

Семинар–Лекция 7

НАПРАВЛЕННОСТИ. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Частичный порядок

Определение 1. *Говорят, что на множестве X задано отношение частичного порядка, если для некоторых пар (x, y) элементов множества X сказано, что $x \leq y$, причём выполнены следующие условия:*

- 1) $\forall x \in X \ x \leq x$ (рефлексивность);
- 2) $\forall x, y \in X \ (x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y)$ (антисимметричность);
- 3) $\forall x, y, z \in X \ (x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z)$ (транзитивность).

Замечание 1.

1. Говорят о частичном порядке, потому что не обязательно любые два элемента $x, y \in R$ сравнимы, т. е. не для каждой пары элементов $x, y \in R$ верно хотя бы одно из соотношений $x \leq y, y \leq x$. Если в R сравнимы все пары элементов, то такое отношение порядка называется линейным порядком. Очевидно, линейный порядок представляет собой частный случай частичного порядка.

2. В дальнейшем без всяких оговорок будем употреблять запись $y \geq x$ в качестве синонима записи $x \leq y$.

3. Иногда говорят « x меньше y » и пишут « $x < y$ », имея в виду, что $x \leq y$ и при этом $x \neq y$.

§ 2. Примеры.

ПРИМЕР 1. Множество натуральных чисел с обычным порядком является частично (и даже линейно) упорядоченным множеством.

ПРИМЕР 2. То же верно для множества действительных чисел.

ПРИМЕР 3. Введём отношение частичного порядка между числовыми функциями на некотором множестве X следующим образом: $f \leq g$, если при всех $x \in X$ верно числовое неравенство (понимаемое в обычном смысле) $f(x) \leq g(x)$. Проверьте, что все условия выполнены. Очевидно, что найдутся несравнимые функции: например, при $X = [0; 1]$ можно взять $f(x) = x, g(x) = 1 - x$.

ПРИМЕР 3а. Аналогично можно ввести отношение частичного порядка на множестве функций с общей областью определения и со значениями в фиксированном частично упорядоченном множестве. (Проверка предоставляется читателям.)

ПРИМЕР 4. Введём отношение частичного порядка между парами действительных чисел так: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, если одновременно $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Снова легко проверить, что все условия выполняются; при этом, например, элементы $(0, 1)$ и $(1, 0)$ не сравнимы.

ПРИМЕР 5. На том же множестве можно ввести и отношение линейного порядка. Например, положим $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, если

- 1) либо $x_1 < x_2$,
- 2) либо $x_1 = x_2$, $y_1 \leq y_2$.

Такое отношение порядка называется лексикографическим (по такому принципу расположены слова в словарях).

ПРИМЕР 6. (Спасибо слушателям!) Наконец, ещё один пример возможного построения отношения линейного порядка на \mathbb{R}^2 даёт следующая идея: установим взаимно однозначное соответствие φ между \mathbb{R} и \mathbb{R}^2 (это можно сделать) и примем для $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ то же соотношение, что имеет место для a и b .

ПРИМЕР 7. Часто бывает полезно установить отношение частичного порядка между подмножествами некоторого множества, а именно, считать, что $A \leq B$, если $A \subset B$ (или, наоборот, если $A \supset B$). В первом случае говорят, что система подмножеств упорядочена по включению, во втором условимся говорить об упорядочении по обратному включению. В более сложном случае эти подмножества могут быть наделены некоторой структурой, которая, например, сохраняется при произвольном пересечении (подпространства линейного пространства, кольца подмножеств данного множества, топологии и т. п.) или объединении (открытые подмножества данного метрического или топологического пространства).

Обсудим теперь понятия наименьшего и минимального элементов в частично упорядоченном множестве.

Определение 2. *Элемент a частично упорядоченного множества R называется наименьшим элементом в множестве R , если выполнены 2 условия:*

- 1) a сравним со всеми элементами R ;
 - 2) для любого $x \in R$ верно $a \leq x$.
- (Условие 1) следует из 2), но мы предпочли его явно выделить.)

Определение 3. *Элемент a частично упорядоченного множества R называется минимальным элементом в множестве R , если для любого $x \in R$ из $x \leq a$ следует $x = a$.*

Как видно, последнее условие можно переформулировать так: в R нет элементов, (сравнимых с a и) меньших a .

Очевидно:

- 1) всякий наименьший элемент есть минимальный (обратное неверно);

2) наименьший элемент единствен (для минимального, вообще говоря, неверно).

Аналогичным образом определяются наибольший и максимальный элементы.

ПРИМЕР 8. Построим пример, иллюстрирующий возможную ситуацию. На рис. 1 изображено 6 точек, соединённых стрелками.

Будем считать, что точка x меньше точки y , если из x в y можно пойти по стрелкам (в указанном направлении). При этом, как обычно, $x \leq y$ допускает, кроме указанного «меньше», и равенство. Тогда мы получим отношение частичного порядка.

Легко видеть, что элемент a является наименьшим (и, тем самым, минимальным), причём других наименьших и даже минимальных элементов нет. Элементы b и c являются максимальными, и ни один из них не является наибольшим.

Однако если (вновь спасибо слушателям!) соединить стрелкой b и c (в направлении от b к c), то c станет наибольшим элементом (оставаясь при этом, конечно, максимальным), а b статус максимального элемента утратит (см. рис. 2).

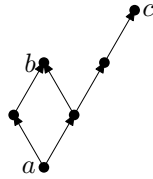


Рис. 1

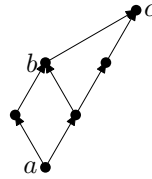


Рис. 2

Заметим в отношении приведённых ранее примеров, что в тех случаях, когда мы имеем дело с системой подмножеств (подпространств, колец и т. п.), замкнутой относительно пересечения и упорядоченной по включению, всегда имеется наименьший элемент — пересечение.

□ Действительно, при любом $\gamma \in \Gamma$ имеем $\bigcap_{\gamma} A_{\gamma} \subset A_{\gamma}$. Наоборот, для системы всех открытых подмножеств множества X имеем наибольший элемент — объединение (совпадающее с X). □

ПРИМЕР 9. Обсудим теперь один интересный с точки зрения топологических пространств пример.

Как мы уже отмечали (см. лекцию 5а), пересечение (но не объединение!) топологий есть снова топология. Далее, пусть имеются множество X и топологическое пространство T_3 . Рассмотрим некоторое фиксированное отображение $f : X \rightarrow T_3$. Можно ли ввести топологию на X так, чтобы f было непрерывным?

□ Конечно: достаточно ввести на X дискретную топологию. Тогда прообраз любого открытого множества в T_3 , будучи некоторым подмножеством X , автоматически будет открытым. □

Сделаем теперь следующий шаг.

Заметим, что если $f : (X, \tau_1) \rightarrow T_3$ непрерывно и $\tau_2 \supset \tau_1$, то и $f : (X, \tau_2) \rightarrow T_3$ непрерывно.

□ Действительно, все прообразы открытых множеств пространства T_3 как были открытыми в τ_1 , так и остались таковыми в более сильной топологии τ_2 . Поэтому если в какой-то топологии в пространстве X отображение f непрерывно, то оно будет непрерывно и во всякой более сильной топологии. \square

Возникает вопрос: а нельзя ли найти в X самую слабую топологию, в которой f ещё непрерывно? Можно!

□ Рассмотрим класс \mathcal{T} всех топологий в X , в которых f непрерывно. Он не пуст: в нём содержится по крайней мере дискретная топология. Рассмотрим теперь топологию

$$\tau = \bigcap_{\tau_\alpha \in \mathcal{T}} \tau_\alpha.$$

По ранее доказанному τ — топология.

Очевидно и то, что τ — наименьший по включению элемент в классе \mathcal{T} . Наконец, $f : (X, \tau) \rightarrow T_3$ непрерывно. В самом деле, если каждая топология τ_α содержит прообразы всех открытых в T_3 множеств, то же верно и для пересечения всех топологий τ_α .

Тем самым мы установили, что в (непустом!) классе топологий на множестве X , для которых отображение $f : X \rightarrow T_3$ непрерывно, имеется наименьший по включению элемент, который естественно назвать слабейшей топологией, в которой отображение f непрерывно. \square

§ 3. Направленное множество. Направленность

Определение 4. Множество A называется *направленным множеством*, если на нём введено отношение частичного порядка \leq , удовлетворяющее следующему условию:

для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha_1 \leq \alpha$, $\alpha_2 \leq \alpha$.

1. Легко видеть, что это условие всегда выполняется, если A — линейно упорядоченное множество: достаточно взять больший из двух элементов.

2. Условие также будет выполнено, если в A имеется наибольший элемент.

3. Однако в общем случае для частичного порядка оно, вообще говоря, не выполнено: в примере на рис. 1 нет элемента x такого, что $a \leq x$, $b \leq x$. В то же время, семейство всех подмножеств данного множества X является направленным множеством, поскольку для любых A, B верно

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B \Rightarrow A \leq A \cup B, \quad B \leq A \cup B.$$

Если бы мы ввели отношение порядка вторым способом (обратное включение), то имели бы

$$A \leq A \cap B, \quad B \leq A \cap B.$$

Замечание 2. Вовсе не требуется, чтобы α было отлично от α_1 и α_2 ! В частности, не для всякого α_0 найдётся $\alpha > \alpha_0$. И это не противоречит определению, ибо если положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, то можно взять $\alpha = \alpha_0$. Более того, направленное множество может состоять из одного элемента. В этом случае отношение порядка тривиально: $x \leq x$.

С учётом замечания легко видеть, что каждое из следующих числовых множеств (с обычным порядком) является направленным:

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{R}, \quad [0; 1), \quad [0; 1], \quad -\mathbb{N}, \quad \{0; 1\}.$$

Также направленным множеством является множество \mathbb{R}^2 с любым из трёх введённых в примерах 4–6 отношений порядка.

Введём теперь понятие, играющее для топологических пространств приблизительно ту же роль, какую для метрических играет понятие последовательности, и являющееся его обобщением.

Определение 5. *Функция $\{x_\alpha\} : A \rightarrow X$, где A — направленное множество, X — произвольное множество, называется направленностью.*

В качестве простейшего примера направленности, разумеется, годится последовательность. Однако чуть позже мы увидим, почему последовательностей при построении теории топологических пространств недостаточно.

Введём теперь понятие предела направленности в топологическом пространстве. Но прежде модифицируем определение предела последовательности:

Определение 6. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое N , что при всех $n \geq N$ верно $x_n \in U_x$.*

Замечание 3. Обычно вместо $n \geq N$ пишут $n > N$. Для последовательностей это неважно, ведь $n \geq N \Leftrightarrow n + 1 > N$. Однако, как мы выяснили, направленное множество может не иметь элемента, большего данного. Поэтому для предела направленности имеем

Определение 7. *Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}$ в топологическом пространстве T стремится к элементу $x \in T$, если для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки x найдётся такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geq \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$.*

ПРИМЕР 10. Приведём простой пример. Направленность $x_\alpha = \frac{1}{\alpha}$, где $A = (0; +\infty)$ с обычным порядком, $T = [0; +\infty)$ с обычной топологией, сходится к 0 (проверить!).

Докажем ключевую теорему этой лекции.

Теорема 1. *Точка x в топологическом пространстве T является точкой касания для множества M тогда и только тогда, когда найдётся направленность точек множества M , сходящаяся к x .*

Доказательство. Докажем сначала достаточность.

1. Если $x_\alpha \rightarrow x$ и при всех $\alpha \in A$ верно $x_\alpha \in M$, то согласно определению сходящейся направленности для всякой окрестности U_x точки x существует такое $\alpha_0 \in A$, что при всех $\alpha \geq \alpha_0$ верно $x_\alpha \in U_x$.

2. Существенно, что для самого α_0 имеем $x_{\alpha_0} \in U_x$. В случае предела последовательности мы могли взять произвольное n , большее N . В данном же случае существенно, что можно взять α_0 , потому что следующих за ним элементов направленного множества A может и не существовать.

Теперь докажем *необходимость*.

1. И здесь, как ни странно, доказательство окажется идейно даже более простым, чем для последовательностей в метрических пространствах, где нам нужно было каким-то образом выбирать стягивающиеся к пределу последовательности окрестности.

2. Теперь же мы можем в качестве «индекса», которым «нумеруются» точки направленности, возьмём не что иное, как окрестности U_x , т. е. положим $A = \tau_x$ (множество окрестностей точки x), упорядоченное по обратному включению: $U_{x,\alpha} \leq U_{x,\beta}$, если $U_{x,\alpha} \supset U_{x,\beta}$. Естественность такого упорядочения очевидна: нам хочется получить «стягивающиеся» к пределу окрестности.

3. Следует убедиться, что τ_x — действительно направленное множество.

□ В самом деле, частичная упорядоченность очевидна (как для любого семейства подмножеств, упорядоченного по включению или обратному включению). Далее, для любых окрестностей $U_{x,\alpha}$, $U_{x,\beta}$ точки x их пересечение $U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$ — снова окрестность точки x , т. к. является открытым множеством и содержит x . А согласно нашему упорядочению, $U_{x,\alpha} \leq U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$, $U_{x,\beta} \leq U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$. □

4. Теперь определим направленность $x_{U(x)}$, взяв для каждой окрестности $U_x \in \tau_x$ точку $x_{U(x)} = y$ из пересечения $M \cap U_x$. Такое y существует, поскольку x — точка касания множества M .

5. Осталось доказать, что построенная направленность (состоящая, заметим, из элементов множества M) сходится x .

□ Но это непосредственно следует из построения, ибо для любой окрестности $U_{x,0}$ точки x можно положить $\alpha_0 = U_{x,0}$ и тогда для любой окрестности $U_x \geq U_{x,0}$ имеем в силу построения и введённого отношения порядка $x_{U_x} \in U_x \subset U_{x,0}$, т. е. $x_{U_x} \in U_{x,0}$, что и требовалось. □

Теорема доказана.

Рассмотрим, к каким направленностям приводит доказательство теоремы в конкретных случаях.

ПРИМЕР 11. Пусть $T = [0; 1]$ с обычной метрической топологией, $M = (0; 1]$, $x = 0$. Тогда имеем $A = \{[0; y] \mid 0 < y \leq 1\}$, причём можно положить $x_{[0;y]} = \frac{y}{2}$. Легко видеть, однако, что можно построить и последовательность элементов множества X , сходящуюся к 0: $x_n = \frac{1}{n}$.

ПРИМЕР 12. Рассмотрим так называемое связное двоеточие, а именно пространство $T = (X, \tau)$, где $X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Заметим, что в этом пространстве точка a является точкой касания множества $M = \{b\}$, поскольку единственным открытым множеством, содержащим a , является $X \ni b$.

Тогда направленное множество A , построенное в теореме, имеет вид $A = \{X\}$. Соответствующая же направленность точек множества $\{b\}$, сходящаяся к точке a , представляет собой $x_X = b$.

□ Действительно, любая окрестность точки a (а именно, X : других нет) содержит точку b при всех $U_a \geq X$ (т. е. при $U_a = X$). ☒

С первого взгляда может показаться, что уже в этом примере нет последовательности точек множества $\{b\}$, стремящейся к a . Однако это не так: последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = b$, сходится к a . (Заметим попутно, что и она, и построенная направленность, конечно сходятся и к b . Для пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа, это неудивительно.)

ПРИМЕР 13. В следующем примере не существует последовательности точек множества X , сходящейся к некоторой его точке касания (но, в силу доказанной теоремы, существует направленность).

1. Положим снова $X = [0; 1]$, выбрав в качестве открытых все множества, получающиеся выбрасыванием из X не более чем счётного множества точек (в частности, само X), а также пустое множество. Легко проверить, что полученное семейство множеств действительно удовлетворяет всем аксиомам топологии (удобнее проверять условия, предъявляемые к замыканиям, для их дополнений).

2. Убедимся, что и в такой «странной» топологии 0 — точка касания множества $(0; 1]$.

□ В самом деле, любая окрестность U_0 точки 0 (как открытое множество) или пуста (что невозможно, ибо $0 \in U_0$), или содержит все точки отрезка, кроме конечного или счётного их числа. Но тогда она обязательно содержит хотя бы одну точку из $(0; 1]$, что и требовалось. ☒

3. Теперь заметим, что в рассматриваемой топологии сходятся могут лишь последовательности, стационарные с некоторого номера.

□ В самом деле, пусть $y_n \rightarrow y$. Положим Y_0 равным множеству значений последовательности y_n за вычетом самой точки y . Легко видеть, что Y_0 не более чем счётно, а поэтому $[0; 1] \setminus Y_0$ открыто; а т. к. $[0; 1] \setminus Y_0 \ni y$, то оно является окрестностью точки y .

С другой стороны, если последовательность y_n не является стационарной ни с какого номера, то, сколь бы велико ни было N , найдётся $n > N$, для которого $y_n \neq y$. Но тогда $y_n \notin [0; 1] \setminus Y_0$, т. е. y_n не лежит в рассматриваемой окрестности точки y . Итак, не найдётся такого N , после которого все члены последовательности лежали бы в окрестности $[0; 1] \setminus Y_0$ точки y . Следовательно, $y_n \not\rightarrow y$. Значит, стремиться к 0 в нашем пространстве могут лишь те последовательности, которые с некоторого номера принимают только значения 0 . ☒

Но такие последовательности не лежат в $(0; 1]$.

З а м е ч а н и е 4. Нетрудно видеть, что топологическое пространство, рассмотренное в предыдущем примере, не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа, однако последовательности в нём могут иметь не более одного предела. Таким образом, аксиома отделимости Хаусдорфа является достаточным, но не необходимым условием единственности предела последовательности.

Отметим в заключение ещё некоторые факты.

1. Всякая подпоследовательность некоторой последовательности есть её поднаправленность, но не всякая поднаправленность последовательности есть её подпоследовательность: рассмотрим последовательность $\{x_1, x_1, x_2, x_3, \dots\}$.

2. Как и в лекции 5, отметим без доказательства важнейшую теорему о компактности, обобщающее соответствующее утверждение для метрических пространств.

Теорема 2. *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая направленность в нём имеет сходящуюся поднаправленность.*

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Проверить, что введённые в примерах 3–7 отношения действительно удовлетворяют аксиомам отношения порядка. Проверить, что в примере 5 мы имеем дело с отношением линейного порядка.

Задача 2. Убедиться, что замкнутые подмножества данного множества X , содержащие заданное множество $A \subset X$, образуют множество, частично упорядоченное по включению. Убедиться, что оно содержит наименьший элемент и что он равен \bar{A} .

Задача 3. Построить пример, показывающий, что объединение двух топологий может не быть топологией.

Задача 4. Решить задачи 15–16 из лекции 2а.

Задача 5*. Решить задачи 19–20 из лекции 5а.

Задача 6. 1) Показать, что в метрическом пространстве для множества A и его точки касания x найдётся последовательность $\{x_n\}$ точек из A , сходящаяся к x .

2) Можно ли утверждать, что такую последовательность можно выбрать не содержащей точку x ?

3) Те же вопросы для случая, когда x — предельная точка множества A .

Задача 7*. Выяснить, может ли какая-либо направленность (не обязательно являющаяся последовательностью) в топологическом пространстве из последнего примера иметь более одного предела.