Задачи общего зачёта по линейной алгебре
(Лектор А.А. Шишкин)

1. Неоднородная система линейных уравнений задана расширенной матрицей: а) $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 7 & 6 \\ 7 & 7 & 9 & 1 & 14 \end{pmatrix}$;

   б) $A^*=\begin{pmatrix} 9 & 21 & -15 & 5 & 10 \\ 12 & 28 & -20 & 7 & 13 \end{pmatrix}$. Найти ФСР соответствующей однородной системы уравнений. Найти общее решение исходной системы уравнений.
2. Дано линейное пространство, элементами которого являются все симметричные *n x n*-матрицы. Найти базис и размерность этого пространства.
3. Докажите, что три матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы, и любой элемент линейного пространства симметричных 2 *x* 2- матриц есть их линейная комбинация.
4. Найти ранг и базисный минор матриц: а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

   б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.
5. В линейном пространстве $R(K_0)$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. Найти базис и размерность линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Разложить эти элементы по найденному базису:

   а) $x_1=(1,0,1)^т$, $x_2=(5,2,3)^т$, $x_3=(2,1,1)^т$, $x_4=(4,1,3)^т$;

   б) $x_1=(1,1,1)^т$,$x_2=(5,3,7)^т$, $x_3=(5,4,6)^т$, $x_4=(2,1,3)^т$;

   в) $x_1=(1,0,2)^т$, $x_2=(3,2,8)^т$, $x_3=(1,1,3)^т$, $x_4=(2,-1,3)^т$.

6. В линейном пространстве $R(K_0)$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. Найти базис и размерность линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Разложить эти элементы по найденному базису:

   а) $x_1=(1,0,1)^т$, $x_2=(5,2,3)^т$, $x_3=(2,1,1)^т$, $x_4=(4,1,3)^т$;

   б) $x_1=(1,1,1)^т$, $x_2=(5,3,7)^т$, $x_3=(5,4,6)^т$, $x_4=(2,1,3)^т$;

в) $x_1=(1,0,2)^т$. $x_2=(3,2,8)^т$, $x_3=(1,1,3)^т$, $x_4=(2,-1,3)^т$.

7. В линейном пространстве $P_2(K_о)$ всех полиномов степени не выше 2 заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. Найти базис и размерность линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Разложить указанные элементы по найденному базису:

a) $x_1(t)=1+t^2$, $x_2(t)=5+2t+3t^2$, $x_3(t)=2+t+t^2$, $x_4(t)=4+t+3t^2$;

b) $x_1(t)=1+t+t^2$, $x_2(t)=5+3t+3t^2$, $x_3(t)=5+4t+6t^2$, $x_4(t)=2+t+3t^2$;

c) $x_1(t)=1+2t^2$, $x_2(t)=3+2t+8t^2$, $x_3(t)=1+t+3t^2$, $x_4(t)=2-t+3t^2$.

8. В линейном пространстве $P_2(K_0)$ всех полиномов степени не выше 2 заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. Найти базис и размерность линейной оболочки $L(x_1,x_2,x_3,x_4)$ и достроить найденный базис до базиса пространства $P_2(K_0)$:

a) $x_1(t)=1+t^2$, $x_2(t)=5+2t+3t^2$, $x_3(t)=2+t+t^2$, $x_4(t)=4+t+3t^2$;

b) $x_1(t)=1+t+t^2$, $x_2(t)=5+3t+3t^2$, $x_3(t)=5+4t+6t^2$, $x_4(t)=2+t+3t^2$;

c) $x_1(t)=1+2t^2$, $x_2(t)=3+2t+8t^2$, $x_3(t)=1+t+3t^2$, $x_4(t)=2-t+3t^2$.

9. Пусть элементы x_1, x_2, x_3, x линейного пространства $R_3(K_0)$ в базисе $(е_к)_3$ имеют координаты:

а) $x_1=(-1,0,1)^т$, $x_2=(-1,1,1)^т$, $x_3=(-1,1,0)^т$, $x=(1,1,1)^т$;

б) $x_1=(-1,1,-1)^т$, $x_2=(0,-1,1)^т$, $x_3=(-1,1,0)^т$, $x=(1,0,2)^т$;

в) $x_1=(-1,0,-1)^т$, $x_2=(0,-1,0)^т$, $x_3=(-1,2,0)^т$, $x=(2,0,-1)^т$.

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис пространства $R_3(K_0)$. Разложить элемент x по этому базису.

10. Элементы f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, x в базисе $e=(e_к)_3$ линейного пространства $R_3(K_0)$ имеют координаты:

a) $f_1=(1,2,1)^т$, $f_2=(1,1,0)^т$, $f_3= (1,1,2)^т$, $g_1=(0,-1,1)^т$, $g_2=(1,0,1)^т$, $g_3=(0,-1,-1)^т$, $x=(1,1,1)^т$;

b) $f_1=(1,1,1)^т$, $f_2=(1,2,1)^т$, $f_3=(1,1,2)^т$, $g_1=(-1,0,-2)^т$, $g_2=(0,-1,1)^т$, $g_3=(0,1,0)^т$, $x=(1,0,2)^т$;

c) $f_1=(2,1,1)^т$, $f_2=(1,2,1)^т$, $f_3=(1,1,1)^т$, $g_1=(-3,-2,-2)^т$, $g_2=(-1,-2,-1)^т$, $g_3=(0,3,1)^т$, $x=(2,0,-1)^т$.

Доказать, что элементы f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2, g_3 образуют базисы в пространстве $R_3(K_0)$. Найти: матрицу перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$ и матрицу перехода от базиса $\{g\}$ к базису $\{f\}$; разложение элемента x как по базису $\{f\}$, так и по базису $\{g\}$.

11. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве $R_3(K_0)$, в базисе $e=(e_к)_3$ имеет матрицу A_e. Найти матрицу этого оператора в базисе $f=(f_k)_3$, если матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$ равна матрице C:

а) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$; б) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

в) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

12. Найти базис и размерность ядра оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$, если матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $e=(e_к)_3$ имеет вид: а) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, б) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$, в) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

13. Найти базис и размерность образа оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$, если матрица оператора $\hat{A}$ в базисе $e=(e_к)_3$ имеет вид: а) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; б) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

в) $A_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

14. Задана матрица A_e в базисе $e=(e_к)_3$ линейного оператора $\hat{A}$, действующего в линейном пространстве $R_3(K_0)$. Найти собственные значения этого оператора. Для каждого собственного значения построить множество всех собственных векторов:

а) $A_e=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, б) $A_e=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, в) $A_e=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

15. В базисе $e=(e_к)_4$ линейного пространства $R_4(K_0)$ квадратичная форма имеет вид: а) $Q(x)=(x^1)^2+2x^1x^2+2(x^2)^2+x^3x^4$;

b) $Q(x)=x^1x^2+2(x^3)^2-4x^3x^4+2(x^4)^2$;

c) $Q(x)=(x^1)^2+4x^1x^2-(x^2)^2-x^3x^4$.

Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму к каноническому виду. Найти матрицу перехода от базиса $\{e\}$ к каноническому базису.

16. В евклидовом пространстве T_2, в котором скалярное произведение определяется формулой $(x,y)=x^1y^1+x^2y^2$ заданы элементы e_1,e_2: а) $e_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$; б) $e_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$; в) $e_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис пространства T_2. Найти ковариантный метрический тензор в базисе $\{e\}$.

17. В евклидовом пространстве P_1 всех полиномов, заданных на сегменте [0,1], степени не выше 1 со скалярным произведением, определяемым формулой $(x,y)=\int_0^1 x(t)y(t)dt$, заданы элементы $e_1=1$, $e_2=t$. Доказать, что эти элементы образуют базис пространства P_1. Найти ковариантный метрический тензор в этом базисе.

18. В евклидовом пространстве, в котором скалярное произведение введено формулой $(x,y)=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3$, заданы элементы:

a) $z_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $z_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $z_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; b) $z_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $z_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $z_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Доказать, что элементы z_1, z_2, z_3 линейно независимы. Применить к этим элементам алгоритм Шмидта (без нормировки).

19. В евклидовом пространстве P_1 всех полиномов, заданных на сегменте [0,1], степени не выше 1 со скалярным произведением, определённым формулой $(x,y)=\int_0^1 x(t)y(t)dt$, заданы элементы $x_1=1$, $x_2=t$. Доказать, что эти элементы линейно независимы. Применить к ним алгоритм Шмидта (без нормировки).

20. В ортонормированном базисе $(e_к)_4$ евклидова пространства заданы координаты элементов x_1, x_2, x:

а) $x_1=(1,0,0,1)^т$, $x_2=(1,1,0,0)^т$, $x=(1,0,0,0)^т$;

б) $x_1=(1,0,0,-1)^т$, $x_2=(1,0,2,0)^т$, $x=(1,0,0,0)^т$;

в) $x_1=(1,1,0,1)^т$, $x_2=(1,0,0,0)^т$, $x=(1,-1,0,0)^т$.

Найти проекцию элемента x на подпространство $L(x_1,x_2)$.

21. Подпространство M евклидова пространства с ортонормированным базисом $(e_к)_3$ задано уравнением $x^1-2x^2+3x^3=0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству M.

22. В ортонормированном базисе $(e_к)_3$ евклидова пространства матрица линейного оператора $\hat{A}$ имеет вид $A_e=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис $\{f\}$ из собственных векторов оператора $\hat{A}$; матрицу перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$; матрицу перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{e\}$; матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\{f\}$.

23. Пусть $B_e=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица симметричной билинейной формы в ортонормированном базисе $(e_к)_3$. Найти канонический базис $\{f\}$ этой билинейной формы. Найти матрицу перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$.

24. Доказать теорему Пифагора в евклидовом пространстве: если $(x,y)=0$, то $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

25. Пусть в евклидовом пространстве дан ортонормированный базис $(e_к)_n$. Докажите, что для любого элемента x этого пространства его координаты вычисляются по формуле $x^k=\dfrac{(x,e_k)}{(e_k,e_k)}, k=1,n$.

26. В линейном пространстве B_2 задана прямая, имеющая в прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ уравнение $y=кx$, а также линейный оператор $\hat{A}$, переводящий любой вектор $\boldsymbol{a}$ в вектор $\boldsymbol{b}$, симметричный ему относительно этой прямой. Найдите матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$.

27. Пусть $L(cosx, sinx)$ - линейная оболочка. Найдите матрицу оператора дифференцирования, действующего в пространстве L, в базисе $(cosx, sinx)$.

28. Пусть $\boldsymbol{y}$ – фиксированный элемент линейного пространства V_3. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}x=[x,y]$, $\forall\, \mathbf{x}\in V_3$.

29. Пусть дана матрица C, у которой $detC\neq 0$. Докажите, что матрица $CC^т$ является положительно определённой.

30. Докажите, что если A – положительно определённая матрица, то $a_{кк}>0$, $k=1,n$.

31. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2-4x^1x^2+5(x^2)^2+8x^1-2x^2+9=0$. Используя инварианты уравнения второй степени, привести это уравнение к каноническому виду.