0.5 setgray0 0.5 setgray1

Лекция 6

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§ 1. Скалярное произведение

Определение 1. *Углом φ между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется тот из углов, образованный этими векторами, отложенный от одной точки, который меняется в пределах от* $[0, \pi]$. *Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определён.*

Определение 2. *Скалярным произведением двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется число*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\varphi, & \textit{если} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \textit{если} \quad \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \textit{или} \quad \mathbf{b} = \mathbf{0}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где φ — это угол между векторами $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

Справедливо следующее утверждение, которое является следствием определения проекции вектора на ось:

Лемма 1. *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, *то справедливо следующее равенство*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot \text{Пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot \text{Пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}. \tag{1.2}$$

Определение 3. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.*

Обозначение. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Справедливо следующее очевидное утверждение:

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *и* $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ *и* φ *— это угол между этими векторами. Тогда*

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2$,
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0 \Leftrightarrow \varphi$ *— это острый угол*,
3. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0 \Leftrightarrow \varphi$ *— это тупой угол.*

Имеют место следующие свойства скалярного произведения:

Теорема 1. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *и любого числа* λ *справедливы следующие равенства*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}), \tag{1.3}$$

$$(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \tag{1.4}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{1.5}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0 \quad \textit{если} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \tag{1.6}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Равенство (1.3) это очевидное следствие определения скалярного произведения. Равенство (1.4) есть следствие свойств проекции вектора на ось и леммы 1:

$$(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\text{Пр}_{\mathbf{b}}(\lambda\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\lambda\cdot\text{Пр}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Равенство (1.5) есть следствие свойств проекции вектора на ось и леммы 1:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = |\mathbf{c}|\cdot\text{Пр}_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\cdot(\text{Пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a}+\text{Пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b}) = \\ = |\mathbf{c}|\cdot\text{Пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{a} + |\mathbf{c}|\cdot\text{Пр}_{\mathbf{c}}\mathbf{b} = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Справедливы следующие равенства*:

$$(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b},\mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b},\mathbf{c}), \tag{1.8}$$

$$(\mathbf{a},\gamma\mathbf{c}+\delta\mathbf{d}) = \gamma(\mathbf{a},\mathbf{c}) + \delta(\mathbf{a},\mathbf{d}) \tag{1.9}$$

для всех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ *и любых чисел* α, β, γ, δ.

Определение 4. *Базис* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *называется ортонормированным, если*

$$(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad i = j; \\ 0, & \textit{если} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{1.10}$$

Наконец справедлива следующая важная теорема:

Теорема 2. *Если в ортонормированном базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3,$$

то

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.11}$$

Доказательство.

Достаточно воспользоваться следствием из теоремы 1:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) = \\ = x_1x_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) + x_1z_2(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3) + y_1x_2(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) + \\ + y_1y_2(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) + y_1z_2(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) + z_1x_2(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1) + z_1y_2(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2) + z_1z_2(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Теорема доказана.

§ 2. Векторное произведение векторов

Прежде всего введём определение правой тройки векторов в трёхмерном пространстве.

Определение 5. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *называется правой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся против часовой стрелки.*

Определение 6. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *называется левой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся по часовой стрелки.*

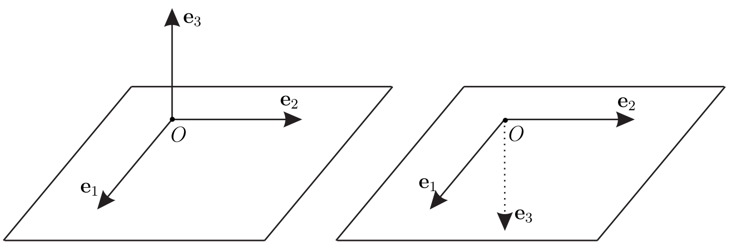

Рис. 1. Правая и левая тройка векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Если тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *правая, то при перестановке векторов, либо при перемене знака какого–либо из векторов получаются левые тройки векторов. И обратно, указанными операциями над упорядоченными тройками векторов левые тройки переходят в правые.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — это правая тройка векторов.

Пункт 1. Докажем, что $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$. Если в тройке $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот был виден из конца вектора $\mathbf{c}$ совершающимся против часовой стрелки, то в тройке $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот видимый из конца вектора $\mathbf{c}$ будет происходить по часовой стрелке.

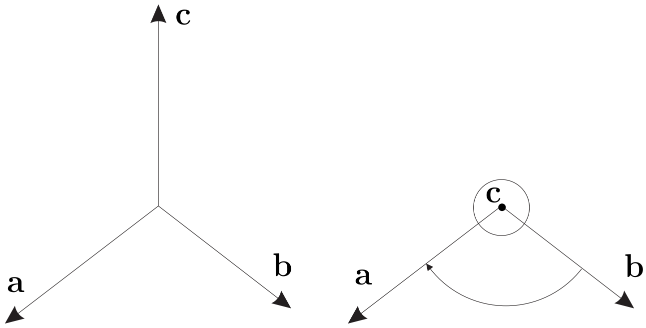

Рис. 2. Тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$.

Пункт 2. Докажем, например, что $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}\}$ — это левая тройка векторов. Если в тройке векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот из конца вектора $\mathbf{c}$ был виден совершающимся против часовой стрелки, то тот же поворот из конца вектора $-\mathbf{c}$ будет виден совершающимся по часовой стрелки.

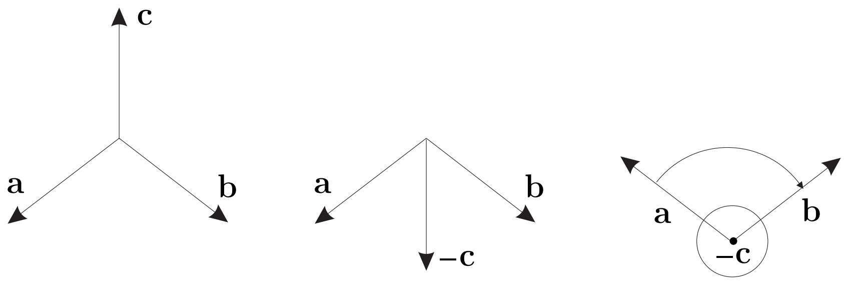

Рис. 3. Тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}\}$.

Лемма доказана.

Дадим определение *векторного произведения векторов*.

Определение 7. *Векторным произведением упорядоченной пары векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор*

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

удовлетворяющий следующим требованиям:

(i) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *— это угол между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$;

(ii) *вектор* $\mathbf{c}$ *ортогонален каждому из векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*;*

(iii) *упорядоченная тройка* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *образует правую тройку*.

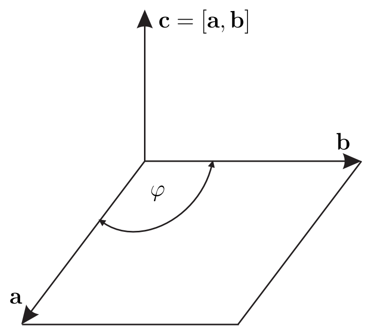

Рис. 4. Векторное произведение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Замечание 1. Заметим, что из пункта (i) определения 14 векторного произведения векторов вытекает, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}},$$

где $S_{\mathbf{ab}}$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Действительно, высота h этого параллелограмма равна

$$h = |\mathbf{a}| \cdot \sin\varphi \Rightarrow S = h \cdot |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi.$$

Прежде всего докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Условиями* (i)–(iii) *определения 7 однозначно определяется некоторый вектор* $\mathbf{c}$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, тогда угол φ между ними равен либо 0 либо π и в любом случае согласно свойству (i) длина вектора $\mathbf{c}$ равна нулю. Значит, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Шаг 2. Пусть теперь векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинераны. Отложим эти векторы от произвольной точки O пространства и получим направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Треугольник AOB лежит в однозначно определённнной плоскости π_{AOB} плоскости.

Теперь заметим, что у всякой плоскости существуют ортогональные ей векторы. Рассмотрим направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ ортогональный этой плоскости. Тогда направленный отрезок

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}.$$

Теперь фиксируем длину этого направленного отрезка условием

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\varphi \neq 0.$$

Однако, указанным пока условиям удовлетворяют как направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$, так и направленный отрезок $-\overrightarrow{OC}$.

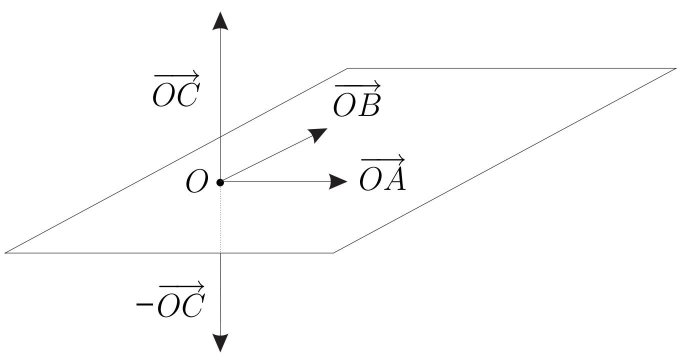

Рис. 5. К лемме 4.

Однако, если

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$$

— это правая тройка векторов, то

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$$

левая тройка. И наоборот, если

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$$

— это левая тройка векторов, то

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$$

— это правая тройка векторов. Следовательно, либо $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ правая тройка либо $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$ правая тройка. Таким образом, однозначно определён вектор $\mathbf{c}$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$ либо направленным отрезком $-\overrightarrow{OC}$, удовлетворяющий свойствам (i)–(iii).

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 5. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только, когда их векторное произведение* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = 0$, либо $\sin\varphi = 0$. Во всех случаях $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема о таблице умножения векторов правого ортонормированного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

Теорема 3. *Имеет место таблица векторного умножения*:

$[\cdot,\cdot]$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

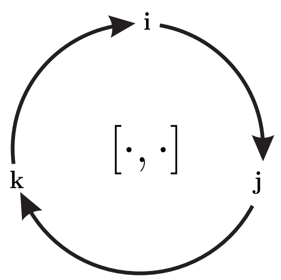

Рис. 6. Таблица векторного умножения.

Доказательство. Проводится непосредственной проверкой всевозможных векторных произведений.

Шаг 1. Сначала докажем, что $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$. Действительно, пусть

$$\mathbf{c} := [\mathbf{i}, \mathbf{j}].$$

Теперь следуем свойствам (i)–(iii) определения 7 векторного произведения:

1. из свойства (i), поскольку $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ и $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$, получаем равенство $|\mathbf{c}| = 1$;

2. из свойства (ii) вытекает, что вектор $\mathbf{c}$ коллинеарен вектору $\mathbf{k}$ и эти два вектора имеют одинаковую длину. Следовательно, $\mathbf{c} = \pm\mathbf{k}$;

3. заметим, что по условию $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — это правая тройка и поэтому тройка $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{c}\}$ будет правой тогда и только тогда, когда $\mathbf{c} = \mathbf{k}$.

Шаг 2. Докажем, например, равенство $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}$. Прежде всего заметим, что тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\}$ правая. Действительно, она получена из правой тройки векторов $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ двумя последовательными перестановки векторов:

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \to \{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\} \to \{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\}.$$

Далее рассуждаем точно также как и на первом шаге. Аналогичным образом получаем равенство

$$[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j},$$

поскольку тройка векторов $\{\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ правая:

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \to \{\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}\} \to \{\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}.$$

Шаг 3. Теперь докажем равенство $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$. Прежде всего заметим, что тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ левая, поскольку получена из правой тройки $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ одной перестановкой векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Но тогда тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{k}\}$ правая, поскольку получена из левой тройки $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ заменой вектора $\mathbf{k}$ на противоположный ему вектор $-\mathbf{k}$.

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{c} := [\mathbf{j}, \mathbf{i}].$$

В силу условий (i) и (ii) мы получим, что $\mathbf{c} = \pm\mathbf{k}$, а поскольку в силу условия (iii) тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{c}\}$ должна быть правой получим, что $\mathbf{c} = -\mathbf{k}$.

Шаг 4. На круговой диаграмме мы указали способ как запомнить указанную таблицу умножения. Если умножение первого вектора на второй происходит по стрелке, то это произведение будет равно третьему вектору, взятому со знаком «$+$». Если умножение проводится против часовой стрелки, то умножение даст третий вектор со знаком «$-$».

Теорема доказана.

Следствие. *Справедливы следующие равенства*:

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = -[\mathbf{j}, \mathbf{i}], \quad [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = -[\mathbf{k}, \mathbf{j}], \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = -[\mathbf{i}, \mathbf{k}].$$

Ниже в теореме 5 мы докажем свойства линейности векторного произведения векторов, которое может быть записано в следующем виде:

$$[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \tag{2.1}$$

$$[\mathbf{a}, \delta\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}] = \delta[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \delta[\mathbf{a}, \mathbf{d}], \tag{2.2}$$

которые справедливы для всех соответствующих векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ и всех чисел α, β, γ, δ.

Справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 4. *Если* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — *это правый базис и*

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}, \tag{2.3}$$

то имеет место следующее равенство:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь нужно воспользоваться равенствами (2.1) и (2.2) и получить следующее равенство:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}] = \\
= x_1x_2[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + x_1y_2[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + x_1z_2[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + \\
+ y_1x_2[\mathbf{j}, \mathbf{i}] + y_1y_2[\mathbf{j}, \mathbf{j}] + y_1z_2[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + \\
+ z_1x_2[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + z_1y_2[\mathbf{k}, \mathbf{j}] + z_1z_2[\mathbf{k}, \mathbf{k}] = \\
= (x_1y_2 - y_1x_2)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + (z_1x_2 - z_2x_1)[\mathbf{k}, \mathbf{i}] + (y_1z_2 - z_1y_2)[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \\
= (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k} + (z_1x_2 - z_2x_1)\mathbf{j} + (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} = \\
= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

где мы воспользовались доказанным правилом векторного умножения элементов правого ортонормированного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, а также равенствами

$$[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = [\mathbf{j}, \mathbf{j}] = [\mathbf{k}, \mathbf{k}] = \mathbf{0},$$

которые являются следствиями леммы 5.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 6. *Справедливо следующее равенство*:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

для любых $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *из евклидова пространства* $\mathcal{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}].$$

Шаг 2. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, тогда рассмотрим два вектора

$$\mathbf{c}_1 := [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_2 := [\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq \mathbf{0}.$$

По свойствам (i) и (ii) векторного произведения векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ обладают следующими свойствами:

1. $|\mathbf{c}_1| = |\mathbf{c}_2|$;

2. $\mathbf{c}_1 \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{c}_2 \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — это произвольная плоскость, которая параллельна векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Из этих двух свойств вытекает, что либо $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ либо $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$.

Предположим, что $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$. По свойству (iii) векторного произведения тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ и $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_2\}$ обе правые. Тогда тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ и $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1\}$ обе правые, но это противоречит тому, что тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1\}$ получена из тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ перестановкой соседних векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Значит, случай $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ невозможен.

Следовательно, $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$.

Лемма доказана.

§ 3. Смешанное произведение векторов

Определение 8. *Смешанным произведением* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *трёх векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\mathbf{a}$ *на векторное произведение* $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 7. *Векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *компланарны (линейно зависимы) тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны, поскольку в противоположных случаях смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, а вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ей перпендикулярен. Следовательно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, тогда либо

$$|\mathbf{a}| = 0 \quad \text{либо} \quad |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 0 \quad \text{либо} \quad \cos\varphi = 0,$$

где φ — это угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

В первом случае вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, но тогда тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ очевидно линейно зависима и, следовательно, компланарна.

Во втором случае векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Поэтому линейно зависима и тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, а, стало быть, компланарна.

В третьем случае имеем

$$\mathbf{a} \perp [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \Rightarrow \mathbf{a} \,||\, \pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

и, следовательно, тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарна.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *равно следующему числу*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \textit{правая}; \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \textit{левая}, \end{cases}$$

где $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — *объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *отложенных от одной точки.*

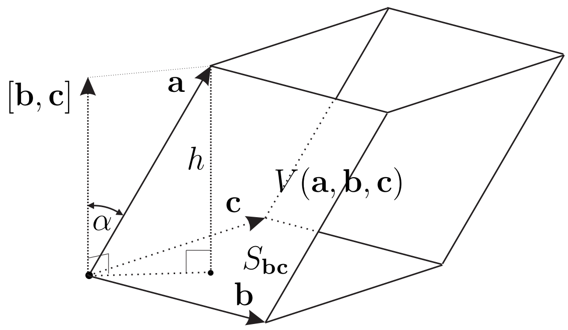

Рис. 7. Ориентированный объём.

Доказательство.

Шаг 1. Если векторы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ компланарны, то в силу леммы 7 имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Шаг 2. Пусть векторы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ не компланарны. Отложим все векторы от одной точки. Тогда

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = h \cdot S_{\mathbf{bc}},$$

где

$$h = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \quad S_{\mathbf{bc}} = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|,$$

где α — это угол между вектором $\mathbf{a}$ и тем вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, который направлен в туже часть полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, что и вектор $\mathbf{a}$. Ясно, что при этом $\alpha \in (0, \pi/2]$. Заметим, что

$$\cos(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \pm \cos \alpha,$$

причём знак «+» имеет место тогда, когда вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ направлен в туже часть полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, что и вектор $\mathbf{a}$; знак «$-$» берётся тогда, когда векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в разные полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Теперь заметим, что если векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в одно полупространство относительно $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то поскольку тройка

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$$

правая, то и тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ тоже правая. Если же векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в разные полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то поскольку тройка

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$$

правая, то тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, -[\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$ левая, а поскольку векторы $-[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в одно полупространство, то и тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ тоже левая.

Следовательно, имеем

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos\alpha = \\ = |\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos|(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.1)$$

если тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ правая;

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos\alpha = \\ = -|\mathbf{a}| \cdot |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| \cdot \cos|(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.2)$$

если тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ левая. Заметим, что тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ получена из тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ последовательными двумя перестановками двух соседних векторов:

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \to \{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\} \to \{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}.$$

Поэтому тройки $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ и $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ одинаково ориентированы.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 8. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *справедливо равенство*

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}). \quad (3.3)$$

Доказательство.

Шаг 1. В случае компланарной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обе части равенства (3.3) равны нулю.

Шаг 2. Предположим, что эти векторы не компланарны. Тогда, с одной стороны,

$$V_{\mathbf{abc}} = V_{\mathbf{cab}}.$$

С другой стороны, тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ и тройка $\{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, одинаково направлены, поскольку

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \to \{\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\} \to \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\},$$

т. е. тройки связаны двумя последовательными перестановками векторов. Следовательно, в силу теоремы 5 приходим к утверждению леммы, поскольку

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left\{\begin{array}{ll} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ левая,} \end{array}\right\} =$$

$$= \begin{cases} V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ левая,} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b} \text{ левая,} \end{cases} = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Лемма доказана.

Дадим определение циклической перестановки упорядоченного семейства векторов $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$.

Определение 9. *Циклической перестановкой называется результат двух последовательных перестановок векторов.*

Например, у семейства $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ существует всего две нетривиальные циклические перестановки

$$\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\} \quad \text{и} \quad \{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\}$$

и одна тривиальная

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}.$$

Следствие. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *имеют место следующие равенства*:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \\ = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = -(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}) = -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}), \quad (3.4)$$

т. е. при циклической перестановке векторов семейства $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ *смешанное произведение не меняется, а при перестановке двух каких–либо векторов смешанное произведение меняет свой знак на противоположный.*

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку при циклической перестановке векторов упорядоченного семейства $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ ориентация не меняется, то помимо доказанного в лемме 8 следующего равенства:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = (\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b})$$

получаем ещё равенство

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}).$$

Шаг 2. Используя антикоммутативность векторного произведения мы получим следующие равенства:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = -(\mathbf{a},[\mathbf{c},\mathbf{b}]) = -(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}),$$

$$(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = -(\mathbf{c},[\mathbf{b},\mathbf{a}]) = -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}),$$

$$(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{a}]) = -(\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{c}]) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}).$$

Следствие доказано.

§ 4. Линейность смешанного и векторного произведений

Справедливы следующие два утверждения:

Теорема 6. *Смешанное произведение линейно по каждому из трёх сомножителей.*

Доказательство.

Шаг 1. Линейность смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ по первому аргументу $\mathbf{a}$ вытекает из линейности скалярного произведения. Действительно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Шаг 2. В силу (3.4) справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]),$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]).$$

Далее нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу.

Теорема доказана.

Теорема 7. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Доказательство.

Докажем линейность по первому сомножителю. Введём вектор

$$\mathbf{d} := [\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}].$$

Имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = ([\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}], \mathbf{d}) &= \\ = (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) &= \\ = \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) &= 0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались линейностью смешанного произведения по всем аргументам. Итак, приходим к следующему равенству:

$$|\mathbf{d}|^2 = (\mathbf{d}, \mathbf{d}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.

Формула вычисления векторного и смешанного произведения в ортонормированном базисе. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы координатами в правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Ране мы доказали равенство (2.4):

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Теперь мы можем доказать следующую формулу:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.2}$$

□ Действительно, в силу формулы (1.11) имеет место следующая формула:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{c},[\mathbf{a},\mathbf{b}]) =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad \boxtimes$$

§ 5. Двойное векторное произведение

Определение 9. *Повторное применение векторного произведения к векторам* $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$ *и* $\mathbf{a}$ *приводит к следующему вектору*:

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] \tag{5.1}$$

называется двойным векторным произведением.

Справедлива следующая:

Формула Лагранжа.

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}). \tag{5.2}$$

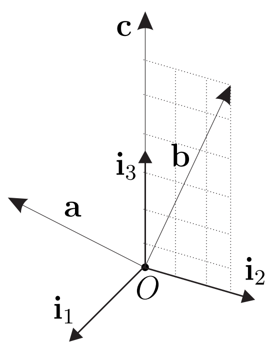

Рис. 8. К доказательству формулы Лагранжа.

□ Действительно, выберем ортонормированный правый базис $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ следующим образом: вектор $\mathbf{i}_3$ сонаправлен с вектором $\mathbf{c}$, а вектор $\mathbf{i}_2$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Тогда

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{b} = b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{c} = c_3\mathbf{i}_3.$$

Имеем:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3\mathbf{i}_1,$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_3b_2c_3\mathbf{i}_2 - a_2b_2c_3\mathbf{i}_3.$$

Далее

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = a_3c_3, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_2b_2 + a_3b_3,$$

так что

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = a_3c_3(b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3), \quad \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_2b_2 + a_3b_3)c_3\mathbf{i}_3.$$

Итак,

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_3b_2c_3\mathbf{i}_2 - a_2b_2c_3\mathbf{i}_3. \quad \boxtimes$$

§ 6. К теории определителей третьего порядка

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это произвольный базис в пространстве, т. е. тройка некомпланарных векторов. Пусть нам задано упорядоченное семейство, состоящее из трёх произвольных векторов в пространстве, возможно линейно зависимое, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, заданное своими разложениями по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3, \tag{6.1}$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{e}_1 + b_y\mathbf{e}_2 + b_z\mathbf{e}_3, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{c} = c_x\mathbf{e}_1 + c_y\mathbf{e}_2 + c_z\mathbf{e}_3. \tag{6.3}$$

Справедлива следующая формула:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \tag{6.4}$$

где величина

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} := a_xb_yc_z + a_zb_xc_z + a_yb_zc_x - \\ - a_zb_yc_x - a_yb_xc_z - a_xb_zc_y. \tag{6.5}$$

□ Действительно, справедливы следующие формулы:

$$[\mathbf{b},\mathbf{c}] = [b_x\mathbf{e}_1 + b_y\mathbf{e}_2 + b_z\mathbf{e}_3, c_x\mathbf{e}_1 + c_y\mathbf{e}_2 + c_z\mathbf{e}_3] = \\ = b_xc_y[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2] + b_xc_z[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3] + b_yc_x[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1] + b_yc_z[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3] + \\ + b_zc_x[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1] + b_zc_y[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2], \quad (6.6)$$

$$(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = (a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3, [\mathbf{b},\mathbf{c}]) = a_xb_yc_z(\mathbf{e}_1,[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]) + \\ + a_xb_zc_y(\mathbf{e}_1,[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2]) + a_yb_xc_z(\mathbf{e}_2,[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]) + a_yb_zc_x(\mathbf{e}_2,[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]) + \\ + a_zb_xc_y(\mathbf{e}_3[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]) + a_zb_yc_x(\mathbf{e}_3,[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1]) = \\ = \Big(a_xb_yc_z - a_xb_zc_y - a_yb_xc_z + \\ + a_yb_zc_x + a_zb_xc_y - a_zb_yc_x\Big)(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3). \quad \boxtimes \quad (6.7)$$

З а м е ч а н и е 2. Мы уже ввели определитель третьего порядка в первых двух лекциях. Однако, любопытно посмотреть развитие теории определителей исходя из формул (6.4) и (6.5).

Наблюдение 1. Прежде всего заметим, что поскольку $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ — это базис, т. е. в частности, линейно независимое семейство векторов, что с геометрической точки зрения означает, что эти векторы не компланарны. Поэтому их смешанное произведение

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) \neq 0. \quad (6.8)$$

Наблюдение 2. Поскольку $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ — это базис, то каждому вектору из упорядоченного семейства $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ взаимно однозначно соответствует столбец из его координат в разложении по базису $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} \leftrightarrow C = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Наблюдение 3. Определитель (6.5) удобно рассматривать как вещественную функцию относительно упорядоченного семейства столбцов $\{A,B,C\}$ и для этой функции справедливо следующее представление:

$$F = F(A,B,C) := \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}, \quad (6.10)$$

поскольку $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ — это некоторое число отличное от нуля. Из представления (6.10) вытекают следующие свойства:

С в о й с т в о 1. *Если у определителя $F(A,B,C)$ какие-либо столбцы совпадают, то определитель равен нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, второй и третий столбцы равны: $B = C$, но это означает, что векторы $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Но тогда семейство векторов $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ компланарно и, значит, в силу леммы 7 их смешанное произведение равно нулю: $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$. Из равенства (6.10) вытекает утверждение.

С в о й с т в о д о к а з а н о.

Свойство 2. *Если у определителя какой–либо столбец нулевой, тогда определитель равен нулю.*

Доказательство.

Опять следствия равенства (6.10) и очевидного равенства $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ в случае равенства нулю какого–либо вектора.

Свойство доказано.

Свойство 3. *При перестановке каких–либо столбцов определитель меняет знак.*

Доказательство.

Перестановка каких–либо столбцов определителя равносильно перестановке соответствующих векторов в смешанном произведении $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Но в силу свойства (3.4) смешанное произведение меняет знак.

Свойство доказано.

Свойство 4. *Определитель является полилинейной функцией своих столбцов, т. е.*

$$
\begin{aligned}
f\left(\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2, B, C\right) &= \alpha_1 f(A_1, B, C) + \alpha_2 f(A_2, B, C),\\
f(A, \beta_1 \cdot B_1 + \beta_2 \cdot B_2, C) &= \beta_1 f(A, B_1, C) + \beta_2 f(A, B_2, C),\\
f(A, B, \gamma_1 \cdot C_1 + \gamma_2 \cdot C_2) &= \gamma_1 f(A, B, C_1) + \gamma_2 f(A, B, C_2).
\end{aligned}
$$

Доказательство.

Докажем, например, первое равенство. В силу представления (6.10) имеет место следующее равенство:

$$
f\left(\alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_2 \cdot A_2, B, C\right) = \frac{(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)},
$$

где

$$
\mathbf{a}_1 \leftrightarrow A_1, \quad \mathbf{a}_2 \leftrightarrow A_2.
$$

Далее нужно воспользоваться результатом теоремы 6 и получить равенство

$$
(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}),
$$

из которого и вытекает искомое равенство.

Свойство доказано.

Наконец, справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 8. *Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа* α, β, γ, *не равные одновременно нулю, чтобы*

$$
\alpha A + \beta B + \gamma C = O, \tag{6.11}
$$

где

$$
A = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Доказательство. В силу представления (6.10) и леммы 7 вытекает, что равенство нулю определителя равносильно тому, что семейство векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ линейно зависимо, где

$$\mathbf{a} \leftrightarrow A, \quad \mathbf{b} \leftrightarrow B, \quad \mathbf{c} \leftrightarrow C.$$

Докажем, что равенство

$$\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{6.12}$$

равносильно равенству (6.11). Действительно, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ взаимно однозначно связаны с соответствующими столбцами равенствами (6.1)–(6.3). Поэтому равенство (6.12) равносильно равенству

$$(\alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x)\mathbf{e}_1 + (\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y)\mathbf{e}_2 + (\alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0},$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ равносильно следующим трём равенствам:

$$\alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x = 0, \tag{6.13}$$

$$\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y = 0, \tag{6.14}$$

$$\alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z = 0, \tag{6.15}$$

которые в силу определения суммы столбцов и произведения столбца на вещественное число эквивалентны равенству (6.11).

Теорема доказана.