Линейная алгебра–3
Линейные операторы

1. Линейные операторы

Линейный оператор **(ЛО)** — это гомоморфизм **ЛП**, т.е. отображение $\mathbf{A} : V \to W$, где V, W — **ЛП** над одним и тем же **ЧП**, удовлетворяющее следующему условию:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{A}(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Нас будет интересовать случай, когда $W = V$, т.е. когда пространство образов **ЛО** совпадает с пространством прообразов. В этом случае гомоморфизмы **ЛП** называются эндоморфизмами.

Пусть $V(\mathbb{K})$ — **ЛП** над произвольным **ЧП**, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в V, $\mathbf{x} \in V$. Разложив вектор $\mathbf{x}$ по базису, получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(x^j\mathbf{e}_j) = x^j\mathbf{A}(\mathbf{e}_j).$$

Таким образом, чтобы вычислить образ произвольного вектора при действии **ЛО**, достаточно знать лишь образы $\mathbf{f}_j = \mathbf{A}(\mathbf{e}_j)$ базисных векторов. Разложим каждый из векторов $\mathbf{f}_j$ по базису $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{f}_j \equiv \mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = a^k_j\mathbf{e}_k.$$

Возникающая квадратная матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a^1_a & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_a & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_a & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix}$$

называется матрицей **ЛО** в выбранном базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Столбцы матрицы **ЛО** представляют собой столбцы координат образов векторов базиса относительно этого базиса.

Таким образом,

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = x^j\mathbf{f}_j = x^j a^k_j\mathbf{e}_k,$$

т.е. координаты вектора $\mathbf{y}$ выражаются через координаты вектора $\mathbf{x}$ по формуле

$$y^k = a^k_j x^j$$

или, в матричной форме,

$$Y_e = A_e X_e.$$

2. ЛО как тензор

Теорема. ***ЛО** представляет собой 1-ковариантный, 1-контравариантный тензор.*

Доказательство. Для доказательства нужно вывести закон преобразования матрицы **ЛО** при переходе к новому базису. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — старый базис, $\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — новый базис, связанные матрицей перехода C:

$$\mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'}\mathbf{e}_j.$$

Имеем:

$$\mathbf{f}_{j'} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j'}) = a^{k'}_{j'}\mathbf{e}_{k'}.$$

Подставим сюда выражения векторов нового базиса через векторы старого:

$$\mathbf{f}_{j'} = a^{k'}_{j'}\mathbf{e}_{k'} = a^{k'}_{j'}c^k_{k'}\mathbf{e}_k.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{f}_{j'} = \mathbf{A}(\mathbf{e}_{j'}) = \mathbf{A}(c^j_{j'}\mathbf{e}_j) = c^j_{j'}\mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = c^j_{j'}\mathbf{f}_j.$$

Подставим сюда выражение

$$\mathbf{f}_j = a^k_j\mathbf{e}_k.$$

Таким образом, приравнивая полученные выражения, находим:

$$\mathbf{f}_{j'} = a^{k'}_{j'}c^k_{k'}\mathbf{e}_k = c^j_{j'}a^k_j\mathbf{e}_k.$$

В силу единственности разложения по базису получаем

$$a^{k'}_{j'}c^k_{k'} = c^j_{j'}a^k_j.$$

Это соотношение можно записать в матричной форме:

$$CA_{e'} = A_e C.$$

Умножая обе части слева на матрицу C^{-1}, получаем искомое соотношение

$$A_{e'} = C^{-1}A_e C.$$

В тензорных обозначениях эта формула имеет вид

$$a^{k'}_{j'} = c^j_{j'}c^{k'}_k a^k_j.$$

□

Задача. Проведите доказательство полностью в тензорных обозначениях, не обращаясь к матричной форме записи.

3. Линейное пространство линейных операторов

Определим сумму **ЛО** и произведение **ЛО** на число по формулам

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$
$$(\alpha\mathbf{A})(\mathbf{x}) = \alpha \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

для любого $\mathbf{x} \in V$.

Теорема. *Сумма **ЛО** и произведение **ЛО** на число также являются **ЛО**.*

Теорема. *Если A_e, B_e — матрицы **ЛО** $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то матрицы **ЛО** $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\alpha\mathbf{A}$ равны $A_e + B_e$, αA_e, соответственно.*

Нулевым оператором называется оператор $\mathbf{O}$, действующий по правилу

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall\mathbf{x} \in V.$$

Теорема. *Множество всех **ЛО**, действующих в **ЛП** $V(\mathbb{K})$ ($n = \dim V$), является **ЛП**, изоморфным $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$.*

Задача. Докажите эти теоремы самостоятельно.

Множество всех **ЛО**, действующих в **ЛП** V, обозначается $\operatorname{End} V$. Таким образом,

$$\dim \operatorname{End} V = (\dim V)^2 = n^2,$$
$$\operatorname{End} V \cong \mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K}).$$

4. Произведение ЛО. Алгебра ЛО

Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — **ЛО**, действующие в **ЛП** V. Произведением этих **ЛО** называется отображение, заданное формулой

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad \forall\mathbf{x} \in V.$$

Теорема. *Произведение **ЛО** также является **ЛО**.*

Доказательство.

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(x) + \mathbf{B}(\mathbf{y})) = \mathbf{AB}(\mathbf{x}) + \mathbf{AB}(\mathbf{y}),$$
$$(\mathbf{AB})(\alpha\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}(x)) = \alpha\mathbf{AB}(\mathbf{x}).$$

□

Теорема. *Если A_e, B_e — матрицы **ЛО** $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, то матрица **ЛО** $\mathbf{AB}$ равна $A_e B_e$.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Алгеброй $\mathcal{A}$ над **ЧП** $\mathbb{K}$ называется **ЛП** $V(\mathbb{K})$, снабженное операцией

$$\bullet : V \times V \to V,$$

называемой умножением векторов, ставящей в соответствие каждой упорядоченной паре векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ их произведение — вектор $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, и обладающей следующими свойствами:

$$(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \beta\mathbf{y} \cdot \mathbf{z},$$
$$\mathbf{x} \cdot (\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \beta\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ и всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{A}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}),$$

и коммутативной, если для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ выполняется равенство

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Примеры алгебр

1. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел, рассматриваемое как **ЛП** над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и снабженное обычной операцией умножения комплексных чисел, образует ассоциативную и коммутативную алгебру размерности 2 над **ЧП** $\mathbb{R}$.
2. Множество всех квадратных матриц порядка n с элементами из **ЧП** $\mathbb{K}$ образует ассоциативную, но не коммутативную алгебру размерности n^2 над $\mathbb{K}$.
3. Множество всех многочленов с коэффициентами из **ЧП** $\mathbb{K}$ образует бесконечномерную алгебру над $\mathbb{K}$.

Две алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются изоморфными, если существует отображение $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, являющееся изоморфизмом линейных пространств и обладающее свойством

$$\phi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) \cdot \phi(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$.

Пример. Алгебра $\mathbb{C}$ комплексных чисел (как алгебра над $\mathbb{R}$) изоморфна алгебре вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Действительно, отображение

$$\phi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

взаимно однозначно и

$$\begin{aligned} \phi((a+ib)(c+id)) &= \phi((ac-bd) + i(ad+bc)) = \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \\ &= \phi(a+ib)\phi(c+id). \end{aligned}$$

Теорема. *Множество* $\operatorname{End} V$ *всех **ЛО**, действующих в **ЛП** $V(\mathbb{K})$, $\dim V = n$, является алгеброй над **ЧП** $\mathbb{K}$, изоморфной алгебре $\mathbb{K}^{n\times n}(\mathbb{K})$.*

Задача. Докажите самостоятельно. [Указание: изоморфизм алгебр ставит в соответствие каждому **ЛО** его матрицу в некотором фиксированном базисе.]

5. Алгебры Ли

Алгебра $\mathcal{L}$ называется алгеброй Ли, если она антикоммутативна, т.е.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L},$$

и для любых ее элементов выполнено тождество Якоби:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) + \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Задача. Докажите, что из тождества $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ вытекает тождество $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ ($\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$).

Задача. Докажите, что **ЛП** геометрических векторов в пространстве, снабженное операцией векторного умножения векторов, образует алгебру Ли $\mathfrak{V}$ над **ЧП** $\mathbb{R}$.

Любую ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ можно превратить в алгебру Ли, введя новую операцию умножения по правилу

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Действительно, $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{x}$. Тождество Якоби легко проверяется:

$$\begin{aligned} &[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} + \\ &+ \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ЛП квадратных матриц порядка n с элементами из **ЧП** $\mathbb{K}$, снабженное операцией коммутирования матриц

$$[A, B] = AB - BA,$$

образует алгебру Ли, обозначаемую $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Задача. Докажите, что множество всех кососимметричных матриц порядка n образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$.

Задача. Докажите, что $\mathfrak{V} \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Указание: изоморфизм задается соответствием

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Ядро и образ ЛО

Пусть $\mathbf{A} : V \to V$ — **ЛО**, действующий в **ЛП** V.

Ядро $\ker \mathbf{A}$ **ЛО** $\mathbf{A}$ — это

$$\ker \mathbf{A} = \Big\{ \mathbf{x} \in V \;\Big|\; \mathbf{A}(x) = \mathbf{0} \Big\}.$$

Образ $\operatorname{im} \mathbf{A}$ **ЛО** $\mathbf{A}$ —

$$\operatorname{im} \mathbf{A} = \Big\{ \mathbf{y} \in V \;\Big|\; \mathbf{x} \in V : \mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \Big\}.$$

Ядро и образ **ЛО** являются **ЛПП** в **ЛП** V, причем

$$\dim \ker \mathbf{A} + \dim \operatorname{im} \mathbf{A} = \dim V.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

Замечание. Предыдущее равенство не означает, что $V = \ker \mathbf{A} \oplus \operatorname{im} \mathbf{A}$.

Задача. Найдите ядро и образ **ЛО** $\mathbf{A}$, действующего в **ЛП** $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ и имеющего в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что для этого оператора $\ker \mathbf{A} = \operatorname{im} \mathbf{A}$.

7. Инварианты ЛО

Теорема. *Ранг матрицы **ЛО** $\mathbf{A}$ не зависит от выбора базиса и равен* $\dim\operatorname{im}\mathbf{A}$. *Рангом **ЛО** $\mathbf{A}$ называется число* $\operatorname{rk}\mathbf{A} = \dim\operatorname{im}\mathbf{A}$.
Теорема. *Определитель и след матрицы **ЛО** $\mathbf{A}$ не зависят от выбора базиса и называются определителем* $\det\mathbf{A}$ *и следом* $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ ***ЛО*** $\mathbf{A}$.
Задача. Докажите самостоятельно.

8. Единичный и обратный операторы

Единичный (тождественный) оператор $\mathbf{I}$ действует по правилу

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall\mathbf{x} \in V.$$

Задача. Докажите, что единичный оператор является линейным и что его в любом базисе его матрица равна единичной матрице.
ЛО $\mathbf{A}^{-1}$ называется обратным по отношению к **ЛО** $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.
Теорема. ***ЛО*** $\mathbf{A}$ *имеет обратный тогда и только тогда, когда* $\det\mathbf{A} \neq 0$. *Матрица обратного оператора* $\mathbf{A}^{-1}$ *является обратной по отношению к матрице оператора* $\mathbf{A}$ *(в одном и том же базисе).*
Задача. Докажите самостоятельно.

9. Автоморфизмы ЛП

Каждое **ЛП** изоморфно самому себе. Изоморфизм **ЛП** на себя называется автоморфизмом этого **ЛП**.
Теорема. *Все автоморфизмы данного **ЛП*** $V(\mathbb{K})$, $\dim V = n$, *образуют группу* $\operatorname{Aut} V$ *(группу автоморфизмов этого **ЛП**), причем*

$$\operatorname{Aut} V \cong GL(n, \mathbb{K}).$$

Доказательство. Каждый автоморфизм представляет собой невырожденный **ЛО**, действующий в **ЛП** V (почему?), а композиция автоморфизмов — произведение соответствующих операторов. Множество всех невырожденных операторов образует группу относительно операции умножения (единичный элемент — тождественный оператор; проверьте аксиомы). Изоморфизм этой группы на группу $GL(n, \mathbb{K})$ невырожденных матриц ставит в соответствие каждому оператору его матрицу в некотором базисе. $\square$

10. Проекторы

Из соотношения

$$\dim\ker\mathbf{A} + \dim\operatorname{im}\mathbf{A} = \dim V$$

следует, что равенство

$$\ker\mathbf{A} \oplus \operatorname{im}\mathbf{A} = V$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\ker\mathbf{A} \cap \operatorname{im}\mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим важный класс операторов, для которых это соотношение выполнено.
Проектор $\mathbf{P}$ — это **ЛО**, удовлетворяющий условию $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.
Теорема. *Для любого проектора* $\mathbf{P}$ *имеем*

$$V = \ker\mathbf{P} \oplus \operatorname{im}\mathbf{P}.$$

Доказательство. Если $\mathbf{P}$ — проектор и $\mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{y}) \in \operatorname{im}\mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^2(\mathbf{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{x} \in \operatorname{im}\mathbf{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Поэтому если $\mathbf{x} \in \ker\mathbf{P} \cap \operatorname{im}\mathbf{P}$, то $\mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, т.е. $\ker\mathbf{P} \cap \operatorname{im}\mathbf{P} = \mathbf{0}$ и

$$V = \ker\mathbf{P} \oplus \operatorname{im}\mathbf{P}.$$

Из этой формулы следует, что каждый вектор $\mathbf{x} \in V$ можно единственным образом представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{y} \in \operatorname{im}\mathbf{P}, \quad \mathbf{z} \in \ker\mathbf{P}.$$

Так как

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \operatorname{im}\mathbf{P},\\ \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x})) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\\ \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x}) \in \ker\mathbf{P},\end{gathered}$$

то разложение

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{x})}_{\in\operatorname{im}\mathbf{P}} + \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x}))}_{\in\ker\mathbf{P}}$$

имеет вид $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ и в силу единственности

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Таким образом, любой проектор $\mathbf{P} \in \operatorname{End} V$ задает разложение **ЛП** V в прямую сумму **ЛПП** $\ker\mathbf{P}$ и $\operatorname{im}\mathbf{P}$. $\square$

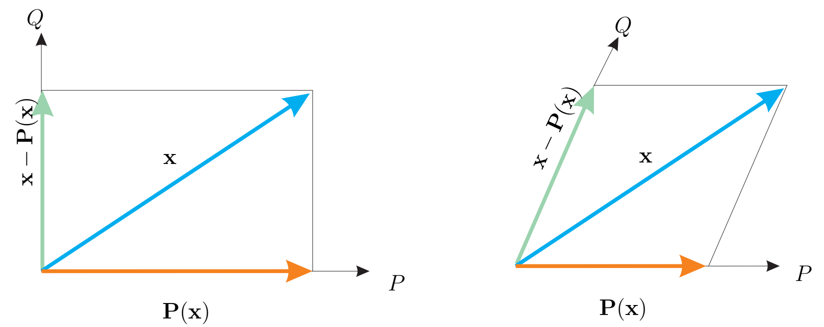
Обратное утверждение также верно.
Теорема. *Для каждого разложения*

$$V = P \oplus Q$$

ЛП V *в прямую сумму **ЛПП** существует единственный проектор* $\mathbf{P}$ *такой, что*

$$P = \operatorname{im}\mathbf{P}, \quad Q = \ker\mathbf{P}.$$

Оператор $\mathbf{P}$ *называется проектором на **ЛПП*** P *вдоль **ЛПП*** Q.
Задача. Докажите самостоятельно.



11. Инвариантные подпространства ЛО

Пусть $\mathbf{A}$ — **ЛО**, действующий в **ЛП** V. **ЛПП** P называется инвариантным подпространством **(ИПП)** оператора $\mathbf{A}$, если

$$\forall\mathbf{x} \in P: \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in P.$$

Любой **ЛО** обладает тривиальными **ИПП** $\mathbf{0}$ и V.
Пусть P — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$. Линейный оператор

$$\mathbf{A}|_P : P \to P, \mathbf{A}|_P(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

называется ограничением **ЛО** $\mathbf{A}$ на **ИПП** P. Также говорят, что **ЛО** $\mathbf{A}|_P$ индуцирован линейным оператором $\mathbf{A}$ на **ИПП** P.

Теорема. *Ядро и образ **ЛО** являются его **ИПП**.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Если $V = P \oplus Q$, где P, Q — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$, то в некотором базисе матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} B & O_1 \\ O_2 & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $\mathbf{A}|_P : P \to P$, где C — матрица оператора $\mathbf{A}|_Q : Q \to Q$, а матрицы O_1, O_2 нулевые.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ — базис **ИПП** P, $\mathbf{e}_{p+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис **ИПП** Q; тогда все векторы

$$\mathbf{e}_1,\ \dots,\ \mathbf{e}_p,\ \mathbf{e}_{p+1},\ \dots,\ \mathbf{e}_n$$

образуют базис в V.

Рассмотрим матрицу оператора $\mathbf{A}$ в этом базисе. Для всех $j \le p$ имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} a_j^k \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p),$$

откуда $a_j^k = 0$ при $k > p$, $j \le p$. Полагая $b_j^k = a_j^k$ при $j, k \le p$, получим матрицу B оператора $\mathbf{A}_P$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ пространства P.

Задача. Завершите доказательство самостоятельно. □

Теорема. *Пусть $V = P \oplus Q$, где P — **ИПП ЛО** $\mathbf{A}$, а Q не является **ИПП**. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n$ — базис в V такой, что векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ образуют базис в P. Тогда матрица A оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ имеет вид*

$$A = \begin{pmatrix} B & * \\ O & C \end{pmatrix},$$

где B — матрица оператора $\mathbf{A}_P$ в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$.

Задача. Докажите самостоятельно.

12. Собственные подпространства

Простейшими **ИПП** являются одномерные **ИПП**.

Вектор $\mathbf{x}$ называется собственным вектором **(СВ) ЛО** $\mathbf{A}$, если он образует базис в некотором одномерном **ИПП**.

Другими словами, вектор $\mathbf{x}$ называется **СВ**, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и существует такое $\lambda \in \mathbb{K}$, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x};$$

при этом λ называется собственным значением **(СЗ)** оператора $\mathbf{A}$. Говорят также, что **СВ** $\mathbf{x}$ принадлежит **СЗ** λ.

Множество всех **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$ называется спектром этого **ЛО**.

Множество всех **СВ**, принадлежащих **СЗ** λ, дополненное нулевым вектором, является **ИПП**.

Задача. Докажите.

Это **ИПП** называется собственным подпространством **(СПП)**, отвечающим **СЗ** λ, и обозначается P_λ.

Размерность $p_\lambda = \dim P_\lambda$ называется геометрической кратностью **СЗ** λ.

Для любого **СВ** $\mathbf{x}$, принадлежащего **СЗ** λ, его линейная оболочка целиком лежит в P_λ. Обратно, каждое одномерное подпространство пространства P_λ инвариантно, и поэтому пространство P_λ разлагается в прямую сумму одномерных **ИПП**. Чтобы получить такое разложение, достаточно выбрать в P_λ произвольный базис.

Теорема. *Если λ — **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$, то*

$$P_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}),$$

где $\mathbf{I}$ — единичный оператор.

Доказательство. Равенство $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ эквивалентно равенству $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. □

Таким образом, число $\lambda \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда является **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$, когда оператор $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ имеет ненулевое ядро, т.е. вырожден:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ является многочленом степени n от λ, не зависящим от выбора базиса.

Задача. Докажите. Указание:

$$C^{-1}AC - \lambda I = C^{-1}(A - \lambda I)C,$$

где I — единичная матрица.

Многочлен

$$f_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

называется характеристическим многочленом **(ХМ) ЛО** $\mathbf{A}$, а его корни — характеристическими числами **(ХЧ) ЛО** $\mathbf{A}$.

Теорема. *Коэффициенты **ХМ** данного **ЛО** являются инвариантами этого **ЛО**.*

Теорема. *Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — **ХЧ ЛО** $\mathbf{A}$ (с учетом кратности). Имеют место равенства*

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \dots \lambda_n, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Задача. Докажите самостоятельно.

Теорема. *Пусть $\mathbf{A}$ — **ЛО**, действующий в **ЛП** $V(\mathbb{K})$ над **ЧП** $\mathbb{K}$. Любое **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$ является его **ХЧ**. Любое **ХЧ ЛО** $\mathbf{A}$, принадлежащее **ЧП** $\mathbb{K}$, является **СЗ ЛО** $\mathbf{A}$.*

Задача. Докажите самостоятельно.

Алгебраической кратностью n_λ **СЗ** λ называется его кратность как корня **ХМ**.

Теорема. *Алгебраическая кратность n_{λ_0} **СЗ** λ_0 не меньше его геометрической кратности p_{λ_0}:*

$$p_{\lambda_0} \le n_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Пусть $p = p_{\lambda_0}$ и пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ — такой базис в V, что $P_{\lambda_0} = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$. В этом базисе матрица **ЛО** $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} B & * \\ O & C \end{pmatrix},$$

и поэтому

$$f_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\det(C - \lambda I).$$

Но B является матрицей оператора $\mathbf{A}|_{P_{\lambda_0}} = \lambda_0 I$, и потому $\det(B - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^p$. Таким образом, многочлен $f_{\mathbf{A}}(\lambda)$ делится на $(\lambda_0 - \lambda)^p$ и, значит, $p \le n_{\lambda_0}$. □

Практический способ нахождения **СПП** основывается на этой теореме и равенстве $P_\lambda = \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Сначала, решая уравнение $f_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$, находим все его корни, лежащие в $\mathbb{K}$ (они будут в точности **СЗ**), а затем для каждого такого корня λ_0 находим подпространство P_{λ_0}, решая однородную линейную систему с матрицей $A - \lambda_0 I$.

В вещественном **ЛП** четной размерности **ЛО** может не иметь ни одного **СЗ**; в нечетномерном **ЛП** у любого **ЛО** имеется хотя бы одно **СЗ**.

В вещественном **ЛП** все **ХЧ ЛО** либо вещественны, либо появляются сопряженными парами, т.е. если $\lambda \in \mathbb{C}$ — **ХЧ**, то $\bar{\lambda}$ — также **ХЧ**.

Теорема. *В вещественном **ЛП** $V(\mathbb{R})$ каждой паре комплексно сопряженных **ХЧ ЛО** $\mathbf{A}$ отвечает двумерное **ИПП** оператора $\mathbf{A}$, не являющееся **СПП**.*

Доказательство. Пусть $\lambda + i\mu$ — **ХЧ ЛО A**, где $\mu \neq 0$ (отметим, что тогда $\lambda - i\mu$ — тоже **ХЧ**). Рассмотрим произвольный базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в **ЛП** V, A — матрица **ЛО A** в этом базисе.

Поскольку

$$\det\Big(A - (l + i\mu)I\Big) = 0,$$

однородная система уравнений

$$AZ = (\lambda + i\mu)Z, \quad Z \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}),$$

имеет нетривиальное решение

$$Z = X + iY, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n(\mathbb{R}).$$

Имеем:

$$A(X + iY) = (\lambda + i\mu)(X + iY) \quad \Longleftrightarrow$$
$$AX + iAY = \lambda X - \mu Y + i(\lambda Y + \mu X),$$

откуда

$$AX = \lambda X - \mu Y, \quad AY = \lambda Y + \mu X.$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, имеющие координаты X, Y в выбранном базисе. Ясно, что линейная оболочка $P = L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является **ИПП ЛО A**. Докажем, что **ЛПП** двумерно, т.е. векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (и столбцы X, Y) линейно независимы.

1. Сначала докажем, что $Y \neq \mathbf{0}$. Предположим противное, т.е. $Y = 0$. Тогда

$$AX = \lambda X, \quad \mathbf{0} = \mu X$$

и, поскольку $X \neq \mathbf{0}$, получаем $\mu = 0$, что противоречит условию.

2. Предположим, что столбцы X, Y линейно зависимы. Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $X = \alpha Y$, и получаем

$$\alpha AY = \alpha\lambda Y - \mu Y, \quad AY = \lambda Y + \alpha\mu Y.$$

Исключая AY, находим $\mu + \mu\alpha^2 = 0$, что невозможно, так как $\mu \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Теорема. ***СВ ЛО**, принадлежащие различным **СЗ**, линейно независимы.*

Доказательство. Индукция по количеству **СВ**. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что теорема верна для k **СВ**, и докажем, что она верна и для $k + 1$ **СВ**.

Рассмотрим **ЛК СВ** $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k+1}$ и приравняем ее нулевому вектору:

$$\alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^k\mathbf{x}_k + \alpha^{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{$*$}$$

Докажем, что все $\alpha_j = 0$. Имеем:

$$\mathbf{A}(\alpha^1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^k\mathbf{x}_k + \alpha^{k+1}\mathbf{x}_{k+1}) =$$
$$= \alpha^1\mathbf{A}(\mathbf{x}_1) + \dots + \alpha^k\mathbf{A}(\mathbf{x}_k) + \alpha^{k+1}\mathbf{A}(\mathbf{x}_{k+1}) =$$
$$= \alpha^1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha^k\lambda_k\mathbf{x}_k + \alpha^{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{0}.$$

Вычтем из этого равенства $(*)$, умноженное на λ_{k+1}:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_1 + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, так как все λ_j попарно различны и $\lambda_j - \lambda_{k+1} \neq 0$. Тогда из $(*)$ получаем, что $\alpha_{k+1} = 0$. □

Теорема. *Для того чтобы матрица **ЛО** в некотором базисе была диагональна, необходимо и достаточно, чтобы этот базис состоял из **СВ** этого **ЛО**; при этом диагональные элементы матрицы являются **СЗ**.*

Задача. Докажите самостоятельно. Указание: в базисе, состоящем из **СВ**, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = \lambda_k\mathbf{e}_k$.