Семинар–Лекция 1

ИНТЕГРАЛ РИМАНА—СТИЛТЬЕСА

§ 1. Свойства

Утверждение 1. *Пусть* $f_n(x) \in C[a;b]$, $g(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$. *Тогда* $f(x) \in C[a;b]$ *и*

$$\int_a^b f_n(x)dg(x) \to \int_a^b f(x)dg(x).$$

$\square$ Действительно, $f(x) \in C[a;b]$ как равномерный предел непрерывных функций; в силу оценки

$$\left|\int_a^b F(x)dg(x)\right| \leqslant \|F\|_{C[a;b]} V_a^b(g) \tag{1.1}$$

и свойств линейности интеграла Лебега—Стилтьеса имеем

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dg(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|f_n - f\|_{C[a;b]} V_a^b(g) \to 0.$$

$\boxtimes$

Утверждение 2. *Пусть* $f(x) \in C[a;b]$, $g_n(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$,

$$V_a^b(g_n - g) \to 0.$$

Тогда $g \in \mathbb{BV}[a;b]$ *и*

$$\int_a^b f(x)dg_n(x) \to \int_a^b f(x)dg(x).$$

$\square$ Заметим: $V_a^b(g) \leqslant V_a^b(g_n) + V_a^b(g - g_n)$. Далее, подобно предыдущему, в силу (1.1) и свойств линейности интеграла верно

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dg_n(x) - \int\limits_a^b f(x)dg(x)\right| =$$
$$= \left|\int\limits_a^b f(x)d(g_n(x)-g(x))\right| \leqslant \|f\|_{C[a;b]} V_a^b(g_n - g) \to 0.$$

$\boxtimes$

Утверждение 3. *Если* $g(x) \equiv C$ *на* $[a;b]$, *то интеграл Римана—Стилтьеса*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) \tag{1.2}$$

существует абсолютно для любой функции $f(x)$.

Этот тривиальный случай, естественно, не интересен. При $g(x) \not\equiv C$ ситуация становится более похожей на интеграл Римана. Покажем, например, что для $g(x)$, отличной от константы, и $f(x) = D(x)$ (функция Дирихле) интеграл (1.2) при $a \neq b$ не существует.

$\Box$ Идея доказательства заключается в следующем.

1. Для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ мы предъявим два таких разбиения с отмеченными точками, что соответствующие интегральные суммы будут различаться не менее чем на некоторое фиксированное число:

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\ \exists T_i \equiv (x_0^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}; \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)}),$$
$$\lambda(T_i) < \delta,\ i = 1; 2,\ \ |S_{T_1} - S_{T_2}| \geqslant \varepsilon.$$

2. Поскольку $g(x) \not\equiv C$, то существуют $\overline{x} < \overline{\overline{x}} \in [a;b]$ такие, что $g(\overline{x}) \neq g(\overline{\overline{x}})$. Положим $\varepsilon = |g(\overline{x}) - g(\overline{\overline{x}})|$. Выберем при всяком $\delta > 0$ разбиения T_1 и T_2 с $\lambda(T) < \delta$ состоящими из одних и тех же точек $(x_k^{(i)})_{k=0}^n$, среди которых будут точки $x_l = \overline{x}$ и $x_m = \overline{\overline{x}}$ (если в некотором разбиении их нет, можно добавить), а отмеченные точки $(\xi_k^{(i)})_{k=1}^n$ возьмём руководствуясь следующими правилами:
1) $\xi_k^{(1)} = \xi_k^{(2)}$ при $[x_{k-1}; x_k] \not\subset [\overline{x}; \overline{\overline{x}}]$;
2) $\xi_k^{(1)} \in \mathbb{Q}$, $\xi_k^{(2)} \notin \mathbb{Q}$ при $[x_{k-1}; x_k] \subset [\overline{x}; \overline{\overline{x}}]$.

3. Тогда будем иметь:

$$|S_{T_1} - S_{T_2}| = \left| \sum_{k=l+1}^{m} 1 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=l+1}^{m} 0 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| =$$
$$= |g(\overline{\overline{x}}) - g(\overline{x})| = \varepsilon,$$

что и требовалось. $\boxtimes$

П р и м е р 1. Легко построить функции f, g, не являющиеся ограниченными на $[-1;1]$, такие, что интеграл Римана—Стилтьеса (1.2) существует. Положим, например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \cup \{1\}, \\ \frac{x}{1-x}, & x \in (0;1), \end{cases} \qquad g(x) = f(-x).$$

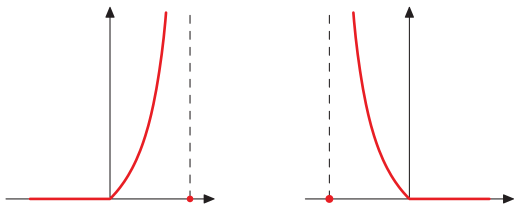

Рис. 1. к примеру 4: функции $f(x)$ и $g(x)$.

У т в е р ж д е н и е 4. *Пусть существует интеграл Римана—Стилтьеса* (1.2)*, причём функция g разрывна в точке $c \in [a;b]$. Тогда функция f непрерывна в этой точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Предположим противное: пусть $f(x)$ разрывна в точке c. Докажем, подобно сделанному в примере 3, что в этом случае для сколько угодно малого параметра разбиения найдутся интегральные суммы, отличающиеся не менее чем на константу.

2. Рассмотрим сначала случай $c \in (a;b)$. Как будет ясно из дальнейших рассуждений, рассмотрение случая граничной точки отрезка даже проще.

3. Итак, по нашему предположению неверно по крайней мере одно из равенств в каждой строке:

$$\begin{aligned} g(c-0) &= g(c), \quad g(c+0) = g(c), \\ f(c-0) &= f(c), \quad f(c+0) = f(c) \end{aligned} \tag{1.3}$$

(невыполнение любого из равенств подразумевает или отсутствие предельного значения, или его отличие от значения соответствующей функции в точке). Могут представиться два случая:
1) среди неверных равенств в (1.3) найдутся два в одном столбце;
2) таковых не найдётся, т. е. неверных равенств всего два и они расположены «по диагонали».

4. Рассмотрим первый случай. Пусть для определённости не выполняются равенства правого столбца. Это означает:

$$\exists \varepsilon_1 > 0\ \forall \delta_1 > 0\ \exists x(\delta_1) \in (c; c+\delta_1)\ \ |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1, \tag{1.4}$$
$$\exists \varepsilon_2 > 0\ \forall \delta_2 > 0\ \exists x(\delta_2) \in (c; c+\delta_2)\ \ |f(x(\delta_2)) - f(c)| \geqslant \varepsilon_2. \tag{1.5}$$

5. Пусть дано некоторое $\rho > 0$. Выберем сначала точку $\overline{\overline{x}}$ так, чтобы имели место неравенства

$$c < \overline{\overline{x}} < c + \rho, \quad |g(\overline{\overline{x}}) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1. \tag{1.6}$$

Это возможно в силу (1.4): можно положить $\overline{\overline{x}} = x(\delta_1 = \rho)$. Теперь построим такое разбиение T отрезка $[a; b]$ с параметром разбиения $\lambda(T) < \rho$, в которое войдут точки c и $\overline{\overline{x}}$, причём они будут соседними (это возможно, поскольку $\overline{\overline{x}} - c < \rho$).

6. Пусть в полученном разбиении точки c, $\overline{\overline{x}}$ имеют номера соответственно $l - 1$, l. Далее, выберем на отрезках $[x_{i-1}; x_i]$ точки ξ_i, $i = 1, \ldots, l - 1, l + 1, \ldots n$. Выберем теперь, пользуясь (1.5), $\xi^{(2)}$ из условий

$$1)\ c < \xi^{(2)} < \overline{\overline{x}}, \quad 2)\ |f(\xi^{(2)}) - f(c)| \geqslant \varepsilon_2 \tag{1.7}$$

(для этого надо положить в (1.5) $\delta_2 = \overline{\overline{x}} - c$ и взять $\xi^{(2)} = x(\delta_2)$).

7. Пусть теперь интегральные суммы $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ определяются одним и тем же разбиением T и следующим выбором точек: $\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(2)} = \xi_i$, $i \neq l$, и $\xi_l^{(1)} = c \in [c; \overline{\overline{x}}] \equiv [x_{l-1}; x_l]$, $\xi_l^{(2)} = \xi^{(2)}$. Тогда получим

$$\left|S^{(1)} - S^{(2)}\right| = |(f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l) - g(x_{l-1}))| \geqslant \varepsilon_1\varepsilon_2,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (1.6), (1.7). Поскольку возможность такого построения показана для всякого $\rho > 0$ и при этом константы ε_1, ε_2 от ρ не зависят, для первого случая рассуждение завершено.

8. Во втором случае ситуация осложняется тем, что односторонняя непрерывность не позволяет нам одновременно оценить снизу $|g(x) - g(c)|$ и $|f(x) - f(c)|$ ни в одной из полуокрестностей точки c. Однако это мешающее обстоятельство можно обратить в пользу, если из одной полуокрестности «немного шагнуть» в другую: мы приобретём разрыв одной из функций, не сильно ухудшив уже найденную оценку снизу для другой. Проведём теперь это рассуждение более подробно.

9. Пусть, для определённости,

$$g(c - 0) = g(c), \quad g(c + 0) \neq g(c),$$
$$f(c - 0) \neq f(c), \quad f(c + 0) = f(c).$$

(Напоминаем, что в данном случае знак $\neq$ может обозначать не только неравенство, но и отсутствие предела.) Здесь существенно, что равенство $f(c + 0) = f(c)$ влечёт неравенство $f(c - 0) \neq f(c)$ (иначе функция $f(x)$ была бы непрерывной в точке c), а последнее — равенство $g(c - 0) = g(c)$ (иначе бы ситуация была бы аналогична рассмотренной выше).

10. Тогда:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \quad \forall \delta_1 > 0 \quad \exists x(\delta_1) \in (c; c + \delta_1) \quad |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geqslant \varepsilon_1, \tag{1.8}$$
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in (c; c + \delta_2) \quad |f(x) - f(c)| < \varepsilon_2,$$

$$\forall\varepsilon_3>0\quad\exists\delta_3>0\quad\forall x\in(c-\delta_3;c)\quad|g(x)-g(c)|<\varepsilon_3,\tag{1.9}$$
$$\exists\varepsilon_4>0\quad\forall\delta_4>0\quad\exists x(\delta_4)\in(c-\delta_4;c)\quad|f(x(\delta_4))-f(c)|\geqslant\varepsilon_4,\tag{1.10}$$

11. Пусть задано $\rho>0$. Выберем теперь:

$$\begin{aligned}&\overline{\overline{x}}\text{ из условий }\overline{\overline{x}}\in\left(c;c+\frac{\rho}{2}\right),\ |g(\overline{\overline{x}})-g(c)|\geqslant\varepsilon_1,\\&\overline{x}\text{ из условий }\overline{x}\in\left(c-\frac{\rho}{2};c\right),\ |g(\overline{x})-g(c)|<\frac{\varepsilon_1}{2},\\&\xi^{(2)}\text{ из условий }\xi^{(2)}\in(\overline{x};c),\ |f(\xi^{(2)})-f(c)|\geqslant\varepsilon_3,\end{aligned}\tag{1.11}$$

что возможно соответственно в силу (1.8), (1.9), (1.10).

12. Теперь дополним систему $(\overline{x};\overline{\overline{x}})$ (отметим, что $\overline{\overline{x}}-\overline{x}<\rho$) до разбиения T отрезка $[a;b]$ с $\lambda(T)<\rho$ так, чтобы между $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$ не оказалось новых точек. Предположим, $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$ получили соответственно номера $l-1$ и l. Выберем теперь $\xi_i,\ i\neq l$, произвольным образом и $\xi_l^{(1)}=c$, $\xi_l^{(2)}=\xi^{(2)}$. Пусть $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ — соответствующие интегральные суммы. Поскольку в силу (1.11)

$$|g(\overline{\overline{x}})-g(\overline{x})|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{2},\quad|f(\xi_l^{(1)})-f(\xi_l^{(2)})|\geqslant\varepsilon_3,$$

получаем

$$\left|S^{(1)}-S^{(2)}\right|=|(f(\xi_l^{(1)})-f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l)-g(x_{l-1}))|\geqslant\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{2},$$

что в силу произвольности $\rho>0$ и независимости от ρ констант ε_1, ε_3 завершает рассуждение для второго случая.

13. Легко видеть, что при совпадении точки c с одним из концов отрезка мы всегда будем иметь первый случай.

Утверждение доказано.

Утверждение 5. *Пусть* $a<c<b$, $g(x)=\chi_{[c;b]}(x)$. *Тогда интеграл Римана—Стилтьеса* (1.2) *существует в том и только том случае, когда* $f(x)$ *непрерывна в точке* c, *и в случае интегрируемости*

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x)=f(c).$$

□

1. Заметим, что необходимость доказана ранее (п. 5). Докажем достаточность. Имеем

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(g(x_k)-g(x_{k-1}))=$$
$$=f(\xi_l)(g(x_l)-g(x_{l-1}))=f(\xi_l),\quad\text{где}\quad x_{l-1}<c\leqslant x_l.$$

2. При $\lambda(T)\to0$ имеем $\xi_l\to c$, что в случае непрерывности функции $f(x)$ в точке c гарантирует $f(\xi_l)\to f(c)$. Это и доказы-

вает как существование рассматриваемого интеграла, так и равенство $\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)$. ⊠

Утверждение 6. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке c и интеграл* (1.2) *существует. Тогда при $c \in (a;b)$ интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\widetilde{g}(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c, \\ A \neq g(c), & x = c, \end{cases} \tag{1.12}$$

также существует и равен интегралу (1.2).

Доказательство.

1. Принцип доказательства состоит в том, чтобы убедиться, что разница между соответствующими интегральными суммами стремится к нулю при стремлении к нулю параметра разбиения. Идея же основана на наблюдении, что чем менее меняется функция f, тем слабее интеграл «замечает» конкретные значения функции g. Так,

$$\text{при } f(x) \equiv C = \text{const} \quad \text{имеем} \int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = C(g(b) - g(a)). \tag{1.13}$$

Приступим собственно к доказательству.

2. Рассмотрим некоторое разбиение T отрезка $[a;b]$. Если $c \notin T$, то интегральная сумма вовсе не поменялась. В противном случае ($x_l = c$) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(\widetilde{g}(x_k) - \widetilde{g}(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big((g(x_k) - \widetilde{g}(x_k)) - (g(x_{k-1}) - \widetilde{g}(x_{k-1}))\big) =$$

$$= (g(x_l) - \widetilde{g}(x_l))(f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})). \tag{1.14}$$

3. В силу определения непрерывности функции f в точке c

$$\forall \gamma > 0\ \exists \delta(\gamma) > 0\ \forall \xi \in (c - \delta(\gamma); c + \delta(\gamma))\ \ |f(\xi) - f(c)| < \gamma. \tag{1.15}$$

4. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем

$$\rho = \delta\left(\gamma = \frac{\varepsilon}{2|g(c) - \widetilde{g}(c)|}\right).$$

Пусть разбиение T удовлетворяет условию $\lambda(T) < \rho$. Тогда

$$|\xi_l - c| < \rho, \quad |\xi_{l+1} - c| < \rho,$$

в силу чего из (1.15) моментально получим, что

$$|f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})| < \frac{\varepsilon}{|g(c) - \widetilde{g}(c)|},$$

откуда в силу (1.14) следует, что интегральные суммы для параметра разбиения меньше выбранного ρ различаются меньше чем на ε.

5. Тем самым, интегральные суммы интеграла (1.12) тоже имеют предел и он равен интегралу (1.2).

Утверждение доказано.

Замечание 1. Условие несовпадения точки c с концами отрезка существенно, что очевидно уже из (1.13).

Следствие 1. *Если функция f непрерывна в точке $c \in (a;b)$, а функция g равна нулю всюду на $[a;b]$, кроме точки $c \in (a;b)$, то $\int_a^b f\,dg = 0$.*

Следствие 2. *То же верно для любого конечного числа точек, если f непрерывна в каждой из них (или, скажем, на всём отрезке).*

Следствие 3. *Если $f \in C[a;b]$, $g \in \mathbb{BV}[a;b]$ и g отлична от нуля лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f\,dg = 0$. Это следует из теоремы Хелли и предыдущего следствия (поскольку «приближения» к функции g, имеющие конечное число разрывов, имеют вариации, ограниченные в совокупности числом $V_a^b(g)$ — см. задачу 6).*

Следствие 4. *Если $f \in C[a;b]$, $g_1, g_2 \in \mathbb{BV}[a;b]$ и эти функции различны лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу $(a;b)$, то $\int_a^b f\,dg_1 = \int_a^b f\,dg_2$.*

Но это означает, что наивная попытка описать $(C[a;b])^*$ как $\mathbb{BV}[a;b]$ (используя теорему Рисса) наталкивается на трудности: функция g оказывается не единственной (даже если потребовать $g(a) = 0$), и различные «представители» совсем не равноправны в том смысле, что они могут иметь различную полную вариацию.

ПРИМЕР 2. Вычислить

$$\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dg(x),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right), \\ 2, & x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \pi\right\}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right). \end{cases}$$

□

1. Заметим, что в силу п. 7 можно переопределить функцию $g(x)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$ её левым пределом $\frac{\pi}{2}$. Далее, в точке $x = \pi$ её тоже можно переопределить левым пределом $\frac{\pi}{2}$, поскольку $f(x)$ непрерывна (слева) в точке π и $f(\pi) = 0$ (см. задачу 3; отметим, что результат п. 7 здесь неприменим!).

2. Обозначим полученную после двух переопределений функцию через $\widetilde{g}(x)$. Имеем теперь

$$\int\limits_0^\pi \sin x\, dg(x) = \int\limits_0^\pi \sin x\, d\widetilde{g}(x) = \int\limits_0^\pi \sin x\, d\left(x - \frac{\pi}{2}\chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\right) =$$
$$= \int\limits_0^\pi \sin x\, d(x) - \frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x\, d\left(\chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\right) =$$
$$= \int\limits_0^\pi \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\left(\sin\pi\cdot 1 - \sin\frac{\pi}{2}\cdot 0 - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\pi \chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\, d\sin x\right) =$$
$$= 2 + \frac{\pi}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^2 \chi_{\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]}(x)\cos x\, dx = 2 + \frac{\pi}{2}\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2 - \frac{\pi}{2},$$

где при переходе к третьей строке мы воспользовались сведением к интегралу Римана для непрерывно дифференцируемой функции $g(x) = x$ (см. лекцию) и интегрированием по частям, а при переходе к четвёртой — той же теоремой для $g(x) = \sin x$, а затем воспользовались возможностью изменить в одной точке подынтегральную функцию в интеграле Римана. ⊠

П Р И М Е Р 3. Найти (какую-либо) функцию $g \in \mathbb{BV}[-1;1]$, для которой при любой $f(x) \in C[-1;1]$ верно равенство

$$\int\limits_{-1}^1 f(x)dg(x) = f(0). \tag{1.16}$$

□ В силу результата примера 6 можно взять, например, $g(x) = \chi_{[0;1]}(x)$. Отметим, что при этом $V_{-1}^1(g) = 1$, но функцию $g(x)$ можно переопределить в любой точке интервала $(a;b)$ — при этом равенство (1.16) не нарушится (см. пример 7), а её вариация изменится. ⊠

§ 2. Задачи для самостоятельного решения

З а д а ч а 1. Вычислить интегралы Римана—Стилтьеса:
1) $\int_{-\pi}^{\pi}(x+2)\, d\left(e^x\, \mathbf{sgn}(\sin x)\right)$;
2) $\int_0^{\pi}(x-1)d(\cos x\, \mathbf{sgn}\, x)$.

З а д а ч а 2. Подробно обосновать существование интеграла (1.2) в примере 4.

З а д а ч а 3. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции $g(x)$ в граничной точке отрезка, которым мы воспользовались при решении примера 8.

Задача 4. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции $f(x)$ в точке непрерывности функции $g(x)$. Нужно ли при этом требовать, чтобы c не была граничной точкой?

Задача 5*. Показать, что условие равномерной ограниченности вариаций в теореме Хелли существенно.

Задача 6*. Доказать, что если $g(x)$ отлична от нуля лишь в счётном числе точек $\{y_s\}_{s=1}^{\infty} \subset (a;b)$, а

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{y_s\}_{s=n+1}^{\infty}, \\ g(x) & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

то $V_a^b(g_n) \leqslant V_a^b(g)$.

Задача 7**. Сформулировать и доказать для интеграла Римана—Стилтьеса утверждение, обобщающее необходимое условие интегрируемости по Риману (ограниченность подынтегральной функции функции).