§10 Вектор-функция

~~Опр~~ Начнём с формального опр-ия

Пусть T — нек-ое мн-во вещ-х чисел: $T \subset \mathbb{R}$

Опр Ф-ия, которая каждому $t \in T$ ставит в соотв-ие нек-ый вектор $\vec{r}$ наз-ся вектор-ф-ей аргумента t

Обозн $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Пусть $|\vec{r}(t)| \equiv \rho(t)$ — модуль вектора $\vec{r}$ (скалярная ф-ия t)

Опр Вектор $\vec{a}$ наз-ся пределом вектор-ф-ии $\vec{r}(t)$ в т. $t = t_0$ (при $t \to t_0$), если

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$$

Обозн $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ или $\vec{r}(t) \to \vec{a}$ при $t \to t_0$

Введём декартову систему координат $OXYZ$ и свяжем с ней ортонормированный базис ~~$\vec{i}$~~ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Разложим вектор $\vec{r}(t)$ по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (при каждом фиксиров-ом t)

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} \equiv \{\underbrace{x(t), y(t), z(t)}_{\text{упорядоченная тройка скалярн-х ф-ий}}\}$$

Напомню, что $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ наз-ют коорд-ми вектора $\vec{r}(t)$

Спр-во след-ее утв-ие (о покоординатной сходимости)

Утв $\vec{r}(t) \to \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ при $t \to t_0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x(t) \to a_1 \\ y(t) \to a_2 \\ z(t) \to a_3 \end{cases}$ при $t \to t_0$

необходимо и достаточно

Δ Док-ть самост-но, исп-уя опр-ие предела и выр-ие для модуля $\vec{r} - \vec{a}$ в дек-ых коорд-ах:

$$|\vec{r} - \vec{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2}$$

Перейдём к опр-ию произв-ой вектор-ф-ии

Далее под приращением вектор-ф-ии $\vec{r}(t)$ в т. t (в полной аналогии со ~~скалярным~~ случаем скалярной ф-ии) будем понимать

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, то он наз-ся производной вектор-ф-ии $\vec{r}(t)$ в т-ке t

Обозн $\vec{r}\,'(t)$ или $\dot{\vec{r}}(t)$

Если ввести понятия диффер-ов dt – независимой перем-ой t и $d\vec{r}$ – зависимой векторной перем-ой $\vec{r}$, то производную вектор-ф-ии можно также представить в виде $\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (здесь всё полностью ан-но скалярному случаю, поэтому на некоторых деталях я не останавливаюсь)

Из утв-ия о покоордин-ой сходимости сразу же следует, что

$$\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right\} =$$

$$= \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right\} = \{ \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t) \}$$

Т.е. вычисление произв-ой вектор-ф-ии $\vec{r}(t)$ сводится к вычислению произв-ых её координат (покоордин-му диффер-ию)

Старшие производные $\vec{r}(t)$ определ-ся через младшие точно также, как и произв-ые скал-ых ф-ий

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{и вообще} \quad \frac{d^n\vec{r}}{dt^n} \equiv \frac{d}{dt}\frac{d^{n-1}\vec{r}}{dt^{n-1}}$$

Введём понятие годографа вектор-ф-ии $\vec{r}(t)$

Пусть даны $\vec{r} = \vec{r}(t)$, опред-ая на мн-ве T и некот-ая декартова система координат $OXYZ$:

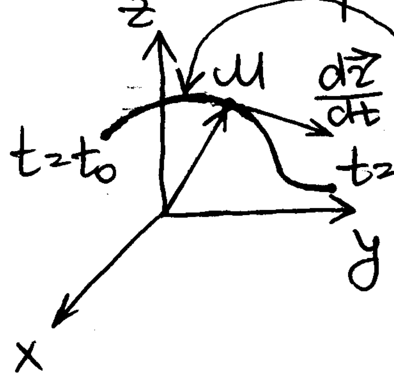
$$\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = \underset{\text{радиус-вектор}}{\overrightarrow{OM}}$$

$O(0,0,0)$, $M = M(x(t), y(t), z(t)) \equiv M(t)$

~~Зам~~ Полагая ~~$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$~~ $\vec{r}(t) \leftrightarrow M(t)$, мы считаем, что вектор

$\vec{r}$ откладывается от начала координат (такой вектор принято называть радиус-вектором)

Опр мн-во $\{M(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in T\}$ наз-ся годографом вектор-фии $\vec{r}(t)$



Изображённая кривая и есть годограф. Иными словами, годограф – мн-во концов радиус-векторов $\vec{r}(t)$ при $t \in T$

Физический смысл годографа – траектория точки M, движущейся по закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Физический смысл произв-ой $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость точки M. Можно док-ть, что вектор скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ явл-ся касательным к годографу

Дополн-но:

Правила диффер-ия вектор-ф-ии

Пусть даны векторные ф-ии $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, и скалярная ф-ия $f = f(t)$

Из опр-ия производной вектор-ф-ии, а также из опр-ий скалярного и векторного произведений векторов вытекает справедл-ть следующих ~~соот~~ формул:

1) $[\vec{z}_1 \pm \vec{z}_2]' = \vec{z}_1{}' \pm \vec{z}_2{}'$

2) $(f \cdot \vec{r})' = f'\vec{r} + f\vec{r}\,'$

3) $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1{}', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2{}')$

4) $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}_1{}', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}_2{}']$

Глава V

Неопределённый интеграл

§1 Определение первообразной

В предыдущей главе мы с вами познакомились с понятием производной ф-ии. Теперь самое время перейти к понятию $\int$-ла

Задача $\int$-ия ф-ий опред-ся как обратная по отношению к диф-ию — она заключается в том, чтобы по заданной на некотором промежутке ф-ии $f(x)$ найти ф-ию, а точнее целое семейство ф-ий, производные от которых на этом промежутке равны ф-ии $f(x)$. Иными словами, требуется восстановить, насколько это возможно, исходную ф-ию $F(x)$, если известна её произв-ая $F'(x) = f(x)$

Такая задача уже возникала у вас,

напр, в механике, когда в случае прямолинейного движения требовалось по известной скорости $v(t)=\frac{dx}{dt}$ или по известному ускорению $a(t)=\frac{d^2x}{dt^2}$ материальной точки определить закон движения $x=x(t)$ этой точки

Перейдём к точным опред-ям. Прежде всего дадим опред-ие **первообра́зной**

Пусть дана ф-я $y=f(\mathbf{x})$: $D_f \supset X$, где X – некоторый промежуток (конечный: отрезок, интервал, полуотр-ок, или ∞-ый: прямая ~~или~~ и полупрямая – неважно)

Опр Ф-ия $y=F(x)$ наз-ся первообра́зной для ф-ии $f(x)$ на X, **если**

$\forall x \in X \Rightarrow F'(x)=f(x)$

Примеры

1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$. Тогда $F(x)=\ln x$ – одна из первообр-ых для ф-ии $1/x$ на промежутке $(0,+\infty)$, т.к. при данных $x \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}=f(x)$

Пусть теперь $f(x)=\frac{1}{x}$, $x<0$. Тогда $F(x)=\ln(-x)$, т.к. $F'(x) = \ln'(-x)\cdot(-x)' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$ **13.7**

Объединяя эти результаты, приходим к выводу, что ф-ция

$$F(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(+x), & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases}$$

явл-ся первообразной для ф-ции $\frac{1}{x}$ на промежутках $(0,+\infty)$ и $(-\infty,0)$

Подчеркнём, что понятие первообразной ~~для ф-ции~~ введено лишь для множеств, явл-ся промежутками. Тем самым, мы можем говорить, что $\ln|x|$ явл-ся первообр-й для $1/x$ на пром-ах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$, $(1,2]$ и т.д. (вообщем на любом пром-~~ке~~, не содерж-ем точки нуль), но не на объединении промеж-ов (или на ещё более сложных множ-ах). Напр, мы не можем сказать, что $\ln|x|$ явл-ся первообр-ой для ф-ции $1/x$ на мн-**ве** $(-\infty,0)\cup$ $\cup(0,+\infty)$

(2) $f(x) = |x|$. Тогда $F(x) = \frac{1}{2}x|x|$ — первообр-ая для ф-ции $|x|$ на всей вещ-ой оси

Проверим это. Воспользовавшись очевидным соотн-ем

$|x|' = \operatorname{sign} x$, $x \neq 0$,

имеем

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cdot x'|x| + \frac{1}{2}x|x|' = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot|x| + \frac{1}{2}\overbrace{x\operatorname{sign}x}^{\equiv |x| \text{ (при } \forall x\in\mathbb{R})} = |x|$$

Остаётся показать, что

$F'(0) = f(0) = 0$ – убедитесь самост-но

$$\left(F'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cancel{(0+\Delta x)}|0+\Delta x| - \frac{1}{2}0\cdot|0|}{\cancel{\Delta x}} = \frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = 0 = f(0)\right)$$

Теперь сформулируем т.н. основную теорему $\int$-льного исчисления

Теорема Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообр-ые для ф-ии $f(x)$ на промежутке X, то

$F_1(x) - F_2(x) \equiv C$ при $\forall x \in X$

Δ При всей очевидности утв-я теоремы строго док-ть её мы пока не можем (но обязат-но док-м позже с помощью теоремы Лагранжа)

Утв-ие. Если $F_1(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на пром-ке X, то

1) для любой постоянной C

$\Rightarrow F(x) = F_1(x) + C$ – также одна из первообр-ых для $f(x)$ на X

2) любая первообр-ая $F(x)$ для $f(x)$ на X имеет вид

$F(x) = F_1(x) + C$,

где C – некот-ая постоянная

Δ1) Т.к. $F_1(x)$ – первообр-ая для $f(x)$, то $F_1'(x) \equiv f(x)$ (тождеств-но при $x \in X$), а поэтому $F'(x) = (F_1(x) + C)' = F_1'(x) + \cancel{C'}_{0} \equiv f(x)$. Но это и значит, что $F_1(x)$ – также одна из первообр-х для $f(x)$ ∆̸1)

Δ2) Вторая часть утв-ния явл-ся мгновенным следств-м сформулир-ой выше основной теоремы $\int$-льного исчисления (которая, напомню, в свою очередь, будет док-на позже) ∆̸2)

Из последнего утв-ния (из обеих частей) вытекает, что мн-во

$$\{F(x) = F_1(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{matrix}\text{мн-во всех перво-}\\\text{обр-ых для } f(x) \text{ на } X\end{matrix}\right\}$$

представляет собой мн-во всех первообр-х для ф-ии $f(x)$ на X

§2 Неопределённый интеграл

Опр Мн-во всех первообразных для ф-ии $f(x)$ на промежутке X наз-ся неопр-ым $\int$-ом от $f(x)$ на X

Обозн $\int f(x)\,dx$

При этом исполь-ся след-ая терминология:

$f(x)$ – подынтегральная ф-ия

$f(x)dx$ – подинтегральное выраж-ие **13.10**

Операция вычисления или нахождения ~~инт~~ неопред-го интеграла наз-ся интегрированием (по x). Вместо слов найти или вычислить (неопр-й) интеграл (по x) от ф-ии f, говорят также взять (неопр-ый) интеграл (по x) от ф-ии f

В силу сказанного в конце §-фа 1, имеем

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (*)$$

где $F(x)$ – любая фиксированная первообразная, а C – произвольная константа (под фиксирован-тью первообр-ой мы подразумеваем тот факт, что $F(x)$ не зависит от C, т.е., что $F(x)$ едина для всех C)

Следует подчеркнуть, что на самом деле символ $\int f(x)dx$, а вместе с ним и выражение $F(x)+C$ имеют двойной смысл

I) Во-первых, символом $\int f(x)dx$ обозначают неопр-ый интеграл в собственном смысле, т.е. совокупность всех первообр-х данной ф-ии f на пром-ке X. Но тогда (при таком понимании интеграла) следует признать (в целях сокращения выкладок так всегда и поступают), что

$$F(x)+C \equiv \{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\},$$

либо вместо рав-ва $\int = F(x)+C$, писать

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C \mid C\in\mathbb{R}\}$$

(а этого соотв-но избегают)

II) Во-вторых, символом неопр-го $\int$-ла часто обозначают не мн-во всех первообр-ых, а всего-навсего ф-ию двух аргум-в x и C:

$$\int f(x)dx = \varphi(x,c) = F(x)+C,\ x\in X,\ C\in\mathbb{R},$$

которая при каждом фиксир-ом C даёт нам какую-то первообр-ю и наоборот – каждая первообр-ая получается из ф-ии $\varphi(x,c)$ фиксацией второго арг-та некоторым $c=c_0$:

$$\{\Phi_c(x)=\varphi(x,c)\} = \{\text{мн-во всех первообр-х}\}$$

параметр, т.е. мы воспринимаем $\Phi_c(x)$ как отдельные ф-ии*, отвеч-ие различным зн-ям C (мн-во всех таких ф-ий наз-ют семейством ф-ий по параметру C)

Чтобы ~~различать~~ от отличать от предыдущей последнюю трактовку символа неопр-го $\int$-ла от $f(x)dx$,

$\int f(x)dx$, понимаемый во втором смысле, часто называют квадратурой от ф-ии $f(x)$ на пром-ке X. Т.о., квадратура – это по сути полноценная ф-я двух аргументов x и C

Заметим, что если положить C равным, напр, $1, \sqrt{2}$ или даже просто C_0 (в том смысле, что перестать рассм-ать C как произвольное число), то соотв-ее выр-ие: $F(x)+1$ и т.д., уже нельзя ~~будет~~ называть квадратурой (и тем более неопр-ым $\int$-ом), т.к. оно явл-ся всего лишь одной из первообр-ых ф-ии $f(x)$ (его часто наз-ют конкретной первообр-й). В противовес конкретным первообр-м квадратуры наз-ют ещё произвольными перв-ми

Итак, $\int f(x)dx$ и $F(x)+C$ можно воспринимать и как мн-во всех перв-ых (так чаще поступают в курсе математ-го анализа), и как фиксированную, но произвольную первообр-ю (так чаще поступают в курсе дифференциальных ур-ий)

В соответствии с вышесказанным мы будем воспринимать $\int$-л исключительно в первом смысле (т.е. как неопр-ый $\int$-л, а не как квадратуру)

~~Отмечу~~ Дополн-но:

⌈Отмечу, что иногда различие между неопредел-ми $\int$-ми и квадратурами проявляет себя довольно сильно, напр, в случае разности неопр-х $\int$-ов/квадратур от одной и той же ф-ии

В анализе сумма и произведение неопр-х $\int$-ов неопредел-го $\int$-ла на число понимаются как соответств-ие операции над множествами первообр-ых. В частности, в случае разности неопред-ых $\int$-ов от одной и той же ф-ии f имеем

$\int f(x)dx - \int f(x)dx = \{$мн-во всех первообр-ых для $f(x)\} - \{$мн-во всех первообр-ых для $f(x)\} \equiv$

$\equiv \{$мн-во всевозможных разностей первообр-ых для $f(x)\} = \{\overbrace{F_2(x) - F_1(x)}^{\equiv C} \mid F_1(x)$ и $F_2(x)$ – произвольные первообр-ые$\} = \underbrace{\{C \mid C \in \mathbb{R}\}}_{} \equiv C$

короткое обозн-ие

Этот результат можно получить более компактным образом, если воспользоваться выраж-ми (*) для неопред-го ∫-ла с разными постоянными C:

разность произвольных constant есть произв-ая константа

$$\int f(x)dx - \int f(x)dx = (F(x)+C_1)-(F(x)+C_2) = C_1 - C_2 \equiv C$$

Понятно, что нам следует использовать разные постоянные в представлении этих ∫-ов, т.к. мы вычитаем всевозможные, а значит в том числе (и даже прежде всего) различные первообр-ые

В отличие от анализа в курсе диф-ых ур-й под $\int f(x)dx$ понимается произвольная фиксированная первообр-ая, причём слово фиксир-ая означает, что в контексте любого выр-ия, формулы или соотн-ия, содержащих несколько ∫-ов от одной и той же ф-ии f, речь идёт об одной и той же первообр-ой, напр,

$$\int f(x)dx - \int f(x)dx = (F(x)+C)-(F(x)+C) \equiv 0$$

(и там это очень существенно!)

Итак, разность неопред-ых ∫-ов от одной

ф-ии равна произвольной постоянной (точнее мн-ву ф-ий, каждая из которых $\equiv C$):

$$\int f(x)dx - \int f(x)dx = C,$$

а разность квадратур — это тождеств-й нуль:

$$\int f(x)dx - \int f(x)dx = 0$$

В заключение обсуждения понятия неопред-го ∫-ла обратим внимание на след-ий момент. В выражении (*)

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

для неопр-го ∫-ла мы имеем право исполь-ать любую первообр-ю — напомню ещё раз, что мы уже док-ли это в конце §-фа 1. Тем не менее, могут возникнуть сомнения: а вдруг при подстановке в (*) другой первообр-ой мы будем получать новый результат? Чтобы их полностью развеять, полезно непосредственной проверкой убедиться в том, что это не так.

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообр-ые для ф-ии $f(x)$ на промежутке X. Согласно основной теореме ∫-ного исчисления $F_1(x) - F_2(x) \equiv C_0$, где $C_0 = const$

Тогда для ∫-ла от $f(x)$ имеем

$\int f(x)dx = F_1(x) + C = F_2(x) + (F_1(x) - F_2(x)) +$ **13.16**

$+ C = F_2(x) + \underbrace{(C_0 + C)}_{\equiv C} = F_2(x) + C$ ч.т.д.

поскольку C – произвольное вещ-ое число, то $C_0 + C$ – также может принимать любые вещ-ые знач-я (в связи с чем для наглядности сумму $C_0 + C$ обозначают исходной буквой c)

Зам-ие. Очень часто (и мы сейчас так сделали) при док-ве формул, содержащих произвольные постоянные (описывающие мн-ва тех или иных первообр-ых) ограничиваются заменами вида $C_1 + C_2 = C$ или $C_1 + C \to C$ (сумма произвольных constant есть произв-ая константа) и т.п., подразумевая, но не уточняя, что на самом деле речь идёт о совпадении множ-в, стоящих в левой и правой частях доказыв-ой формулы. Напр, использованное нами равенство: $F_2(x) + C_0 + C = F_2(x) + C$ означает, что

$$\{F_2(x) + C_0 + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \{F_2(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

◁ Мы тоже для краткости и дальше будем так поступать (в частности, при док-ве того, что $\int k f(x)dx = k\int f(x)dx$ при $k\neq 0$)

Пример

(3) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$,

т.к. $(-\cos x + C)' = -(\cos x)' + \underbrace{(C)'}_{0} = +\sin x$

Может возникнуть вопрос: а зачем здесь dx? Почему нельзя написать просто $\int \sin x$?

Назначение у множителя dx двоякое. Во-первых он указывает на переменную ∫-ия: иногда ф-ия под знаком ∫-ла зависит от нескольких переменных и тогда (при отсутствии диф-ла) будет непонятно, по какой у них берётся неопред-й ∫-ал. Но даже если подынтегральная ф-ия зависит только от одной перем-ой, то ∫-ал вполне может браться и по любой другой перем-ой. Напр,

$\int \sin x\, dy = y\sin x + C$

Проверяем:

$$\frac{d(y\sin x + C)}{dy} = \sin x \overbrace{\frac{dy}{dy}}^{1} + \overbrace{\frac{dC}{dy}}^{0} = \sin x$$

считается const-ой

Но одной только этой причины недостаточно для того, чтобы полностью понять смысл наличия диф-ла dx под знаком $\int$-ла. Ведь остаётся непонятным, а причём здесь буква d, т.е. причём диффер-ал – почему нельзя было бы просто написать, скажем, $\int \sin x, x$ или как-н наподобие?

Ответом на этот вопрос явл-ся второе назначение диф-ла dx – он обеспечивает инвариантность формы подынтеграль-го выр-ия

Допустим, что мы не знаем как выглядит под$\int$-ное выраж-е неопр-го $\int$-ла, т.е. самостоятельно вводим обозначение вида

$$F(x) + C = \int \boxed{\quad x \quad}$$

для мн-ва всех первообр-х $F(x)+C$ ф-ии $f(x)$.

При этом мы стремимся к тому, чтобы выр-ие в прямоуг-ке обладало свойством inv-ти формы, т.е., чтобы

$$F(x(t)) + C = \int \boxed{\quad x(t) \quad}$$

Попробуем, напр, сперва, для случая независимой перем-ой x положить

13.19

$\boxed{\;x\;} \equiv F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) + C = \int f(x)$

Тогда, если $x = x(t)$, где t – независимая переменная, то в соотв-ии с этим опр-ем имеем

$$F(x(t)) = \int [F(x(t))]' = \int F'(x(t)) \cdot x'(t) =$$

$$= \int f(x(t)) \cdot x'(t) \neq \int f(x(t))$$

Тем самым мы видим, что такое подынтегральное выр-ие ($\boxed{x} = f(x)$) не обладает св-ом inv-ти формы

Попробуем теперь для случая независимой перем-й x положить

$$\boxed{\;x\;} \equiv dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

Тогда, если $x = x(t)$, где t – незав-ая перем-я, то в соотв-вии с последним опр-ем имеем

$$F(x(t)) + C = \int dF(x(t)) = \int F'(x(t)) \cdot x'(t)dt =$$

$$= \int F'(x(t))\,dx(t) = \int f(x(t))\,dx(t)$$

это формула наз-ся также формулой замены перем-ой в

впрочем, можно было и сразу воспольз-ся св-ом inv-ти формы 1-го диф-ла

неопр-м $\int$-ле (мы её потом ещё раз док-ем)

Т.о., подынт-ое выр-ие вида $f(x)dx = F'(x)dx$ благодаря наличию множителя dx уже обладает св-ом inv-ти формы

Дополн-но:

Ещё к вопросу об inv-ти формы (более широкий, обобщающий взгляд)

Пусть иу соотн-ия

$$\hat{A}\,[\text{выр-ие}(x)] = \text{Выр-ие}(x) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \hat{A}\,[\text{выр-ие}(x(t))] = \text{Выр-ие}(x(t)),$$

где $\hat{A}$ – некоторый оператор, напр,

$$\hat{A} \begin{cases} d\,[f(x)] = f'(x)dx & (1) \\ \int[f(x)dx] = F(x) + C & (2) \end{cases}$$

Тот факт, что соотн-ие $(*)$ продолжает сохранять силу и в случае $x = x(t)$ естественно интерпретировать как сохранение (inv-сть) формы этого соотн-я при подстановке $x \to x(t)$

В применении же к диф-лу и $\int$-лу мы говорим соотв-но об inv-ти формы диф-ла, т.е. правой части соотн-я (1) и об inv-ти подынтегрального выр-ия, т.е. опер-ра $\hat{A} = \int$ иу левой части (2). В связи с этим возникают закономерные вопросы: чем вызвано это нарушение симметрии? Почему мы не говории об inv-ти формы самих соотн-ий (1) и (2) и **нельзя** ли тогда говорить об inv-ти формы поддифференциального выр-я или inv-ти формы неопред-го $\int$-ла? В принципе можно (в отношении $\int$**ла** так даже иногда и поступают, т.е. говорят об inv-ти формы самого неопр-го $\int$ла). Но просто так уж исторически сложилось, что термин inv-ть формы "прилип" к конструкции вида функция$(x) \cdot \mathbf{d}x$, $\overset{\text{именно}}{\text{поэтому}}$ (и только поэтому) принято говорить об inv-ти правой части (1) (т.к. в правой части наход-ся выр-ие указ-го вида: $f'(x)dx$), т.е. об inv-ти формы самого диф-ла, и об inv-ти формы арг-та оператора $\hat{A} = \int$ из соотн-ия (2) (т.к. именно в его аргументе располагается искомая конструкция: $f(x)\mathbf{d}x$), т.е. об inv-ти формы выр-ия, стоящ**его** под знаком $\int$-ла

Поставим вопр**ос**: для каких ф-ий $f(x)$ существует первообр-я $F(x)$ (а значит и не**опр**-й интеграл)? Ниже будет док-но, что перв-ая сущ-ет для любой непр-ой ф-ии $f(x)$.

Однако некоторые разрывные ф-ии также имеют перв-ые

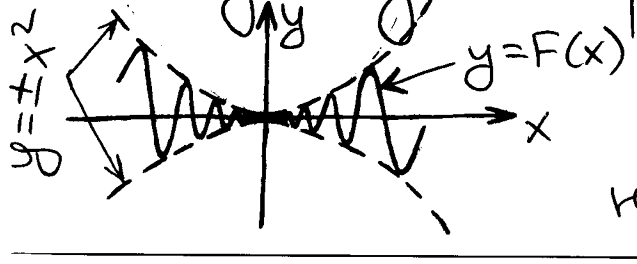
Дополн-но:

Заметим, что наличие точек разрыва у под∫льной ф-ии $f(x)$ означает наличие точек разрыва у произв-й первообр-й $F(x)$ для $f(x)$, т.е. у $F'(x)$. Справ-во утв-ие, что если ф-ия $F(x)$ диф-ма всюду на нек-ом пром-ке X, то её произв-ая $F'(x)$ на этом пром-ке может иметь <u>лишь</u> точки разрыва II-го рода (т.е. у неё не может быть точек разрыва I-го рода и точек устранимого разрыва на пром-ке X).

В соотв-вии с этим утв-ем, первообр-ая $F(x)$ для ф-ии $f(x)$ на пром-ке X может существовать <u>лишь</u> если $f(x)$ непр-на или имеет точки разрыва только II-го рода на X

Пример

4) Пусть дана ф-ия $F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Используя опр-ие производной, несложно убедиться в том, что $F'(0)=0$

$$\left(F'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(\Delta x)-\cancel{F(0)}^{\,0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\right.$$

$$\left.\lim_{\Delta x\to 0}\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\Delta x}\,\underset{\substack{\uparrow\\\text{огр}}}{\sin\frac{1}{\Delta x}}=0\right)$$

Если же $x\neq 0$, то работают правила диф-ия, в соотв-ии с которыми

$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ (я опускаю подробные выкладки)

Но тогда ф-я $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

явл-ся произв-ой ф-ии $F(x)$ при всех $x\in\mathbb{R}$:

$F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, а значит $F(x)$ по опр-ию явл-ся первообр-ой для ф-ии $f(x)$ на пром-ке $\mathbb{R}$

При этом $\lim\limits_{x\to\pm 0}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to\pm 0}(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\varnothing})=\varnothing$,

а значит в т. $x=0$ ф-ия $f(x)$ имеет разрыв II-го рода

Итак, на этом примере мы убедились в том, что первообр-я для разрывной ф-ии также может существ-ть

Зам-ие. Из правил диф-ия следует (в этом достоточно легко убедиться, что произв-ая любой элем-ой ф-ии сама явл-ся элементарной ф-ей — говорят также, что операция дифф-ия не выводит за класс элем-ых ф-ий: $f(x)$ - элем-ая ф-ия $\Rightarrow f'(x)$ - элем-ая ф-ия. А вот первообр-я (а значит и неопр-ый $\int$-л) для элем-ой ф-ии уже может и не быть элем-ой ф-ей, т.е. операция $\int$-вания в отличие от опер-ии диф-ия, вообще говоря, выводит за класс элем-ых ф-ий: **13.24**

$\int$ элем-ой ф-ии $\neq$ элем-ая ф-ия $+ C$

Напр, доказано, что $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ и т.д. (таких примеров можно привести ∞ много) не выражаются в элем-ых ф-ях

Таблица основных $\int$-ов

Из таблицы произв-ых получается таблица $\int$ов ($\int$лы из неё так и называют — табличными)

Напр, мы знаем, что $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Отсюда при $\alpha \neq 0 \Rightarrow x^{\alpha-1} = \left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)'$. Заменив теперь $\alpha \to \alpha+1$, имеем

$$x^\alpha = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)', \text{ а значит}$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

и т.д.

Задание. Получить и выучить все остальные табличные $\int$-лы

Лекция 14

Основные св-ва неопред-ых $\int$ов

1) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx \Leftrightarrow \left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

2) $\int dF(x)=F(x)+C \Leftrightarrow \int F'(x)dx=F(x)+C$

Т.о., операции диф-ия и $\int$-ия не явл-ся в полной мере взаимно обратными. Если мы сперва проинтегрируем ф-ию f, а затем продифф-ем получившийся $\int$-ал, то вернёмся к исходной ф-ии $f(x)$. Иными словами, зная чему равен неопр-ый $\int$-ал от ф-ии f на нек-ом пром-ке X, мы можем абсолютно точно восстановить эту ф-ию при $x \in X$, продиф-вав данный $\int$-ал. А вот если мы сперва продиф-ем ф-ию $F(x)$, а потом проинтегрируем получившуюся произв-ю, то получим уже не исходную ф-ю $F(x)$, а целое семейство ф-ий $F(x)+C$. Иными словами, зная чему равна произв-ая от ф-ии F на нек-ом пр-ке X, мы можем восстановить эту ф-ю при $x \in X$, взяв $\int$-ал от её произв-ой, лишь с точностью до константы C

3) $\int (f \pm g)dx = \int f dx \pm \int g dx$

Зам Свойство 3) следует понимать в том смысле, что если сущ-ют ∫-лы из правой части равенства 3), то сущ-ет и ∫-л из его левой части и при этом справ-во само рав-во 3)

4) $\forall k \neq 0 \Rightarrow \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

Справедл-ть формул 1)-4) непосредственно вытекает из опр-ий первообр-й и неопр-го ∫-ла. Остановимся лишь на док-ве 4-го св-ва (остальные док-те самост-но)

Δ4) Пусть на пром-ке X сущ-ет перв-ая $F(x)$ для ф-ии $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Тогда $F_1(x) = kF(x)$ — перв-ая для ф-ии $kf(x)$, т.к. $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$

Далее,

$$k\int f(x)dx = k(F(x)+C) = kF(x) + \cancel{kC}^{\,C} = kF(x) + C,$$

ибо если C — произвольная постоянная и $k \neq 0$, то kC — тоже произвольная постоянная:

$$\begin{cases} C - \text{произв-ая const} \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow kC - \text{произв-ая const}$$

С другой стороны $\int kf(x)dx = F_1(x) + C = kF(x) + C$

Т.о., $k\int f(x)dx = \int k f(x)dx$ **14.3**

Пусть теперь известно, что на пром-ке X су-щ-ет перв-ая $F_1(x)$ ф-ии $k f(x)$: $F_1'(x) = k f(x)$. Тогда ан-но проделанному выше убеждаемся в том, что $F(x) = \frac{F_1(x)}{k}$ – первооб-я для ф-ии $f(x)$ и далее в спр-ти самого рав-ва 4) $\measuredangle$ 4)

Т.о., вопреки распространённому заблуждению, неопр-ый $\int$-ал ~~(по кр~~ (в отличие от определённого, ~~о~~ котор~~ом~~ ~~речь пойдёт~~ ый мы рассм-м впоследствии) свойством линейности не обладает (по крайней мере, если операции над неопр-ми $\int$-ми понимать как операции над соотв-ми множ-ми первообр-х, а именно ~~так чаще все~~ в таком смысле их чаще всего и понимают). Уточню, что линейность неопр-го $\int$-ла означала бы выполнение св-в 3) и 4), причём св-во 4) должно было бы выполняться при любом вещ-ом k, в том числе при k = 0

При k=0 формула 4) не работает. Действительно, даже если мы знаем, что $\int f dx$ сущ-ет, то с одной стороны $0 \cdot \int f(x)dx \equiv 0$, а с другой

$\int 0\cdot f(x)dx=\int 0\cdot dx=0+C=C\neq\int f(x)dx$ $\boxed{14.4}$

Зам Если написать $\int k\cdot f(x)dx=k\int f(x)dx+C$, то формула будет работать слева направо (в том смысле, что если сущ-ет $\int f dx$, то сущ-ет и $\int kf dx$ и рав-во спр-во) и при $k=0$. Тем не менее, это не будет означать линейности неопр-го $\int$-ла, т.к. для этого соотн-ие 4) должно выполняться безо всякого $+C$

§3 Методы интегрирования

Замена переменной

Теорема Пусть:

1) ф-ия $x=\varphi(t)$: $D_\varphi=T$, $E_\varphi=X$, где T и X – нек-ые пром-ки и $\forall t\in T\Rightarrow\exists\varphi'(t)$ (т.е. ф-я $\varphi(t)$ диф-ма на пром-ке T)

2) ф-ия $f(x)$: $D_f=X$ и сущ-ет первообразная $F(x)$ для $f(x)$ на пром-ке X

Тогда ф-ия $F(\varphi(t))$ явл-ся первообр-ой для ф-ии $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на пром-ке T

Δ $\cancel{[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)}$ По условию $F(x)$ – первообр-я для ф-ии $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Но тогда

$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ $\boxtimes$

Из док-ва теоремы следует, что

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

Отсюда, учитывая, что $F(x)+C=\int f(x)dx$, имеем

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)}} \qquad (*)$$

сначала берём $\int$-ал, а потом подставляем на место x функцию $\varphi(t)$

Эта формула наз-ся формулой замены переменной под знаком неопред-го $\int$-ла. Её можно интерпретировать как выделение диф-ла под знаком $\int$-ла с последующей заменой $\varphi(t)$ на x:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)},$$

в связи с чем такой способ $\int$-ия (с помощью формулы (*)) называют ещё методом выделения дифференциала

Подчеркну, что выделение диф-ла — это не док-во формулы замены перем-ой — ровно наоборот, как раз таки вследствие этой формулы у нас возникает возможность для подобных манипуляций

Напомню также, что соотношение

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

интерпретировалось нами ранее как inv-ть формы подынтегрального выр-ия. Т.о., inv-ть формы ~~до~~ подынтегрального выр-ия явл-ся прямым следствием формулы замены переменной (но не наоборот!)

Дополн-но:

Ещё об одной интерпретации формулы (*)

Мы видим, что формально $\int$-ал берётся от диффер-ала

$$\int f(x)dx = \int dF(x), \quad F'(x) = f(x),$$

причём благодаря формуле замены переменной этот диф-ал обладает св-ом inv-ти формы

$$\int dF(x(t)) = \int f(x(t))\,dx(t),$$

т.е. явл-ся диф-ом в полном смысле слова (со всеми формулами и свойствами, присущими диффер-ам)

Заметим теперь, что поскольку мы не ~~предполагаем~~ требуем сущ-ия ф-ии $t = \varphi^{-1}(x)$, обратной по отношению к ф-ии $x = \varphi(t)$ (она вполне может и не существ-ать, а формула замены перем-ой всё равно будет спра-

ведлива), то применять формулу за- 14.7
мены перем-ой предполагается исключитель-
но слева направо: ~~т.е.~~ считается, что у
нас есть $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, который требует-
ся найти, и при этом мы заранее, быть
может, и не уверены даже, что этот $\int$-ал
сущ-ет (т.е., что сущ-ет хотя бы одна пер-
вообр-я для ф-ии $f(x)$). Тогда, осуществ-
ляя замену перем-й под знаком $\int$-ла (ме-
няя $\varphi(t)$ на x), мы переходим от исход-
ного $\int$-ла к $\int f(x)dx$, предполагая, разуме-
ся, что ~~этот~~ новый $\int$-ал проще того, от ко-
торого мы ушли – настолько, что мы те-
перь можем взять этот $\int$-ал (или, в край-
нем случае, хотя бы дать положит-ый ответ
на вопрос о его сущ-ии). После этого мы
становимся уверенными в существ-ии и
исходного $\int$-ла (если ещё не были увере-
ны до сих пор), причём, чтобы найти его,
нам достаточно взять новый $\int$-л и в полу-
чившемся выражении подставить на мес-
то x ф-ию $\varphi(t)$

В то же время, если мы попытаемся применить формулу замены перем-ой справа налево, т.е. перейти от $\int f(x)dx$ к $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, то поскольку первый (искомый) интеграл зависит от x, а последний (новый) – от t, мы вполне можем столкнуться с трудностью возврата к старой переменной, ибо, как уже указывалось, не предполагаем сущ-ия ф-ии $t=\varphi^{-1}(x)$

Естественно возникает вопрос: имеем ли мы право применить формулу замены перем-ой справа налево (подставив в иск-ом $\int f(x)dx$ на место x ф-ию $\varphi(t)$), если обр-ая ф-ия $t=\varphi^{-1}(x)$ сущ-ет? (Тем более, что в этом направлении её на практике применяют, пожалуй, даже чаще, чем слева направо.) Оказ-ся, вообще говоря, нет. Можно привести соответств-ий контрпример, но я не буду сейчас этого делать (такой пример имеется в конспектах семинаров). Замечу лишь, что подобные случаи довольно экзотичны, и что для большинства f-ов, с которыми вы будете встречаться, обратный переход (справа налево) в формуле замены перем-й (его ещё называют методом подстановки, поскольку формально мы просто подставляем на место x ф-цию $\varphi(t)$), также как и прямой переход (который, как я напомню, мы назвали методом выделения диф-ла) даёт верный результат

Я не буду приводить (и тем более обсуждать) достаточное усл-ие справ-сти обратного перехода и соотв-щую теорему, а ограничусь только след-им замечанием

Зам Хотя док-ая выше теорема и не предоставляет нам такой возможности, мы всегда можем пытаться применять формулу замены перем-ой и в обратном направлении:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (**)$$

формально $\varphi(t)$ + раскрытие диф-ла: $d\varphi(t)=\varphi'(t)dt$

Но при этом следует иметь в виду, | 14.10

что из сущ-я $\int$-ла в правой части (**) не ~~следует~~ вытекает сущ-ие $\int$-ла в левой части (правда, если оба этих $\int$-ла сущ-ют, то они обязательно равны друг другу). А как тогда поступить, чтобы отсечь такую неблагоприятную возможность? Очень просто: берём $\int$-ал

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F_1(t)+C,$$

подставляем на место t ф-ию $\varphi^{-1}(x)$, получая выр-ие, зависящее от x (возвращаемся к исходной перем-ой)

$$t=\varphi^{-1}(x) \Rightarrow F_1(\varphi^{-1}(x))+C$$

и, наконец, проверяем диф-ем, что полученная таким способом ф-ия $F_1(\varphi^{-1}(x))$ действ-но явл-ся первообр-ой для ф-ии $f(x)$ (иными словами, проверяем $\int$-ие диф-ем)

$$\text{проверка: } F_1(\varphi^{-1}(x))' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{должно равняться}}}{=} f(x),$$

(в подавляющем большинстве случаев получается положительный результат, поэтому проверку даже не всегда проводят). Подчеркнём дополнительно, что

при прямом переходе (слева направо) **14.11**
в формуле замены перем-ой (*) необх-сти
в проверке оконч-го результата нет (хотя
на самом деле дополн-ая проверка никог-
да не помешает – она сведёт практически
к нулю вероятность получения неправ-го ре-
зультата)

Дополн-но: Внимание! В случае цейтно-
та **не** читать (на лекциях я этого не расска-
зываю, и вообще, данный фрагмент содер-
жит существ-но факультативный материал)

Метод подстановки

Теорема. Пусть:

1) ф-я $x=\varphi(t)$: $D_\varphi=T$, $E_\varphi=X$, где T и X -
- нек-ые промежутки

2) ф-я $x=\varphi(t)$ диф-ма на пром-ке T
и $\forall t\in T \Rightarrow \varphi'(t)\neq 0$

3) ф-я $f(x)$: $D_f=X$

4) сущ-ет первообр-я $F(t)$ для ф-ии ~~F~~
$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ на пром-ке T

Тогда:

1) ф-я $x=\varphi(t)$ имеет обр-ую ф-ю $t=\varphi^{-1}(x)$:
$D_{f^{-1}}=X$, $E_{f^{-1}}=T$ и $\forall x\in X \Rightarrow \exists\, \varphi^{-1}(x)'$ (т.е. ф-я

~~**~~ $\varphi^{-1}(x)$ дифф-ма на пром-ке X) **14.12**

2) ф-я $F(\varphi^{-1}(x))$ явл-ся первообр-ой для ф-ии $f(x)$ на пром-ке X

Δ 1) Сущ-ие $t=\varphi^{-1}(x)$ явл-ся следствием теоремы Дарбу (см. Ильин, Позняк – на лекциях этой т-мы не будет), согласно которой, если $\varphi'(t)\neq 0$ при $t\in T$, то одна либо всюду >0, либо всюду <0 на пром-ке T:

$$\underset{\text{на } T}{\varphi'(t)\neq 0} \Rightarrow \underset{\text{на } T}{\varphi'(t)\gtrless 0}$$

Из знакопостоянства на пром-ке T производной ф-ии $\varphi(t)$ на основании, напр., теоремы Лагранжа следует её строгая монотонность на этом пром-ке (т-му Лагранжа см. также в Ильине, Позняке – на лекциях она будет позднее)

Но тогда получается, что по отношению к ф-ии $x=\varphi(t)$ выполнены все условия теоремы о сущ-ии и дифф-сти обратной ф-ии ($\varphi(t)$ опр-на, строго монотонна и непр-на на T, и имеет отличную от нуля произв-ую в каждой точке этого пром-ка) $\Rightarrow$ на основании этих теорем сущ-ет $t=\varphi^{-1}(x)$: $D_{f^{-1}}=X$, $E_{f^{-1}}=Y$, и эта ф-ция диф-ма в каждой точке пром-ка T (в случае, если T, например, отр-ок, док-во утв-ия о диф-ости обр-й ф-ии в граничных точках нуждается, правда, в нек-ой доработке; и вообще, понятие произв-ой в граничной точке области опр-ия, ~~в~~ являющейся отр-ом, несмотря на то, что оно интуитивно очевидно и совпадает с понятием односторонней произв-ой, следовало бы формализовать, но всё как-то не до этого) ⊿1)

14.13

Δ2) По условию $F(t)$ — первообр-ая для ф-ии $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, т.е. $F'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Но тогда

$$[F(\varphi^{-1}(x))]'=F'(\varphi^{-1}(x))\cdot\varphi^{-1}(x)'=f(\cancel{\varphi}(\cancel{\varphi^{-1}}(x)))\cdot\cancel{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\cdot\frac{1}{\cancel{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}}=f(x)$$

⊿2)

Из док-ой теоремы следует, что

$$\int f(x)\,dx=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

Отсюда, учитывая, что $F(t)+C=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, имеем

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}} \quad (**)$$

~~Эту~~ Формулу (**), также как и формулу (*) можно назвать формулой замены перем-ой под знаком неопр-го $\int$-ла. Чтобы отличать ~~её~~ эту формулу от формулы (*), назовём её второй формулой замены перем-ой

Как уже говорилось, формулу (**) ~~ещё~~ можно интерпрет-ать как подстановку $x=\varphi(t)$ под знаком $\int$-ла с последующим раскрытием диф-ла от $\varphi(t)$, в связи с чем такой способ $\int$-ия (с помощью 2-й формулы замены перем-й) наз-ют ~~ещё~~ методом подстановки

Пример

1) $I = \int x^2 \sin(x^3)dx$ – берётся заменой переменной, но эту замену можно оформить двумя способами (срав-те со (*) и (**))

I) $I = \frac{1}{3}\int(\sin x^3)(3x^2)dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 dx^3 =$

$= \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C$

II) $x^3=t \Rightarrow x=\sqrt[3]{t} \Rightarrow dx=\frac{1}{3\sqrt[3]{t}^2}dt$ 14.15

$I=\int \sqrt[3]{t}^2 \sin t \frac{1}{3\sqrt[3]{t}^2}dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=-\frac{1}{3}\cos x^3+C$

Дополн-но:

Поскольку $\varphi'(x)=(x^3)'=3x^2=0$ при $x=0$, то теорема о формуле (**) (метод подстановки) не применима, а значит при использовании II-го способа результат следует проверить диф-ем: $(-\frac{1}{3}\cos x^3+C)'=x^2\sin x^3$

Зам В зависимости от подf-го выр-ия более удобным может оказаться как I-ый, так и II-ой путь. Хотя в целом (при прочих равных) предпочтительнее исполь-ать выделение диф-ла, чем подстановку, поскольку ~~тогда~~ при таком подходе заведомо отпадает необходимость в проверке результата, и, кроме того, обратная ф-ия $x=\varphi^{-1}(t)$ может и не сущ-ать (см., например, $\int x\sin x^2 dx$)

Интегрирование по частям

Теорема. Пусть

1) ф-ции $u(x)$ и $v(x)$ опр-ны и диф-мы на промежутке X | 14.16

2) сущ-ет $\int v(x)u'(x)dx$

Тогда сущ-ет $\int u(x)v'(x)dx$ и

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

формула $\int$-ия по частям

Δ $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (uv)' - vu'$

1) Очевидно, что сущ-ет $\int$-л от $(uv)'$, причём

$\int (uv)'dx = uv + C$

2) $\int vu'dx$ сущ-ет по условию

1)+2) $\Rightarrow$ сущ-ет $\int uv'dx$, причём

$\int uv'dx = \int (uv)'dx - \int vu'dx = uv + C -$

$- \int vu'dx = uv - \int vu'dx$ $\blacktriangle$

Зам 1 В последнем выражении мы опустили $+C$, т.к. произвольная константа всё равно содержится в последнем $\int$-ле (образно выражаясь, константу C "съел" оставшийся $\int$-ал)

Зам 2 Поскольку $u'dx = du$, $v'dx = dv$, то формулу $\int$-ия по частям можно переписать в виде 14.17

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

в такой ^простой и^ компактной форме её обычно и запоминают

Подчеркнём, что это не $\int$-лы по u и v, а всего лишь компактные способы обозначений соотв-их $\int$-ов по x. Напр, $\int u\,dv = \int u(x)v'(x)\,dx$

Дополн-но:

(А почему по частям? Чтобы объяснить это, раскроем диф-ал произвед-я $u \cdot v$

$$d(u \cdot v) = \overbrace{u\,dv + v\,du}^{\text{полный диф-ал } uv}$$

неполные диф-лы uv (1-ая и 2-ая части полного диф-ла)

Отсюда видно, что формула $\int$-ия по частям выражает тот простой факт, что $\int$-ал от одной из частей полного диф-ла равен разности между $\int$-ом от всего полного диф-ла и $\int$-ом от оставшейся его части

Т.о., получается, что, зная $\int$-л от одной из частей полного диф-ла, мы автоматически находим и $\int$-л от оставшейся его части, т.е. мы фактически после- | 14.18

довательно находим ∫-лы от двух частей одного целого, как бы ∫-ем это целое частями (хотя на самом деле ∫-ал от $d(uv)$ нас как раз таки и не интересует, поскольку мы, разумеется, его и так знаем и, более того, используем: $\int d(uv) = uv + C$)

Пример

② $\int x e^x dx = \int \overset{u}{x}\, d\overset{v}{e^x} = xe^x - \int e^x dx =$

$= xe^x - e^x + C$

§4 Интегрирование рациональных функций

Опр Рацион-ая дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ наз-ся ~~пра~~

правильной, если $n<m$

неправильной, если $n \geq m$

в полной аналогии с назв-ми обыкновенных дробей

Напомню, что рацион-ые дроби наз-ют также рацион-ми функциями, однако наименования прав-ая и неправ-ая почти исключительно исполь-ся лишь в сочетании с названием рац-ая дробь (т.е. не принято говорить прав-ая и неправ-я рац-ая ф-ия)

Сразу же заметим, что поиск $\int$-ла **14.19**
от неправ-ой рац-ой дроби сводится к $\int$-лу
прав-ой рац-ой дроби

Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправ-ая рац-ая дробь
$(n \geq m)$. Тогда, разделив многочлен $P_n(x)$
на многочлен $Q_m(x)$ (напр, уголком:

$$\begin{array}{r|l} P_n(x) & Q_m(x) \\ \cline{2-2} -\ \text{''} - & T_{n-m}(x) \\ \hline R_k(x) & \end{array}$$

, но можно и по-другому, скажем, методом неопред-ых коэф-ов – на этом вопросе я подробно не останавл-юсь, считая, что делить многочлены вы уже умеете), получим

$$\underset{\text{делимое}}{P_n(x)} = \underset{\text{делитель}}{Q_m(x)} \cdot \underset{\text{частное}}{T_{n-m}(x)} + \underset{\text{остаток}}{R_k(x)}, \quad k < m$$

или

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \leftarrow \text{правильная рацион-ая дробь}$$

Поскольку $\int$-ал от мног-на мы уже брать умеем, остаётся научиться $\int$-вать прав-ую рац-ую дробь

Имея в виду, что ~~мы~~ в случае необходимости (т.е. в случае неправ-ой рацион-ой дроби) мы заранее выделили "целую часть" (мног-ен-частное $T_{n-m}(x)$), будем считать, что исходная дробь $P_n(x)/Q_m(x)$ явл-ся прав-ой рацион-ой дробью

14.20

Итак, пусть теперь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – прав-ая рац-ая дробь. Прежде чем переходить к общей схеме и-ия прав-ой рац-ой дроби, рассм-им несколько примеров

1) Пусть $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{x}{x^4-1}$ $\quad n=1$, $m=4$

Чтобы проинтегр-ать прав-ю рац-ую дробь, ~~её~~ сперва надо разложить её на сумму т.н. простейших рацион-х дробей. Разложение любой прав-й рацион-й дроби на сумму простейших рац-х дробей начинают с разложения её знаменателя на произвед-ие т.н. неприводимых множит-ей или неприводи-х многочленов

Опр Многочлен с действит-ми коэф-ми наз-ся вещ-ым мног-ом (опр-ие комплексного мн-на аналогично)

Опр Вещ-ый многочлен $Q_m(x)$ наз-ся приводимым, если найдутся вещ-ые мног-ны $U_{m_1}(x)$ и $V_{m_2}(x)$: $m_1, m_2 > 0$ (пол-ых степеней m_1

и m_2) и $Q_m(x) = U_{m_1}(x) V_{m_2}(x)$ (т.е. если он может быть разложен на произв-ие U_{m_1} и V_{m_2}) **14.21**

Опр Многочлен $Q_m(x)$: $m > 0$ (пол-ой степени m), не являющийся приводимым, назыв-ся неприводимым

В нашем случае $Q_m(x) = Q_4(x) = x^4 - 1 =$
$= (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Мног-ны $x-1$ и $x+1$ (также как и любой другой мног-ен первой степени) очевидно являются неприводимыми (т.к. их степень $=1$, то их нельзя разложить на два многочлена, степень каждого из которых ≥ 1)

Многочлен второй степени может быть как приводимым, так и неприводимым – это определ-ся тем, имеет ли он вещ-ые корни

Напр, $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \mp 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \varnothing \Rightarrow x^2 + 1$ – неприводим (ещё говорят, неразложим на множители)

Заметим, что на комплексные многочлены x^2+1 всё-таки можно разложить: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \mp i \Rightarrow x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$

Уточним теперь, что мы подразумеваем под простейшей рацион-ой дробью

Опр Рацион-ая дробь наз-ся про- | 14.22
стейшей, если она имеет вид

$\frac{X_m(x)}{[Y_n(x)]^\alpha}$, где Y_n – неприводимый многочлен,
а $m<n$

Зам Ниже я приведу утв-ие, согласно которому любой мн-ен степени $\geqslant 3$ явл-ся приводимым, и, тем самым, в сформулированном опред-ии n = одному и двум (т.е. неприводимым может быть лишь мн-ен 1-ой или 2-ой степени)

Вернёмся к нашей рацион-ой дроби и, используя метод неопред-х коэффиц-ов, разложим её на сумму прост-их рац-х дробей

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \overset{\text{при всех допустимых } x}{\equiv} \frac{A^{\backslash (x+1)(x^2+1)}}{(x-1)^1}+\frac{B^{\backslash -''-}}{(x+1)^1}+\frac{Cx+D^{\backslash -''-}}{(x^2+1)^1} \equiv$$

что будет, если хотя бы один из неприв-ых множ-ей повторяется дважды, увидим в след-ем примере

$$\equiv \frac{(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Числа A, B, C и D (а вместе с ними и сам метод) наз-ют неопред-ми коэф-ми (по той простой причине, что мы их, разум-ся, заранее не знаем)

Несложно показать (я позволю себе на этом не останавлив-ся), что два многочлена ≡но равны друг другу в том и только в том случае, если они совпадают, т.е. имеют одинаковые степени и равные ~~коэф~~ к-ты

Тогда, поскольку многочлены, стоящие в числит-ях первой и последней дробей должны быть одинаковыми (для выполнения ≡-го рав-ва этих дробей), приходим к выводу, что в числителе последней дроби коэф-ты при x^3 и x^2 обязательно $=0$ (~~степень~~ чтобы степень мног-на из этого числителя $=1$), а коэф-ты при x^1 и x^0 (свободный член) должны равняться соотв-но единице и нулю:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=1 \\ A-B-D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=B=1/4 \\ C=-1/2,\ D=0 \end{cases}$$

Зам 1 Иногда многочлен из числителя исх-ой дроби представляют в виде мн-на более высокой степени, но с нулевыми коэф-

ми при старших степенях x, после $\boxed{14.24}$
чего просто приравнивают коэф-ты такого "расширенного" многочлена к коэф-ам мн-на из числ-ля дроби, получающейся при сложении простейших дробей с неопр-ми коэф-ми (разум-ся, в результате такого приравнивания мы вновь будем иметь два одинаковых мног-на). Напр, в нашем случае x из числ-ля исх-ой дроби можно воспринимать как мн-ен 3-ей степени: $x = 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 1\cdot x + 0$. (хотя, в строгом смысле он мног-ом 3-ей степени естественно не явл-ся)

В итоге получаем, что

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow I \equiv \int \frac{x\,dx}{x^4-1} = \int + \int - \int \equiv I_1 + I_2 - I_3$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{4(x-1)} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{x-1} = \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$$

$$I_2 = \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$$

$$I_3 = \int \frac{x\,dx}{2(x^2+1)} = \frac{1}{4}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} =$$

$= \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C$ 14.25

$|\;|$ не ставим, т.к. $x^2+1>0$ при $\forall x$

$$I = \frac{1}{4}\ln\frac{|x-1||x+1|}{x^2+1} + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C$$

Заметим, что полученное выраж-ие явл-ся неопр-ым $\int$-ом от дроби $x/(x^4-1)$ на $\forall$ промежутке, не содержащем нулей её знам-ля, т.е. точек $x=\mp 1$: напр, на промежутках $(-\infty,-1)$, $(-1,+1)$ и $(+1,+\infty)$

② Найдём $\int\frac{x^2+x}{(x^2-1)(x-1)}dx = \int\frac{x^2+x}{(x+1)(x-1)^2}dx \equiv I$

приводимый многочлен неприводимый мног-ен

Несмотря на то, что здесь формально два множ-ля, это выражение всё равно считается разложением знамен-ля на произв-ие трёх неприводимых сомнож-лей (два из которых совпадают). Просто одинаковые множ-ли для компактности группируют в степени. Такое разложение подобно разложению натуральных чисел на простые сомножители (простые числа), напр, $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$ – четыре простых множ-ля (но 3 простых числа) метод неопр-ых коэф-ов (пропуска-ем выкладки) 14.26

$$\frac{x^2+x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} = \frac{0}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x \neq -1 \leftarrow \text{Важно!}$$

Наличие дополнитель-го слагаемого связано с тем, что разложение знамен-ля нашей дроби содержит вторую степень $(x-1)$ (т.е., что в этом разл-ии множ-ль $(x-1)$ повторяется дважды). Если бы разл-ие знам-ля на неприводимые множ-ли содержало $(x-1)^k$, то этому множ-лю отвечало k слагаемых со знамен-ми $(x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^k$

Заметим, что разл-ие этой дроби может быть получено значит-но проще, если догадаться сразу же сократить её на $x+1$ (потребовав, чтобы $x \neq -1$!):

$$\frac{x^2+x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x-1+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

(при этом мы, используя несложную группировку, обошлись без метода неопр-х коэф-в)

$$I = \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

на любом промежутке X, не содержащем точек $x = \mp 1$