всех точек x, в которых функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится, называется *областью сходимости* этой последовательности.

Рассмотрим теперь ряд, членами которого являются не числа, а функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, определённые на некотором множестве X:

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x).$$

Такой ряд называется *функциональным рядом.* При фиксированном значении x_0 аргумента x он становится числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$.

Если числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится (расходится), то говорят, что *функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится (расходится) в точке* x_0.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в каждй точке x множества X, то говорят, что он *сходится на множестве* X. При этом его сумма зависит, вообще говоря, от x. Будем обозначать её $S(x)$.

Множество всех точек x, в которых функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится, называется *областью сходимости* этого ряда.

Чтобы установить, сходится ли функциональный ряд в данной точке, можно использовать признаки сходимости числовых рядов.

2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X к функции $f(x)$.

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится* к функции $f(x)$ на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ номер N, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Главным моментом в этом определении является то, что для любого ε найдётся "нужный" номер N, **один и тот же для всех x** из множества X. Термин "равномерно сходится" означает равномерность (одинаковость) по отношению ко всем значениям переменной x – неравенство (1) выполняется для всех x из множества X, начиная с одного и того же для всех x номера.

С геометрической точки зрения неравенство (1) означает, что при $n > N$ график функции $y = f_n(x)$ лежит в ε - окрестности графика предельной функции $y = f(x)$, т.е. между кривыми $y = f(x) - \varepsilon$ и $y = f(x) + \varepsilon$.

Обозначение равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на множестве } X.$$

Определение 2 (эквивалентное определению 1). Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если числовая последовательность $\{\operatorname*{Sup}_X |f_n(x) - f(x)|\}$ является бесконечно малой, т.е.

$$\operatorname*{Sup}_X |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Рассмотрим теперь функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, сходящийся в каждой точке множества X. Пусть его сумма равна $S(x)$.

Определение. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно* на множестве X, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно к $S(x)$ на множестве X.

В соответствии с определением 1 это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N$, такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$|S(x) - S_n(x)| = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \Big| < \varepsilon,$$

а в соответствии с определением 2, что

$$\operatorname*{Sup}_X \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \Big| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 18 (критерий Коши равномерной сходимости функциональнй последовательности). *Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ номер N, такой, что $\forall n > N$, для любого натурального числа p и $\forall x \in X$ выполняется неравенство*

$$\big| f_{n+p}(x) - f_n(x) \big| < \varepsilon. \tag{2}$$

Замечание. Неравенство (2) означает, что $\forall x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, а поскольку номер N – один и тот же для всех x из множества X, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$, удовлетворяющую условию (2) $\forall n > N$, $\forall p$ и $\forall x \in X$, можно назвать *равномерно фундаментальной на множестве* X.

В соответствии с этим теорему 18 можно переформулировать так: *для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x\}$ сходилась равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы она была равномерно фундаментальной на этом множестве.*

Теорема 19 (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Для того чтобы функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходился равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено следующее условие: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, такой, что $\forall n > N$, $\forall$ натурального числа p и $\forall x \in X$ выполняется неравенство*

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \Big| < \varepsilon.$$

4. Признак Вейерштрасса.

Определение. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ с положительными членами называется *мажорантным* (или *мажорирующим*) для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X, если $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|u_k(x)| \leq p_k.$$

Теорема 20 (признак Вейерштрасса). *Если для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X существует сходящийся мажорантный ряд, то этот функциональный ряд сходится равномерно на множестве X.*

5. Признаки Дирихле и Абеля. Эти признаки относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x), \quad x \in X. \tag{3}$$

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве X, если существует число $M > 0$, такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Теорема 21 (признак Дирихле). *Если:*
1) последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно ограничена на множестве X,
2) последовательность $\{b_n(x)\}$ при каждом $x \in X$ является монотонной и $b_n \rightrightarrows 0$ на множестве X, то ряд (3) сходится равномерно на множестве X.

Теорема 22 (признак Абеля). *Если:*
1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно сходится на множестве* X,
2) последовательность $\{b_n(x)\}$ *равномерно ограничена на множестве* X *и при каждом* $x \in X$ *является монотонной, то ряд (3) сходится равномерно на множестве* X.

6. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 23 (о непрерывности предельной функции). *Если все члены последовательности* $\{f_n(x)\}$ *являются непрерывными функциями на промежутке* X *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на этом промежутке, то предельная функция* $f(x)$ *нерерывна на промежутке* X.

Теорема 24 (о непрерывности суммы ряда). *Если все члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *являются непрерывными функциями на промежутке* X, *и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то его сумма – непрерывная функция на промежутке* X.

Теорема 25 (о переходе к пределу под знаком интеграла). *Если все члены последовательности* $\{f_n(x)\}$ *являются непрерывными функциями на сегменте* $[a, b]$ *и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a, b]$, *то для любых* x_0 *и* x *из сегмента* $[a, b]$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

(т.е. можно переходить к пределу под знаком интеграла), причём

$$\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)dt \ \text{ на сегменте } [a, b].$$

Теорема 26 (о почленном интегрировании ряда). *Если все члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *являются непрерывными функциями на сегменте* $[a, b]$, *и ряд сходится равномерно на этом сегменте, то для любых* x_0 *и* x *из сегмента* $[a, b]$ *справедливо равенство*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$$

(т.е. ряд можно интегрировать почленно на любом сегменте $[x_0, x]$, *принадлежащем сегменту* $[a, b]$), *причём ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_k(t)dt$ *сходится равномерно на сегменте* $[a, b]$.

Теорема 27 (о переходе к пределу под знаком производной).

Если:
1) все члены последовательности $\{f_n(x)\}$ *имеют непрерывные*

производные $f_n'(x)$ *на сегменте* $[a,b]$,
2) $f_n(x) \to f(x)$ *на сегменте* $[a,b]$,
3) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ *на сегменте* $[a,b]$,
то функция $f(x)$ *дифференцируема на сегменте* $[a,b]$, *и справедливо равенство*

$$f'(x) = \varphi(x), \quad x \in [a,b].$$

Это равенство можно записать в виде (поменяв местами левую и правую части равенства)

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)', \quad x \in [a,b],$$

и такая запись позволяет говорить о переходе к пределу под знаком производной на сегменте $[a,b]$.

Теорема 28 (о почленном дифференцировании ряда).
Если:
1)*все члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *имеют непрерывные производные* $u_k'(x)$ *на сегменте* $[a,b]$,
2) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится на сегменте* $[a,b]$, *и его сумма равна* $S(x)$,
3) *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ *сходится равномерно на сегменте* $[a,b]$, *и его сумма равна* $\varphi(x)$,
то функция $S(x)$ *дифференцируема на сегменте* $[a,b]$ *и справедливо равенство*

$$S'(x) = \varphi(x), \qquad x \in [a,b].$$

Это равенство можно записать в виде

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x), \qquad x \in [a,b],$$

и такая запись означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ можно дифференцировать почленно на сегменте $[a,b]$.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, что такое функциональная последовательность, и что называется пределом функциональной последовательности. Что означают слова "последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ на множестве X"?

2. Объясните, что такое функциональный ряд, и что означают слова "ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на множестве X".

3. Сформулируйте два определения равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве X. Докажите эквивалентность этих определений.

4. Дайте геометрическую интерпретацию равномерной сходимости функциональной последовательности.

5. Сформулируйте два определения равномерной сходимости функционального ряда на данном множестве, опираясь на два определения равномерной сходимости функциональной последовательности.

6. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости на данном множестве: а) функциональной последовательности; б) функционального ряда. Сформулируйте отрицание к критерию Коши.

7. Дайте определение мажорантного ряда для данного функционального ряда. Являются ли следующие рялы мажорантными для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ на сегменте $[0, 2\pi]$:

$$\text{а)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^2}; \quad \text{б)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}; \text{в)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}; \quad \text{г)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}?$$

8. Сформулируйте теорему о признаке Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Какие из рядов а) – г) в вопросе 7 являются подходящими для применения признака Вейерштрасса к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ на сегменте $[0, 2\pi]$?

9. Дайте определение равномерно ограниченной на данном множестве функциональной последовательности. Является ли последовательность $\{\frac{xn}{x+n}\}$:
а) ограниченной при каждом $x \in \mathbb{R}_+ = \{x : x > 0\}$?
б) равномерно ограниченной на множестве $\mathbb{R}_+$?

10. Сформулируйте теорему о признаке Дирихле равномерной сходимости функционального ряда. Можно ли этот признак применить к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$ на множестве $\mathbb{R}_+ = \{x : x > 0\}$?

11. Сформулируйте теорему о признаке Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Можно ли этот признак применить к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(1 + \frac{x}{k})}{k} \text{ на сегменте } [0; 100]?$$

12. Сформулируйте теорему о непрерывности предельной функции функциональной последовательности (теорема 23). Применима ли эта теорема к функциональной последовательности $\{\frac{x}{x+n}\}$ на промежутке $R_+ = \{x : x > 0\}$? Является ли непрерывной на R_+ предельная функция этой последовательности?

13. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы функционального ряда. Может ли сумма ряда быть непрерывной функцией, если какие-то члены ряда не являются непрерывными функциями?

14. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком интеграла. Справдливо ли равенство $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)dx =$

$\int_0^{\pi} (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx$, если:
а) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$?
б) $f_n(x) = \sin nx$?

15. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда. Можно ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ интегрировать почленно на произвольном сегменте $[a, b]$?

16. Сформулируйте теорему о переходе к пределу под знаком производной. Верно ли равенство $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$, если:
а) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$?
б)$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$?

17. Сформулируйте теорему о почленном дифференцирование функционального ряда. Можно ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^3}$ дифференцировать почленно на произвольном сегменте $[a, b]$?

Примеры решения задач

1. Найти область сходимости и предельную функцию функциональной последовательности $\{x^n\}$.

$\triangle$ Если $|x| < 1$, то $x^n \to 0$ при $n \to \infty$; если $x = 1$, то $\{x^n\} = 1, 1, \ldots, 1, \ldots \to 1$ при $n \to \infty$; если $x = -1$, то $\{x^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$ – эта последовательность расходится; если $|x| > 1$, то $\{x^n\}$ – бесконечно большая последовательность и, следовательно, расходится.

Итак, областью сходимости последовательности $\{x^n\}$ является полусегмент $-1 < x \le 1$, причём

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

Отметим, что все функции x^n непрерывны на полусегменте $(-1; 1]$, а предельная функция $f(x)$ разрывна в точке $x = 1$.$\blacktriangle$

2. Найти область сходимости и сумму функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$.

$\triangle$Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным x. Если $|x| \ne 1$, то частичная сумма $S_n(x)$ ряда выражается формулой

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}.$$

Отсюда следует:
если $|x| < 1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-x}$;
если $|x| > 1$, то последовательность $\{S_n(x)\}$ – бесконечно большая и, следовательно, расходится;
если $x = 1$, то $S_n(x) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$, и ряд расходится;

если $x=-1$, то $\{S_n(x)\} = -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$ – эта последовательность расходится.

Итак, областью сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ является интервал $-1 < x < 1$, а его сумма $S(x)$ выражается формулой $S(x) = \frac{x}{1-x}$.▲

3. Найти область сходимости и сумму функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(1-x)\cdot x^k$.

△ Согласно результату, полученному в примере 2, данный ряд сходится на интервале $(-1;1)$ и его сумма $S(x)$ на этом интервале равна $(1-x)\cdot\frac{x}{1-x} = x$. Кроме того, данный ряд сходится в точке $x=1$, поскольку все его члены в точке $x=1$ равны нулю, а, значит, и сумма равна нулю: $S(1)=0$. В остальных точках числовой прямой, т.е. при $x \le -1$ и $x > 1$, ряд расходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является полусегмент $-1 < x \le 1$, причём

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{если } \ -1 < x < 1, \\ 0, & \text{если } \ x = 1. \end{cases}$$

Заметим, что все члены ряда непрерывны на полусегменте $(-1;1]$, а сумма ряда разрывна в точке $x=1$.▲

4. Исследовать последовательность $\{x^n\}$ на равномерную сходимость на промежутке:
а)$0 \le x \le x_0$, где $0 < x_0 < 1$;
б)$0 \le x < 1$;
в)$0 \le x \le 1$.

△ В примере 1 было установлено, что областью сходимости последовательности $\{x^n\}$ является полусегмент $-1 < x \le 1$, причём

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{если } \ -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если } \ x = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x^n\}$ сходится на каждом из промежутков а), б) и в). Для исследования данной последовательности на равномерную сходимость на указанных промежутках, воспользуемся определением 2 равномерной сходимости функциональной последовательности. С этой цедью найдём на каждом промежутке $\mathrm{Sup}\,|f_n(x) - f(x)|$.

а) $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{[0;x_0]}|f_n(x) - f(x)| = \mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{[0;x_0]} x^n = x_0^n$.

Так как $0 < x_0 < 1$, то $x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\mathop{\mathrm{Sup}}\limits_{[0;x_0]}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$, и, следовательно, согласно пределению 2, последовательность $\{x^n\}$ сходится равномерно на сегменте

$0 \le x \le x_0 < 1$.

б) $\operatorname*{Sup}_{[0;1)}|f_n(x) - f(x)| = \operatorname*{Sup}_{[0;1)} x^n$.

Так как x принимает значения, сколь угодно близкие к 1, то и x^n при любом n принимает значения, сколь угодно близкие к единице, причём $x^n < 1$. Поэтому $\operatorname*{Sup}_{[0;1)} x^n = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, условие $\operatorname*{Sup}_{[0;1)}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ не выполнено, и, значит, последовательность $\{x^n\}$ сходится на промежутке $0 \le x < 1$ неравномерно.

в) Сегмент $0 \le x \le 1$ включает в себя полусегмент $0 \le x < 1$, а так как на этом полусегменте последовательность $\{x^n\}$ сходится неравномерно, то и на сегменте $0 \le x \le 1$ она сходится неравномерно.

Этот же факт можно установить другим способм, если воспользоваться теоремой 23. Согласно этой теореме предельная функция $f(x)$ последовательности $\{x^n\}$ была бы непрерывной на сегменте $0 \le x \le 1$, если бы эта последовательность сходилась равномерно на данном сегменте (поскольку все члены последовательности $\{x^n\}$ – непрерывные функции). Однако предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{если } \ x = 1. \end{cases}$$

не является непрерывной на сегменте $0 \le x \le 1$ (она разрывна в точке $x = 1$), и, значит, последовательность $\{x^n\}$ сходится на этом сегменте неравномерно.▲

5. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \frac{n}{x+n}$, на промежутке:

а) $0 \le x \le x_0$, где $x_0 > 0$ – заданное число;

б) $0 \le x < +\infty$.

△ Очевидно, что $\forall x \ge 0$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x+n} = 1,$$

т.е. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке полупрямой $0 \le x < +\infty$, и предельная функция $f(x) = 1$. Для исследования этой последовательности на равномерную сходимость на каждом из указанных промежутков воспользуемся определением 2 равномерной сходимости функциональной последовательности.

а) $\operatorname*{Sup}_{[0;x_0]} |f_n(x) - f(x)| = \operatorname*{Sup}_{[0;x_0]}\left|\frac{n}{x+n} - 1\right| = \operatorname*{Sup}_{[0;x_0]} \left(1 - \frac{n}{x+n}\right)$.

Функция $\frac{n}{x+n}$ на сегменте $0 \le x \le x_0$ принимает наименьшее значение при $x = x_0$, поэтому функция $1 - \frac{n}{x+n}$ принимает наибольшее на этом сегменте значение при $x = x_0$. Это значение равно $1 - \frac{n}{x_0+n} = \frac{x_0}{x_0+n}$. Таким образом, $\operatorname*{Sup}_{[0;x_0]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{x_0}{x_0+n} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, согласно определению 2, что последовательность $\left\{\frac{n}{x+n}\right\}$ сходится равномерно на сегменте $0 \le x \le x_0$.

б) Так как $\frac{n}{x+n} \to 0$ при $x \to +\infty$ (для любого $n \in \mathbb{N}$), то функция $\left(1 - \frac{n}{x+n}\right)$ принимает значения, сколь угодно близкие к 1 и при этом $(1 - \frac{n}{x+n}) < 1 \;\; \forall x$. Поэтому $\operatorname*{Sup}_{[0;+\infty)} \left(1 - \frac{n}{x+n}\right) = 1$ для любого n и, следовательно, $\operatorname*{Sup}_{[0;+\infty)} |f_n(x) - f(x)|$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, а это означает, что последовательность $\{\frac{n}{x+n}\}$ сходится на полупрямой $0 \le x < +\infty$ неравномерно.▲

6. Исследовать ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ на равномерную сходимость на промежутке: а) $0 \le x \le x_0$, где $0 < x_0 < 1$; б) $0 \le x < 1$.

△ В примере 2 было установлено, что областью сходимости данного ряда является интервал $(-1 < x < 1)$, причём $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$. Отсюда следует, что ряд сходится на каждом из промежутков а) и б). Для ответа на вопрос о равномерной сходимости данного ряда на указанных промежутках исследуем последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда на равномерную сходимость на этих промежутках.

Так как $S_n(x) = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$, то при $0 \le x < 1$

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

а) На сегменте $0 \le x \le x_0$, функция $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ имеет, очевидно, наибольшее значение при $x = x_0$, и, следовательно,

$$\operatorname*{Sup}_{[0;x_0]} |S_n(x) - S(x)| = \frac{x_0^{n+1}}{1-x_0} \to 0 \;\text{ при }\; n \to \infty.$$

Это означает, что последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $0 \le x \le x_0$, т.е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится равномерно на этом сегменте.

б) На полусегменте $0 \le x < 1$ функция $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ является неограниченной при любом n, поскольку $\lim_{x\to 1-0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty$. Следовательно, условие $\operatorname*{Sup}_{[0;x_0]} |S_n(x) - S(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ не выполнено, и, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ сходится неравномерно на полусегменте $0 \le x < 1$.▲

7. Доказать с помощью критерия Коши, что последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x) = \sin\frac{x}{n}$, сходится неравномерно на всей прямой $-\infty < x < +\infty$.

△ Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ для любого x, то $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{x}{n} = 0$, т.е. последовательность $\{\sin\frac{x}{n}\}$ сходится на всей прямой, и предельная функция $f(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty$.

Чтобы доказать, опираясь на критерий Коши, что сходимость последовательности $\{\sin\frac{x}{n}\}$ не является равномерной на всей прямой, нужно доказать, что $\exists\ \varepsilon > 0$, такое, что $\forall\ N\ \exists\ n > N$, $p \in \mathbb{N}$ и x, для которых выполнено неравенство

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \geq \varepsilon. \tag{4}$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{4}$ и $\forall N$ выберем какое-нибудь $n > N$ и положим $p = 2n$ и $x = x_n := \frac{\pi n}{2}$. Тогда

$$|f_n(x_n) - f_{n+p}(x_n)| = \left|f_n\left(\frac{\pi n}{2}\right) - f_{3n}\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right| =$$

$$= \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

Таким образом, выполнено условие (4) и, значит, последовательность $\{\sin\frac{x}{n}\}$ сходится неравномерно на всей прямой ($-\infty < x < +\infty$).

Отметим, что на любом сегменте сходимость данной последовательности является равномерной (докажите это).▲

8. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^4x^2}$ сходится равномерно на полупрямой $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geq 0\}$.

△ Каждый член ряда $u_k(x) = \frac{x}{1+k^4x^2}$ является неотрицательной непрерывной функцией на полупрямой $\mathbb{R}_+$, причём $u_k(0) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} u_k(x) = 0$. Найдём наибольшее значение функции $u_k(x)$ на полупрямой $\mathbb{R}_+$. С этой целью вычислим производную $u_k'(x)$ и приравняем её нулю:

$$u_k'(x) = \frac{1\cdot(1 + k^4x^2) - x\cdot 2k^4x}{(1 + k^4x^2)^2} = \frac{1 - k^4x^2}{(1 + k^4x^2)^2} = 0.$$

Отсюда находим: $x = \frac{1}{k^2}$ (другой корень этого уравнения $x = -\frac{1}{k^2}$ лежит вне полупрямой $\mathbb{R}_+$). При переходе через точку $x = \frac{1}{k^2}$ производная $u_k'(x)$ изменяет знак с плюса на минус, поэтому в точке $x = \frac{1}{k^2}$ функция $u_k(x)$ имеет наибольшее значение:

$$\max_{R_+} u_k(x) = u_k\left(\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2k^2}.$$

Следовательно,

$$|u_k(x)| = u_k(x) \leq \frac{1}{2k^2}, \quad x \in R_+.$$

Таким образом, числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$ является мажорантным рядом для данного функционального ряда $\sum_{k=1} \frac{x}{1+k^4x^2}$, и так как мажорантный ряд сходится (это умноженный на $\frac{1}{2}$ обобщённый гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ с $\alpha = 2 > 1$), то по признаку Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на полупрямой $\mathbb{R}_+$.▲

9. Привести пример функционального ряда, который сходится равномерно на некотором множестве, но не имеет сходящегося мажорантного ряда.

△ Покажем, что таким рядом является, например, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, где $u_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} = const$, на любом заданном множестве X.

В самом деле, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ является рядом Лейбница и, следовательно, сходится, а поскольку его члены являются постоянными функциями, то последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда не зависит от x и, значит, сходится равномерно к сумме ряда на любом заданном множесве X.

Так как $|u_k(x)| = \frac{1}{k}$, то любой мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ для нашего функционального ряда удовлетворяет условию $p_k \geq \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, а поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится (это гармонический ряд), то и любой мажорантный ряд расходится (по признаку сравнения).

Таким образом, функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, где $u_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} = const$, сходится равномерно на любом заданном множестве X, но не имеет сходящегося мажорантного ряда. ▲

10. Исследовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \quad (\alpha > 0) \tag{5}$$

на равномерную сходимость на промежутке:

а) $\varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \pi$;

б) $0 < x < 2\pi$.

△ В примере 2 из п. 3 §3 было установлено, что этот ряд сходится в каждой точке x числовой прямой. Если $\alpha > 1$, то данный ряд (5) сходится равномерно на всей числовой прямой по признаку Вейерштрасса – в качестве сходящегося мажорантного ряда можно взять ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ и, следовательно, ряд (5) при $\alpha > 1$ сходится равномерно на промежутках а) и б).

Пусть $0 < \alpha \leq 1$.

а) Введём обозначения

$$a_k(x) = \sin kx, \quad b_k(x) = \frac{1}{k^{\alpha}}$$

и применим признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда (теорема 21). Воспользуемся оценкой (4) для частичной суммы ряда (5), полученной в упомянутом примере 2, записав её в виде

$$|S_n(x)| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\Big| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \ne 2m\pi. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что

$$|S_n(x)| \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} \ \text{ дл любого } n \text{ при } \ \varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ равномерно ограничена на сегменте $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$.

Последовательность $\{b_n(x)\} = \{\frac{1}{n^\alpha}\}$ не зависит от x и, следовательно, монотонно и равномерно на сегменте $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, выполнены оба условия теоремы 21, и, значит, данный ряд (5) при $0 < \alpha \le 1$ сходится равномерно на сегменте $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ по признаку Дирихле.

б) Если $0 < x < 2\pi$, то знаменатель $|\sin\frac{x}{2}|$ в неравенстве (6) при $x \to 0$ (и также при $x \to 2\pi$) принимает сколь угодно малые значения, поэтому это неравенство, хотя и гарантирует ограниченность последовательности $\{S_n(x)\}$ при каждом $x \in (0; 2\pi)$, но не позволяет сделать вывод о равномерной ограниченности этой последовательности на интервале $(0; 2\pi)$ и, значит, нельзя воспользоваться, как в п. а), признаком Дирихле.

Докажем с помощью критерия Коши, что ряд (5) сходится неравномерно на интервале $(0; 2\pi)$ при $0 < \alpha \le 1$. Для этого нужно доказать, что $\exists \varepsilon > 0$, такое, что $\forall N \ \ \exists n > N, p \in \mathbb{N}$ и $x \in (0; 2\pi)$, для которых выполнено неравенство

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\Big| \ge \varepsilon.$$

Покажем, что можно взять $\varepsilon = \frac{2}{5}$ и также любое $\varepsilon < \frac{2}{5}$. С этой целью $\forall N$ возьмём какое-нибудь $n > N$, $p = 4n$ и $x = x_n := \frac{\pi}{6n}$. Если $n + 1 \le k \le n + p = 5n$, то $\frac{\pi}{6} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\pi}{6} \le kx_n \le \frac{5\pi}{6}$, поэтому $\sin kx_n \ge \frac{1}{2}$, а $\frac{1}{k^\alpha} \ge \frac{1}{(n+p)^\alpha} = \frac{1}{(5n)^\alpha}$.

Следовательно,

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin kx_n}{k^\alpha}\Big| \ge \frac{\frac{1}{2} \cdot p}{(5n)^\alpha} = \frac{2n}{(5n)^\alpha} \ge \frac{2n}{5n} = \frac{2}{5}.$$

Это доказывает, что при $0 < \alpha \le 1$ ряд (5) сходится неравномерно на интервале $(0; 2\pi)$.▲

11. Исследовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx \cdot \operatorname{arctg} kx}{k^\alpha} \ \ (\alpha > 0)$$

на равномерную сходимость на сегменте $\varepsilon \le x \le 2\pi - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < \pi$.

$\triangle$Введём обозначения:

$$a_k(x) = \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad b_k(x) = \operatorname{arctg} kx$$

и применим признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда (теорема 22).

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$$

сходится равномерно на сегменте $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ (это доказано в примере 10).

Последовательность $\{b_n(x)\} = \{\operatorname{arctg} nx\}$ равномерно ограничена на сегменте $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ (поскольку $0 \le \operatorname{arctg} kx < \frac{\pi}{2}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$) и при каждом $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ она является монотонной.

Таким образом, выполнены оба условия теоремы 22, и, значит, данный ряд сходится равномерно на сегменте $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ по признаку Абеля.$\blacktriangle$

12. Доказать, что последовательность $\{f_n(x)\} = \{\frac{nx}{1+nx}\}$ сходится неравномерно на сегменте $0 \le x \le 1$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx. \tag{7}$$

$\triangle$ Запишем $f_n(x)$ в виде $f_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$. Если $0 < x \le 1$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0$, поэтому $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Если же $x = 0$, то $f_n(0) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Таким образом,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Предельная функция $f(x)$ разрывна в точке $x = 0$, в то время как все функции $f_n(x)$ непрерывны на сегменте $[0;1]$, поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится неравномерно на этом сегменте.

Вычислим $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ и $\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\, dx$:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{1}{1+nx}\right] dx = \left[x - \frac{1}{n}\ln(1+nx)\right]\Big|_0^1 = 1 - \frac{\ln(n+1)}{n},$$

и так как $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$;

$$\int_0^1 \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot dx = 1.$$

Итак, левая и правая части искомого равенства (7) равны 1, т.е. это равенство справедливо. ▲

13. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ можно почленно интегрировать на сегменте $0 \le x \le \frac{1}{2}$, и с помощью почленного интегрирования найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$.

△ Все члены данного ряда являются непрерывными функциями на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$, и ряд сходится равномерно на этом сегменте (это доказано в примере 6), поэтому данный ряд можно почленно интегрировать на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$ (по теореме 26). Учитывая, что сумма ряда равна $\frac{x}{1-x}$, и интегрируя ряд почленно на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$, получим равенство

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^k dx. \tag{8}$$

Вычислим интегралы, входящие в это равенство:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[-1 + \frac{1}{1-x}\right] dx = [-x - \ln(1-x)]\Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.$$

Равенство (8) можно теперь записать так:

$$\ln 2 - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} - \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \ln 2. \quad ▲$$

14. Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ можно почленно дифференцировать на сегменте $0 \le x \le \frac{1}{2}$, и с помощью почленного дифференцирования найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

△ Все члены данного ряда имеют непрерывные производные $(x^k)' = kx^{k-1}$ на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$; данный ряд сходится на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$ и его сумма равна $\frac{x}{1-x}$; ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$, составленный из произвольных членов данного ряда, сходится равномерно на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$ – это следует из того, что мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$ на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$ сходится (это можно доказать с помощью признака Даламбера или признака Коши). Таким образом, для данного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ выполнены все условия теоремы 28, поэтому ряд можно дифференцировать почленно на сегменте $[0, \frac{1}{2}]$:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(x^k)', \quad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$\text{т.е.} \quad \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Полагая в последнем равенстве $x = \frac{1}{2}$, получаем:

$$4 = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Умножив обе части равенства на $\frac{1}{2}$, находим искомую сумму числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = 2. \quad \blacktriangle$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы.

17. Найдите область сходимости и предельную функцию $f(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, если:
а)$f_n(x) = \arcsin(x^n)$; б)$f_n(x) = \operatorname{arctg}(x^n)$; в)$f_n(x) = \sqrt[n]{x}$;
г)$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$; д)$f_n(x) = e^{-nx}$; е)$f_n(x) = e^{-nx^2}$;
ж)$f_n(x) = \ln(1-x^n)$; з)$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$; и)$f_n(x) = x^n - x^{n+1}$;
к)$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$; л)$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

18. Найдите области сходимости и абсолютной сходимости функционального ряда:
а)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}$; б)$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$; в)$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kx}$; г)$\sum_{k=1}^{\infty} kxe^{-kx}$;
д)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$; е)$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)$; ж)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(kx)}{k^2+|x|}$;
з)$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin(3^{-k}x)$; и)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}$; к)$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$.

19. Исследуйте функциональные последовательности из задания 17 на равномерную сходимость: 1) во всей области сходимости, 2) на каждом сегменте из области сходимости.

20. Исследуйте функциональные ряды из задания 18 на равномерную сходимость: 1) во всей области сходимости, 2) на каждом сегменте из области сходимости.

21. Докажите, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на сегменте $[a, b]$, и выясните, сходится ли она равномерно на этом сегменте и справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx,$$

если:

а) $f_n(x) = \frac{x\sin nx}{n}$, $[a;b] = [0;\pi]$,
б) $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n}x}$, $[a;b] = [0;1]$,
в) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $[a;b] = [0;1]$,
г) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $[a;b] = [0;1]$,
д) $f_n(x) = n\cos x \sin^n x$, $[a;b] = [0;\frac{\pi}{2}]$,
е) $f_n(x) = \sqrt{n}\cos x \sin^n x$, $[a;b] = [0;\frac{\pi}{2}]$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

3. а) $\frac{3}{2}$; б) 1; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{1}{4}$; д) 2. **5.** shx; chx; $\ln(1+x)$.

7. а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится при $0 < a < e$, расходится при $a \geq e$; е) сходится.

8. а) сходится; б) сходится; в) сходится при $0 < a < e$, расходится при $a \geq e$; г) сходится при $0 < a < 1$, расходится при $a \geq 1$; д) сходится; е) сходится.

11. а) расходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится при $\alpha < -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \geq -\frac{1}{2}$; д) сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$; е) сходится при $\alpha < -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ ж) сходится; з) сходится при $\alpha < 0$, расходится при $\alpha \geq 0$; и) расходится; к) сходится; л) сходится; м) сходится; н) сходится при $\alpha > 2$, расходится при $\alpha \leq 2$; о) сходится; указание: начиная с некоторого номера $\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln\ln k}} < \frac{1}{k^2}$; п) расходится; указание: начиная с некоторого номера $\frac{1}{(\ln k)^{\ln\ln k}} = \frac{1}{e^{(\ln\ln k)^2}} > \frac{1}{e^{\ln k}} = \frac{1}{k}$; р) сходится; указание: начиная с некоторого номера $\frac{1}{(\ln\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln\ln\ln k}} < \frac{1}{k^2}$; с) сходится; т) сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$; у) сходится; ф) расходится; указание: воспользоваться неравенством $k! < \kappa^k$ при $k > 1$.

13. а) сходится условно; б) сходится абсолютно; в) сходится условно; г) сходится абсолютно; д) сходится условно; е) сходится условно; ж) сходится условно; з) сходится условно; и) сходится условно; к) сходится условно; л) сходится условно; м) сходится абсолютно; н) сходится абсолютно; о) расходится; п) сходится абсолютно при $\alpha > 1$, сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$, расходится при $\alpha \leq 0$.

14. Не следует.

15. Не следует.

16. Не следует.

17. а) $-1 < x \le 1$; $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 1; \end{cases}$,

б) $-1 < x < \infty$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ \frac{\pi}{4}, & x = 1, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 1; \end{cases}$

в) $x \ge 0$; $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$

г) $-\infty < x < \infty$; $f(x) = 0$;

д) $0 \le x < \infty$; $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$

е) $-\infty < x < \infty$; $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \ne 0; \end{cases}$

ж) $-1 < x < 1$; $f(x) = 0$;

з) $-\infty < x < \infty$; $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0; \end{cases}$

и) $-1 < x \le 1$; $f(x) = 0$;

к) $-\infty < x < \infty$; $f(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

л) $-\infty < x < \infty$; $f(x) = 0$.

18. а) сходится абсолютно при $|x| > 1$; б) сходится абсолютно при $x > 0$; в) сходится абсолютно при $x > 0$; г) сходится абсолютно при $x \ge 0$; д) сходится абсолютно при $|x| \ne 1$; е) сходится абсолютно при $-\infty < x < \infty$; ж) сходится абсолютно при $-\infty < x < \infty$; з) сходится абсолютно при $-\infty < x < \infty$; и) сходится условно при $x \ge 0$; к) сходится абсолютно при $-\infty < x < \infty$.

19. а: 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $-1 < a < b < 1$; сходится неравномерно на каждом сегменте $[a, 1]$, где $a > -1$; **б:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте, не содержащем точки $x = 1$, и неравномерно на каждом сегменте, содержащем точку $x = 1$; **в:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $0 < a < b$, и неравномерно на каждом сегменте $[0, b]$; **г:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте; **д:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $0 < a < b$, и неравномерно на каждом сегменте

$[0, b]$; **е:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте, не содержащем точки $x = 0$, и неравномерно на каждом сегменте, содержащем точку $x = 0$; **ж:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на любом сегменте $[a, b]$, где $-1 < a < b < 1$; **з:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте, не содержащем точки $x = 0$, и неравномерно на каждом сегменте, содержащем точку $x = 0$; **и:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $-1 < a < b < 1$; **к:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно нна каждом сегменте, не содержащем точки $x = 0$, и неравномерно на каждом сегменте, содержащем точку $x = 0$; **л:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте, не содержащем точки $x = 0$, и неравномерно на каждом сегменте, содержащем точку $x = 0$.

20. а: 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости; **б:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $0 < a < b$; **в:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $0 < a < b$; **г:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте $[a, b]$, где $0 < a < b$, и неравномерно на каждом сегменте $[0, b]$; **д:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости; **е:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости; **ж:** 1) сходится равномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости; **з:** 1) сходится неравномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости; **и:** 1) сходится равномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости; **к:** 1) сходится равномерно; 2) сходится равномерно на каждом сегменте из области сходимости.

21. а) сходится равномерно, равенство справедливо; б) сходится равномерно, равенство справедливо; в) сходится неравномерно, равенство не справедливо; г) сходится неравномерно, но равенство справедливо; д) сходится неравномерно, равенство не справедливо; е) сходится неравномерно, но равенство справедливо.

Подписано к печати 2015 г.
Тираж 100 экз. Заказ №
Отпечатано в отделе оперативной печати
Физического факультета МГУ