0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 7

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Различные уравнения прямой на плоскости

Определение 1. *Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой.*

Пусть O — это некоторая фиксированная точка плоскости, точка M_0 с радиус–вектором $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ лежит на искомой прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$. Нетрудно заметить, что точка M с радиус–вектором $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ лежит на прямой, тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т. е. найдётся такое число t, что имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}, \tag{1.1}$$

а поскольку $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

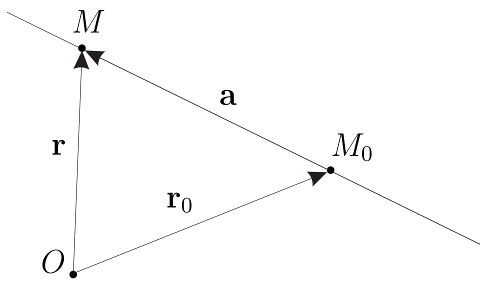

Рис. 1. Векторное уравнение прямой.

Определение 2. *Уравнение* (1.2) *называется векторным параметрическим уравнением прямой.*

Пусть на плоскости задан произвольный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Пусть все введённые векторы заданы своими разложениями по базису:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2. \tag{1.3}$$

После подстановки равенств (1.3) в (1.2) получим следующее уравнение:
$$(x - x_0 - lt)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - mt)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$
но поскольку $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — это базис, то приходим к следующим равенствам:
$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$
Эти равенства можно записать в виде одного равенства
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$
Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *В общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *на плоскости уравнения прямой* (1.5) *эквивалентно равенству*
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \end{vmatrix} = 0. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Из уравнений (1.5), записанных в виде одного равенства (1.6), вытекает равенство (1.7). Обратно, если выполнено равенство (1.7), то найдутся такие числа α, β, не равные одновременно нулю, что
$$\alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Если $\alpha = 0$, то $\beta \neq 0$ и имеет место равенство
$$\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Тогда направляющий вектор $\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$ — это противоречит определению 1 направляющего вектора. Следовательно, $\alpha \neq 0$ и мы приходим к равенству (1.6), которое равносильно равенствам (1.5).

Теорема доказана.

Из равенства (1.7) вытекает следующее уравнение:
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \quad l \neq 0, \quad m \neq 0. \tag{1.8}$$
Кроме того, одновременно числа l и m в ноль обращаться не могут. Если $l = 0$, то из равенства (1.7) получим $x = x_0$, если же $m = 0$, то получим $y = y_0$. Уравнения $x = x_0$ и y_0 — это уравнения прямых, проходящих через точки $(x_0, 0)$ и $(0, y_0)$, и параллельных оси Oy и Ox соответственно. При этом мы распространим равенства (1.8) и на эти два случая:
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}, \tag{1.9}$$
в котором если знаменатель равен нулю, то и числитель тоже равен нулю.

Определение 3. *Уравнения* (1.7) *и* (1.9) *называются каноническими уравнениями прямой на плоскости.*

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *В общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *канонические уравнения прямой эквивалентны уравнению*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0. \tag{1.10}$$

Доказательство.

Из уравнения (1.7) вытекает равенство

$$m(x - x_0) = l(y - y_0) \Leftrightarrow mx - ly - mx_0 + ly_0 = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C + 0,$$

где

$$A = m, \quad B = -l, \quad C = -mx_0 + ly_0, \quad A^2 + B^2 > 0.$$

Обратно пусть задано уравнение (1.10) и поскольку $A^2 + B^2 > 0$, то существует такая точка $M_0(x_0, y_0)$, что

$$Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

но тогда

$$C = -Ax_0 - By_0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. имеет место равенство (1.7) при $l = -B$, $m = A$.

Теорема доказана.

Определение 4. *Уравнение* (1.10) *называется общим уравнением прямой на плоскости.*

Замечание 1. Числа A и B не могут одновременно обращаться в ноль.

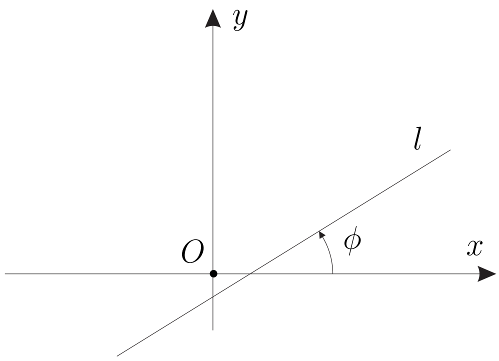

Рис. 2. Уравнение прямой.

Если $B \neq 0$, то из общего уравнения прямой в прямоугольной декартовой системе координат можно получить уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}. \tag{1.11}$$

Можно доказать, что $k \tan\varphi$, где φ — это угол наклона прямой к оси Ox.

§ 2. Направляющий вектор прямой

Пусть прямая задана своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0, \tag{2.1}$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, то как мы выяснили в процессе доказательства теоремы 2 в силу теоремы 1 вектор $\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2$ является одним из направляющих векторов прямой. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Для того чтобы вектор* $\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2$ *был коллинеарен прямой, заданной своим общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

в некоторой общей декартовой системе координат, необходимо и достаточно, чтобы

$$Al + Bm = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство.

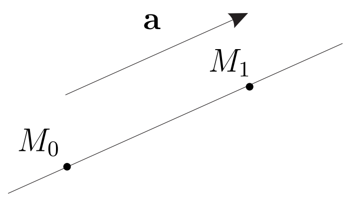

Рис. 3. К теореме 3.

Отложим вектор $\mathbf{a} = \{l, m\}$ от точки прямой $M_0 = (x_0, y_0)$, конец полученного вектора имеет координаты $M_1 = (x_0 + l, y_0 + m)$.

□ Действительно, имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0A} = \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{OM_0} = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{M_0A} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2,$$

тогда

$$\overrightarrow{OA} = (x_0 + l)\mathbf{e}_1 + (y_0 + m)\mathbf{e}_2 = \{x_0 + l, y_0 + m\}. \quad \boxtimes$$

Вектор **a** коллинеарен прямой, тогда и только тогда, когда точка M_1 принадлежит прямой, т. е.

$$A(x_0+l)+B(y_0+m)+C=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Al+Bm+Ax_0+By_0+C=0 \Leftrightarrow Al+Bm=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если рассматриваемая декартова система координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ является прямоугольной, то вектор $\mathbf{n}=\{A,B\}$ ортогонален направляющему вектору $\mathbf{a}=\{l,m\}$:

$$(\mathbf{n},\mathbf{a})=Al+Bm=0.$$

Докажем, что вектор $\mathbf{n}=\{A,B\}$ в прямоугольной декартовой системе координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ является вектором нормали к прямой.

□ Действительно, пусть прямая задана своим общим уравнением

$$Ax+By+C=0, \quad A^2+B^2>0,$$

в котором $M=(x,y)$ — это координаты точки M, лежащей на прямой. Поскольку $A^2+B^2>0$, то существует точка $M_0=(x_0,y_0)$ такая, что

$$Ax_0+By_0+C=0.$$

Тогда приходим к равенству

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Leftrightarrow (\mathbf{n},\overrightarrow{M_0M})=0,$$

но точки M и M_0 лежат на прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен прямой, но тогда из последнего равенства вытекает, что вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен прямой. ⊠

Замечание 3. В общей декартовой системе координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ вектор $\mathbf{n}=\{A,B\}$ не будет нормалью к прямой.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, заданных в общей декартовой системе координат, имеет один из следующих видов*:

$$x=x_1+(x_2-x_1)t, \quad y=y_1+(y_2-y_1)t, \tag{2.3}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0, \tag{2.4}$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{2.5}$$

Доказательство.

В качестве точки $M_0(x_0,y_0)$ возьмём точку $M_1(x_1,y_1)$, а в качестве направляющего вектора $\mathbf{a}$ искомой прямой возьмём вектор

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=l\mathbf{e}_1+m\mathbf{e}_2, \quad l=x_2-x_1, \quad m=y_2-y_1.$$

Теорема доказана.

§ 3. Частные случаи расположения прямой

Пусть уравнение прямой в общей декартовой системе координат задано своим общим уравнением:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0. \tag{3.1}$$

Сделаем следующие наблюдения:

Наблюдение 1. Прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Ox тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ коллинеарен оси Ox, т. е. когда $A = 0$.

Наблюдение 2. Прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ коллинеарен оси Oy, т. е. когда $B = 0$.

Наблюдение 3. Прямая $Ax + By + C = 0$ проходит через начало координат, тогда и только тогда, когда $C = 0$.

§ 4. Взаимное расположения двух прямых

Пусть две прямые заданы своими общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

где $A_1^2 + B_1^2 > 0$ и $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Введём направляющие векторы этих прямых:

$$\mathbf{a}_1 = (-B_1)\mathbf{e}_1 + A_1\mathbf{e}_2 = \{-B_1, A_1\}, \quad \mathbf{a}_2 = (-B_2)\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 = \{-B_2, A_2\}.$$

Наблюдение 1. Прямые l_1 и l_2 пересекаются, если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

$\square$ Действительно, как мы доказали ранее векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, т. е. найдутся такие числа α и β, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha(-B_1) + \beta(-B_2))\mathbf{e}_1 + (\alpha A_1 + \beta A_2)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0},$$

а поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ линейно независимое семейство, то

$$\alpha(-B_1) + \beta(-B_2) = 0, \quad \alpha A_1 + \beta A_2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а поскольку числа α и β не равны одновременно нулю приходим к следующему необходимому и достаточному условию коллинеарности векторов

$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0.$$

По условию векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ неколлинеарны, поэтому

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad \boxtimes$$

Наблюдение 2. Прямые l_1 и l_2 параллельны, если векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, т. е. если

$$\begin{vmatrix} -B_1 & A_1 \\ -B_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} =: \lambda,$$

но прямые не совпадают:

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2 \Rightarrow \lambda(A_2 x + B_2 y) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 \neq \lambda C_2.$$

Наблюдение 3. Прямые совпадают. Очевидно, это условия

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

§ 5. Полуплоскости, определяемые прямой

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ прямая линия задана своим общим уравнением*:

$$Ax + By + C = 0.$$

Тогда для координат x, y всех точек $M(x, y)$, лежащих по одну сторону от прямой, выполняется неравенство

$$Ax + By + C > 0,$$

а для координат x, y всех точек $M(x, y)$, лежащих по другую сторону от прямой, выполняется неравенство

$$Ax + By + C < 0.$$

Доказательство.

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — это две произвольные точки, лежащие по разные стороны от прямой l, заданной своим общим уравнением

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0,$$

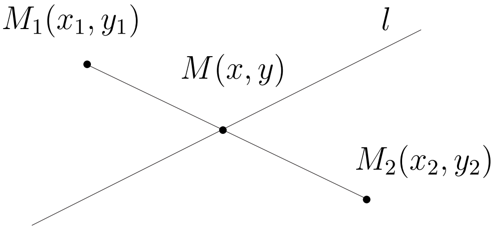

Рис. 4. К теореме 5.

в некоторой общей декартовой системе координат. Это означает, что существует внутренняя точка $M(x, y) \in M_1M_2$. Пусть

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \Leftrightarrow x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Кроме того, ясно, что $\lambda > 0$. Точка $M(x, y) \in l$, поэтому имеет место следующее равенство:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} + C = 0,$$

из которого вытекает равенство

$$0 < \lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} \Rightarrow (Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0.$$

Сначала фиксируем точку $M_1(x_1, y_1)$, а точку $M_2(x_2, y_2)$ будем менять, оставаясь в заданной полуплоскости. Ясно, что знак выражения $Ax_2 + By_2 + C$ будет оставаться неизменным. Теперь зафиксируем точку $M_2(x_2, y_2)$, а точку $M_1(x_2, y_2)$ будем менять, оставаясь в заданной полуплоскости. Ясно, что знак выражения $Ax_1 + By_1 + C$ будет тоже оставаться неизменным.

Следовательно, одна полуплоскость задаётся неравенством $Ax + By + C > 0$, а другая полуплоскость — уравнением $Ax + By + C < 0$.

Теорема доказана.

Справедлива ещё одна теорема в этом направлении.

Теорема 6. *Пусть прямая l задана своим общим уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 = B^2 > 0$$

относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Тогда если от произвольной точки прямой $M_0(x_0, y_0) \in l$ отложить вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$, то конец $M_1(x_1, y_1)$ полученного направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M_1}$ будет лежать в положительной полуплоскости:

$$Ax_1 + By_1 + C > 0.$$

Доказательство.

Согласно условию теоремы имеем

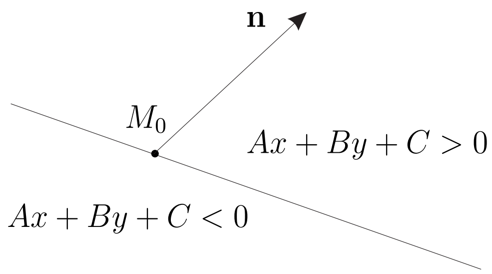

Рис. 5. К теореме 6.

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M_1} =$$
$$= \mathbf{r}_0 + \mathbf{n} = (x_0 + A)\mathbf{e}_1 + (y_0 + B)\mathbf{e}_2 = \{x_0 + A, y_0 + B\}.$$

Далее

$$M_1(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + A, \quad y_1 = y_0 + B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ax_1 + By_1 + C = Ax_0 + By_0 + C + A^2 + B^2 = A^2 + B^2 > 0.$$

Теорема доказана.

Наблюдение. Можно сделать более общее наблюдение в направлении этой теоремы. Пусть относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ задан произвольный вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ и задано общее уравнение прямой

$$l: \quad Ax + By + C = 0.$$

Пусть произвольная точка $M_0(x_0, y_0) \in l$. Тогда отложим от этой точки вектор $\mathbf{b}$ и в результате получим направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M_1}$, где

$$M_1(x_1, y_1), \quad x_1 = x_0 + b_1, \quad y_1 = y_0 + b_2.$$

Справедлива цепочка равенств

$$Ax_1 + By_1 + C = Ax_0 + By_0 + C + Ab_1 + Bb_2 = Ab_1 + Bb_2.$$

Если $Ab_1 + Bb_2 > 0$, то вектор $\mathbf{b}$ направлен в сторону положительной полуплоскости $Ax + By + C > 0$, а если $Ab_1 + Bb_2 < 0$, то вектор $\mathbf{b}$ направлен в сторону отрицательной полуплоскости $Ax + By + C < 0$.

§ 6. Нормальное уравнение прямой

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 7. *В произвольной общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *общее уравнение прямой*

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \tag{6.1}$$

эквивалентно нормальному уравнение прямой:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + C = 0, \tag{6.2}$$

где вектор $\mathbf{n}$ *однозначно определяется упорядоченной двойкой* A, B.

Доказательство. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это общая декартова система координат на плоскости π, в которой задано общее уравнение прямой (6.1) на плоскости π в пространстве и $\mathbf{e}_3$ — это произвольный вектор нормали к плоскости π. Введём следующий вектор

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + B[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{6.3}$$

Заметим, что

$$(\mathbf{n}, \mathbf{e}_1) = A, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2) = B.$$

В силу линейности скалярного произведения имеем

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1)x + (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2)y + C = 0 \Rightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + C = 0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$.

Обратно, пусть задано уравнение (6.2), тогда в силу линейности скалярного произведения из этого уравнения вытекает уравнение (6.1), в котором

$$A = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_1), \quad B = (\mathbf{n}, \mathbf{e}_2).$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 8. *Пусть на плоскости даны точка* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *и прямая, заданная уравнением* $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + C = 0$. *Тогда*

1. *радиус–вектор* $\mathbf{r}_2$ *точки* M_2, *являющейся ортогональной проекцией точки* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *на прямую* l, *выражается формулой*

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}; \tag{6.4}$$

2. *расстояние от точки* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *до прямой* l *выражается формулой*

$$d(M_1, l) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}; \tag{6.5}$$

3. *Радиус вектор* $\mathbf{r}_3$ *точки* M_3, *симметричной точке* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *относительно прямой* l, *выражается формулой*

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{6.6}$$

Доказательство.

Пункт 1. Имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{n} \tag{6.7}$$

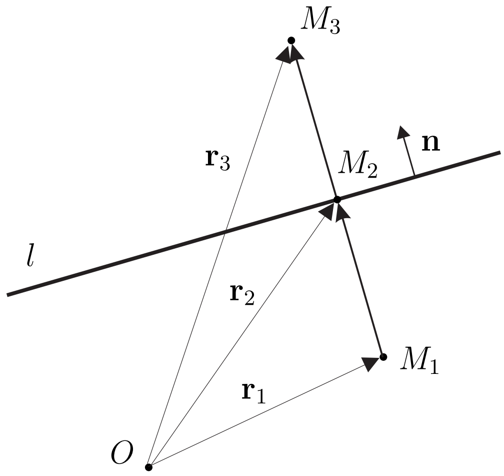

Рис. 6. К теореме 8.

при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$(\mathbf{r}_2, \mathbf{n}) + C = 0,$$

поэтому умножим скалярно на $\mathbf{n}$ обе части равенства (6.7) и получим равенство

$$-C - (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = \lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \Rightarrow \lambda = -\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}. \tag{6.8}$$

Из (6.7) и (6.8) получим искомое равенство

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{6.9}$$

Пункт 2. Из формул (6.7) и (6.9) получим цепочку равенств

$$d(M_1, l) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \left|\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}\right| = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C|}{|\mathbf{n}|}.$$

Пункт 3. Действительно,

$$\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3} = \mathbf{r}_1 + 2\overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + C}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}.$$

Теорема доказана.

Наконец, дадим определение нормированного уравнения прямой в декартовой прямоугольной системе координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

Определение 5. *Нормированным уравнением прямой называется уравнение следующего вида*:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - p = 0, \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad p \geqslant 0. \tag{6.10}$$

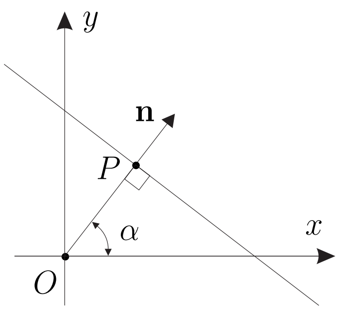

Рис. 7. Нормированное уравнение прямой.

Пусть $p > 0$. Перепишем нормированное уравнение (6.10) в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \quad A = (\mathbf{n}, \mathbf{i}), \quad B = (\mathbf{n}, \mathbf{j}), \quad C = -p < 0.$$

Поскольку $C < 0$, то начало координат $O = (0, 0)$ лежит в отрицательной полуплоскости

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C < 0.$$

Опустим из начала координат перпендикуляр к прямой. Обозначим через P основание перпендикуляра. Заметим, что вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к прямой направлен в сторону положительной полуплоскости

$$Ax + By + C > 0.$$

Но тогда направленный отрезок $\overrightarrow{OP}$ и вектор $\mathbf{n}$ не только коллинеарны но и сонаправлены. Поэтому если ввести угол α между осью Ox и направленным отрезком $\overrightarrow{OP}$, то он равен углу между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{i}$:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = \cos\alpha, \quad (\mathbf{n}, \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Значит, $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ и нормированное уравнение прямой можно записать в следующем виде:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad p > 0. \tag{6.11}$$