

**АКТУАЛЬНЫЕ
ВОПРОСЫ
ПРИКЛАДНОЙ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ**

А. Б. ВАСИЛЬЕВА, В. Ф. БУТУЗОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ
СИНГУЛЯРНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ



АКТУАЛЬНЫЕ
ВОПРОСЫ
ПРИКЛАДНОЙ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
МАТЕМАТИКИ

А. Б. ВАСИЛЬЕВА, В. Ф. БУТУЗОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ
СИНГУЛЯРНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ



Москва „Высшая школа” 1990

ББК 22.161.6
В 19
УДК 517.9

Рекомендовано
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
для использования в учебном процессе

Рецензенты: кафедра дифференциальных уравнений Университета дружбы народов (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. В. И. Рожков); д-р физ.-мат. наук, проф. М. М. Хапаев

Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.
В19 Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Науч.-теор. пособие. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.: ил. (Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики.)

ISBN 5-06-001634-X

В книге в краткой и доступной форме изложены основы теории сингулярных возмущений, описаны алгоритмы построения асимптотик для многих классов задач математической физики, приводящих к сингулярно возмущенным уравнениям, представлены современные результаты, активно используемые в приложениях. Большое внимание уделяется применению методов теории сингулярных возмущений к различным прикладным задачам.

1602070100—388
В 001(01)—90 14—90

ББК 22.161.6
517

Учебное издание

**Васильева Аделаида Борисовна
Бутузов Валентин Федорович**

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Серия Актуальные вопросы прикладной
и вычислительной математики

Зав. редакцией Е. С. Гридасова
Редактор А. М. Суходский
Художник В. В. Корнев
Художественный редактор В. И. Пономаренко
Технический редактор А. К. Нестерова
Корректор Г. И. Кострикова

ИБ № 8678

Изд. № ФМ-77. Сдано в набор 04.01.90. Подп. в печать 30.05.90. Формат 60×88¹/₁₆. Бум. офс. № 2. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Объем 12,74 усл. печ. л. 12,99 усл. кр.-отт. 12,04 уч.-изд. л. Тираж 4000 экз. Зак. № 1953. Цена 70 коп.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.
Московская типография № 8 Государственного комитета СССР по печати, 101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7

ISBN 5-06-001634-X

© А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, 1990

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Основные понятия	6
§ 1. Регулярные и сингулярные возмущения	6
§ 2. Асимптотическое приближение по параметру. Асимптотические и сходящиеся ряды	11
§ 3. Примеры асимптотических разложений решений регулярно и сингулярно возмущенных задач	15
Глава 2. Сингулярно возмущенные обыкновенные дифференциальные уравнения	21
§ 4. Начальная задача	21
§ 5. Краевые задачи	36
§ 6. Решения типа контрастных структур	52
§ 7. Критический случай	72
Глава 3. Сингулярно возмущенные уравнения с частными производными	79
§ 8. Метод Люстерника — Вишика	79
§ 9. Угловые пограничные функции	84
§ 10. Процедура сглаживания негладких членов асимптотики	99
§ 11. Системы уравнений в критических случаях	108
§ 12. Периодические решения	114
§ 13. Гиперболические системы	135
Глава 4. Прикладные задачи	158
§ 14. Математическая модель процесса горения в случае автотокаталитической реакции	158
§ 15. Распространение тепла в тонких телах	168
§ 16. Применение погранслойных методов в теории полупроводниковых приборов	178
§ 17. Акустические колебания в среде с малой вязкостью	191
§ 18. О других прикладных задачах	201
Литература	203

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено важному классу дифференциальных уравнений — уравнениям с малыми параметрами при производных, или, как принято их теперь называть, *сингулярно возмущенным уравнениям*. Начиная с основополагающих работ академика А. Н. Тихонова [104—106] такие уравнения привлекают внимание многих исследователей. Это объясняется большой прикладной значимостью сингулярно возмущенных уравнений. Они выступают в качестве математических моделей при исследовании разнообразных процессов в физике, химии, биологии, технике. К настоящему времени развит ряд асимптотических и численных методов, позволяющих строить приближенное решение в тех или иных сингулярно возмущенных задачах [1—4, 10, 11, 37, 38, 43, 44, 58, 59, 64—66, 68, 69, 75, 76, 80, 81, 84—86, 88, 89, 112, 113, 119—121]. В данной книге речь пойдет об одном из эффективных асимптотических методов в теории сингулярных возмущений — *методе пограничных функций*, математические основы которого были заложены в работах [38, 58]. Применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также интегродифференциальным и дифференциально-разностным уравнениям метод пограничных функций изложен в предыдущих книгах авторов [43, 44].

В отличие от указанных книг данная книга написана как учебное пособие, и это определяет ее структуру и особенности изложения материала. Пособие состоит из четырех глав. В первой главе вводятся основные понятия теории сингулярных возмущений: понятия регулярных и сингулярных возмущений, асимптотического приближения по малому параметру и асимптотического ряда. В этой же главе рассмотрены характерные примеры асимптотических разложений решений регулярно и сингулярно возмущенных задач, дано представление о пограничном слое.

Вторая глава посвящена сингулярно возмущенным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Формулируется фундаментальная *теорема Тихонова* о предельном переходе и далее описывается алгоритм построения асимптотического разложения решения начальной задачи — задачи, характерной особенностью которой является наличие пограничного слоя в окрестности начальной точки. Далее дается краткий обзор результатов по краевым задачам с пограничными и внутренними переходными слоями. В отдельный параграф выделены результаты, полученные в последнее время и касающиеся построения асимптотик решений с «всплесками». Такие решения играют важную роль в синергетике — они называются там *контрастными диссипативными структурами*. Завершает главу пара-

граф, посвященный сингулярно возмущенным уравнениям в критических случаях. Такие случаи характерны для задач химической кинетики при наличии быстрых и медленных реакций, а также для ряда других прикладных задач.

В третьей главе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения с частными производными. В начале главы на простом примере эллиптического уравнения в области с гладкой границей излагается известный метод Люстерника — Вишика. Следующие параграфы освещают более поздние результаты, позволяющие строить асимптотику решений в таких случаях, когда метод Люстерника — Вишика в «чистом» виде не работает. Это относится к задачам в областях с угловыми точками границы. В зависимости от вида уравнения применяется либо метод угловых пограничных функций, либо процедура сглаживания негладких членов асимптотики, либо сочетание того и другого. Кроме того, в этой главе рассматриваются краевые задачи в критических случаях, характерные для задач химической кинетики при учете диффузии, строятся асимптотические разложения периодических по времени решений параболических уравнений, исследуются гиперболические системы уравнений с пограничными и переходными слоями.

Следует отметить, что основное внимание во второй и третьей главах уделяется алгоритмам построения асимптотических приближений решений. В значительно меньшей мере затрагиваются вопросы обоснования построенных асимптотик. Доказательства оценок остаточных членов проводятся только там, где они достаточно короткие. Если же доказательство связано с громоздкой техникой, то либо указывается схема доказательства, либо дается ссылка на соответствующие работы, где оно приведено.

Четвертая глава книги целиком посвящена прикладным задачам, приводящим к сингулярно возмущенным уравнениям. Указан физический смысл малых параметров. Методом пограничных функций построены асимптотические приближения решений некоторых задач химической кинетики и горения, физики полупроводников, задачи о распространении тепла в тонких телах, задачи об акустических колебаниях в среде с малой вязкостью и ряда других. Обсуждаются физические выводы, которые можно сделать на основе построенных асимптотик.

Авторы надеются, что книга будет полезна как для специалистов по теории сингулярных возмущений и ее приложениям, так и для аспирантов и студентов, обучающихся по специальностям «Физика» и «Прикладная математика». Тем самым пособие в определенной мере ликвидирует дефицит учебной литературы по теории сингулярных возмущений, представляющей крупное направление в области дифференциальных уравнений и математической физики.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 1. Регулярные и сингулярные возмущения

1. Математика изучает процессы, происходящие в реальном мире, с помощью математических моделей этих процессов. Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. Конечно, при составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. Однако, с другой стороны, математическая модель должна быть достаточно простой для исследования, должна давать возможность извлечь из нее доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому какие-то факторы, влияние которых на процесс представляется малым, неизбежно приходится не учитывать, и они оказываются не представленными в математической модели процесса.

Естественно поставить вопрос о роли этих неучтенных факторов: будет ли их влияние на ход процесса несущественным, или, напротив, учет этих факторов, хотя они и кажутся нам незначительными, может существенно изменить ту информацию о процессе, которую мы получаем из математической модели. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно составить более сложную (расширенную) модель, учитывающую те малые факторы, которые в первоначальной (упрощенной) модели не были представлены, и затем исследовать вопрос о близости решений, полученных из упрощенной и расширенной моделей.

Учет отмеченных малых факторов приводит, как правило, к тому, что в расширенной модели по сравнению с первоначальной появляются дополнительные члены с малыми множителями, которые и характеризуют малость этих факторов. Указанные малые множители называют *малыми параметрами*. Если математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение, то вопрос о влиянии малых параметров на исследуемый процесс сводится к изучению зависимости решений дифференциальных уравнений от малых параметров. Члены уравнения, содержащие малые параметры, называются *возму-*

щением, исходное уравнение, не содержащее этих членов,— невозмущенным, а расширенное уравнение (расширенная модель) — возмущенным уравнением или уравнением с возмущением.

Возмущения, встречающиеся в различных задачах, можно условно разделить на два класса: *регулярные возмущения* и *сингулярные возмущения*. Если говорить об их качественном отличии, не давая пока формального определения, то можно сказать так: под регулярным возмущением понимают такое возмущение, которое приводит к малому изменению решения невозмущенной задачи. В отличие от регулярных возмущений сингулярные возмущения, хотя и являются малыми в каком-то смысле, вызывают существенные изменения решения.

2. Дадим теперь формальное определение. Рассмотрим два уравнения:

$$\text{уравнение } A_0: \mathcal{L}_0 u = f_0;$$

$$\text{уравнение } A_\varepsilon: \mathcal{L}_0 u + \varepsilon \mathcal{L}_1 u = f_0 + \varepsilon f_1.$$

Здесь \mathcal{L}_0 и \mathcal{L}_1 — заданные операторы, f_0 и f_1 — заданные функции, ε — малый числовой параметр (в дальнейшем будем считать $\varepsilon > 0$), u — искомая функция, зависящая от x (x может быть одномерной и многомерной переменной). Уравнение A_0 можно трактовать как упрощенную модель некоторого процесса, а уравнение A_ε — как расширенную модель. Члены $\varepsilon \mathcal{L}_1 u$ и εf_1 представляют собой возмущение. Если уравнения A_0 и A_ε являются дифференциальными уравнениями, то добавим необходимые начальные или граничные условия (они также могут содержать малый параметр ε). Имея в виду уравнение и соответствующие дополнительные условия, будем говорить о задачах A_0 и A_ε . Пусть эти задачи рассматриваются в области D , т. е. $u = u(x)$, $x \in D$. Решение задачи A_0 обозначим через $u_0(x)$, а задачи A_ε — через $u_\varepsilon(x)$.

Основной вопрос теории возмущений состоит в следующем: будет ли разность $u_\varepsilon(x) - u_0(x)$ стремиться к нулю (в некоторой норме) при $\varepsilon \rightarrow 0$? В определенной степени ответ на этот вопрос зависит от выбора нормы. В дальнейшем под нормой вектора $u(x) = \text{col}(u_1(x), \dots, u_k(x))$ в каждой точке x будем понимать евклидову норму $\|u(x)\| = \sqrt{u_1^2(x) + \dots + u_k^2(x)}$; в частности, если u — скалярная функция, то $\|u(x)\| = |u(x)|$. Тем самым норма $u(x)$ зависит от x .

Сформулируем теперь определение регулярно возмущенной и сингулярно возмущенной задач.

Определение. Задача A_ε называется *регулярно возмущенной*, если

$$\sup_D \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В противном случае задача A_ϵ называется сингулярно возмущенной.

Здесь $\sup_D f(x)$ означает точную верхнюю грань функции $f(x)$ в области D . Из определения следует, что в случае регулярно возмущенной задачи решение $u_0(x)$ задачи A_0 при малых ϵ будет близко к решению $u_\epsilon(x)$ задачи A_ϵ во всей области D . Если же задача A_ϵ — сингулярно возмущенная, то $u_0(x)$ при малых ϵ не будет близко к $u_\epsilon(x)$ по крайней мере в какой-то части области D .

3. Проиллюстрируем введенное определение на нескольких простых примерах.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения

$$A_\epsilon: \frac{du}{dx} = -u + \epsilon x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = 1.$$

Решение этой задачи элементарно находится в явном виде:

$$u_\epsilon(x) = (1 + \epsilon) \exp(-x) + \epsilon(x - 1).$$

Соответствующая задача A_0 , получающаяся из задачи A_ϵ при $\epsilon = 0$, имеет вид

$$A_0: \frac{du}{dx} = -u, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = 1.$$

Отсюда

$$u_0(x) = \exp(-x).$$

Следовательно, при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\sup_{[0,1]} \|u_\epsilon(x) - u_0(x)\| = \epsilon \max_{[0,1]} |\exp(-x) + x - 1| = \epsilon e^{-1} \rightarrow 0,$$

и, значит, согласно определению, задача A_ϵ является регулярно возмущенной.

Обобщением этого простого примера служит начальная задача для системы дифференциальных уравнений (u — вектор-функция)

$$A_\epsilon: \frac{du}{dx} = f(u, x, \epsilon), \quad 0 \leq x \leq x_0; \quad u(0) = u^0.$$

Если f — достаточно гладкая функция, то задача A_ϵ также называется регулярно возмущенной. Более подробно эта задача будет рассмотрена в § 3. Отметим, что существенным обстоятельством является тот факт, что задача A_ϵ рассматривается на конечном отрезке изменения x : $0 \leq x \leq x_0$. Если же рассматривать задачу A_ϵ на бесконечном промежутке $0 \leq x < \infty$, то она станет, вообще говоря, сингулярно возмущенной.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения, в котором малый параметр $\varepsilon > 0$ входит множителем при производной:

$$A_\varepsilon : \varepsilon \frac{du}{dx} = -u + x, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u(0) = 1.$$

Решение имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = (1 + \varepsilon) \exp(-x/\varepsilon) + x - \varepsilon.$$

Уравнение A_0 , получающееся из A_ε при $\varepsilon = 0$, является в данном случае не дифференциальным, а алгебраическим:

$$A_0 : 0 = -u + x,$$

и поэтому начального или иного дополнительного условия для решения задавать не нужно. Имеем $u_0(x) = x$ и, следовательно,

$$\sup_{[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \max_{[0,1]} |(1 + \varepsilon) \exp(-x/\varepsilon) - \varepsilon| = 1.$$

Таким образом, $\sup_{[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|$ не стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит, согласно определению, задача A_ε является сингулярно возмущенной.

Графики $u_0(x)$ и $u_\varepsilon(x)$ при малом $\varepsilon > 0$ представлены на рис. 1.

Отметим две особенности, характерные для данной задачи.

1) Уравнение A_0 не дифференциальное, т. е. при $\varepsilon = 0$ дифференциальное уравнение A_ε вырождается в конечное уравнение A_0 . Поэтому уравнение A_0 называется *вырожденным*.

2) Решение $u_0(x)$ уравнения A_0 не является близким при малых ε к решению $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε лишь в малой δ -окрестности начальной точки, а на отрезке $[\delta, 1]$ (δ — сколь угодно малое, но фиксированное число) $u_0(x)$ близко к $u_\varepsilon(x)$ (рис. 1). Промежуток $[0, \delta]$, на котором происходит быстрое изменение решения $u_\varepsilon(x)$ от начального значения до значений, близких к $u_0(x)$, называется *пограничным слоем*.

Дифференциальные уравнения с малыми параметрами при производных, для решений которых характерно явление пограничного слоя, можно считать типичными представителями сингулярно возмущенных задач. Именно такие уравнения и будут рассматриваться в данной книге. Основной проблемой при этом является построение приближения к решению $u_\varepsilon(x)$, при-

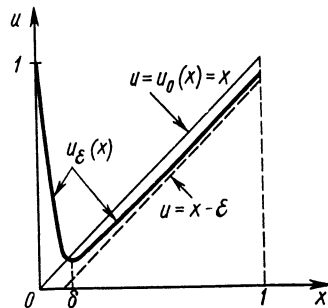


Рис. 1

годного как вне пограничного слоя, так и в пограничном слое, т. е., как говорят, равномерного приближения во всей области изменения x . Это приближение носит асимптотический характер. Точное определение понятия асимптотического приближения по малому параметру будет введено в § 2.

Обобщением примера 2 является *тихоновская система* уравнений (z и y — вектор-функции):

$$A_\varepsilon \begin{cases} \varepsilon \frac{dz}{dx} = F(z, y, x, \varepsilon), & \frac{dy}{dx} = f(z, y, x, \varepsilon), \\ 0 \leq x \leq x_0, \\ z(0) = z^0, & y(0) = y^0. \end{cases}$$

Эта система, а также другие задачи для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений будут рассмотрены в гл. 2.

Пример 3. Рассмотрим уравнение с частными производными эллиптического типа с краевым условием первого рода (задача Дирихле):

$$A_\varepsilon \begin{cases} \varepsilon \Delta u - k^2(x, y) u = f(x, y, \varepsilon), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор

Лапласа, Ω — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. В этом уравнении, как и в примере 2, малый параметр входит множителем при производных. Задача A_0 , получающаяся из A_ε при $\varepsilon = 0$, состоит из одного алгебраического уравнения (краевое условие задавать не нужно)

$$A_0: -k^2(x, y) u = f(x, y, 0).$$

Отсюда

$$u_0 = -f(x, y, 0)/k^2(x, y).$$

Хотя решение $u_\varepsilon(x, y)$ задачи A_ε нам неизвестно, априори ясно, что $u_0(x, y)$ при малых ε не будет близко к $u_\varepsilon(x, y)$ по крайней мере вблизи границы $\partial\Omega$, так как $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0$, а $u_0(x, y)$ этому условию, вообще говоря, не удовлетворяет. Таким образом, $\sup_{\bar{\Omega}} \|u_\varepsilon(x, y) - u_0(x, y)\|$ не стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а значит, согласно определению, задача A_ε — сингулярно возмущенная. Подробно эта задача будет рассмотрена в гл. 3. На примере этой задачи мы проиллюстрируем метод Люстерника — Вишика. Выяснится, что в окрестности границы $\partial\Omega$ образуется пограничный слой. Вне его, т. е. внутри области Ω , решение $u_0(x, y)$ задачи A_0 будет близко к решению $u_\varepsilon(x, y)$ задачи A_ε . Метод Люстерника — Вишика дает возможность построить

равномерное в $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ приближение для $u_\varepsilon(x, y)$. В гл. 3 будут рассмотрены также многие другие сингулярно возмущенные задачи с частными производными.

§ 2. Асимптотическое приближение по параметру. Асимптотические и сходящиеся ряды

1. Пусть $u_\varepsilon(x)$ — решение задачи A_ε , определенное в области D , и пусть $D_1 \subset D$, т. е. D_1 — подобласть области D , в частности D_1 может совпадать с D , и в D_1 определена некоторая функция $U(x, \varepsilon)$. Как было оговорено, считаем $\varepsilon > 0$.

Определение. *Функция $U(x, \varepsilon)$ называется асимптотическим приближением по параметру ε для решения $u_\varepsilon(x)$ в подобласти D_1 , если*

$$\sup_{D_1} \|u_\varepsilon(x) - U(x, \varepsilon)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Если при этом $\sup_{D_1} \|u_\varepsilon(x) - U(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^k)$, то будем говорить, что $U(x, \varepsilon)$ является асимптотическим приближением для $u_\varepsilon(x)$ в D_1 с точностью порядка ε^k .

Запись $\alpha(\varepsilon) = O(\varepsilon^k)$, в которой правая часть равенства читается так: «о большое от ε^k », означает, что существуют числа $c > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется неравенство $\|\alpha(\varepsilon)\| \leq c\varepsilon^k$.

Для иллюстрации данного определения обратимся еще раз к примерам 1 и 2 из § 1. В примере 1 функция $U = u_0(x)$ является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ на всем отрезке $D = \{0 \leq x \leq 1\}$ с точностью порядка ε , а в примере 2 функция $U = u_0(x)$ дает асимптотическое приближение для $u_\varepsilon(x)$ с точностью порядка ε не на всем отрезке $D = \{0 \leq x \leq 1\}$, а лишь на отрезке $D_1 = \{\delta \leq x \leq 1\}$, т. е. вне пограничного слоя.

2. Под *асимптотическим методом* понимается тот или иной способ построения асимптотического приближения $U(x, \varepsilon)$ для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε . Как правило, построение $U(x, \varepsilon)$ сводится к решению более простых задач, чем исходная задача A_ε . Практическая ценность асимптотического метода определяется возможностью эффективного нахождения $U(x, \varepsilon)$ с помощью этих более простых задач.

Обратим внимание на сходство и различие между асимптотическими и численными методами решения сингулярно возмущенных задач. Асимптотическое приближение является приближением к решению изучаемой задачи при достаточно малом ε ($\varepsilon \rightarrow 0$). В то же время в реальных задачах ε хоть и мало, но фиксировано. Поэтому $U(x, \varepsilon)$ может оказаться довольно грубым приближением к $u_\varepsilon(x)$, не обеспечивающим нужной точности. При численном решении дифференциальное уравнение

A_ε заменяется некоторым разностным уравнением с предварительным разбиением отрезка интегрирования на n частей. Решение такого разностного уравнения (при фиксированном ε) служит приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A_ε . Увеличивая n , можно обеспечить требуемую степень близости решения разностного уравнения к $u_\varepsilon(x)$.

Однако при численном интегрировании сингулярно возмущенного уравнения возникают большие трудности в связи с тем, что в пограничном слое решение $u_\varepsilon(x)$ резко меняется, и во многих сингулярно возмущенных задачах стандартные численные методы не работают при малых ε . Разработка специальных численных методов для решения сингулярно возмущенных задач представляет собой отдельную самостоятельную проблему. Ей посвящены многие работы [2, 3, 10, 64—66, 68].

Асимптотическое приближение, хотя и является грубым, дает качественное представление о решении и служит ориентиром для построения более тонких численных методов.

Таким образом, асимптотические методы для сингулярно возмущенных задач имеют важное значение. Вместе с тем необходимо отметить, что те более простые задачи, с помощью которых строится асимптотическое приближение для решения задачи A_ε , в частности задача A_0 , в свою очередь могут потребовать привлечения численных методов, поскольку для практических целей часто недостаточно уравнения или формулы, а требуется довести результат до числа. Резюмируя, можно сказать, что численные и асимптотические методы не исключают, а дополняют друг друга. Для решения многих задач на практике применяются комбинированные методы, включающие и асимптотический анализ, и численный счет.

3. В настоящей книге будут рассматриваться методы построения асимптотических приближений для решений $u_\varepsilon(x)$ сингулярно возмущенных задач во всей области D (равномерных асимптотических приближений). При этом, как правило, будет строиться ряд по степеням ε , имеющий вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon) \quad (1)$$

(где $u_k(x, \varepsilon)$ — ограниченные функции) такой, что n -я частичная сумма

$$U_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(x, \varepsilon)$$

является асимптотическим приближением для решения $u_\varepsilon(x)$ в области D с точностью порядка ε^{n+1} , т. е.

$$\sup_D \| u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon) \| = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (2)$$

Определение. Ряд (1), удовлетворяющий условию (2), называется асимптотическим рядом для функции $u_\varepsilon(x)$ (или асимптотическим разложением функции $u_\varepsilon(x)$) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области D .

Вместо того чтобы говорить: «построим асимптотический ряд» или «построим асимптотическое разложение», часто употребляют более краткое выражение: «построим асимптотику» функции $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Конечно, на практике никогда не строят весь ряд (1). Обычно ограничиваются некоторым числом первых членов ряда, т. е. находят $U_n(x, \varepsilon)$ при каком-то n . Тем не менее часто говорят о построении асимптотического ряда, подразумевая под этим следующее: если указан алгоритм, позволяющий найти члены ряда до любого номера n , то считается, что ряд построен.

Обратим внимание на важный момент: асимптотический ряд (1) может не сходиться к функции $u_\varepsilon(x)$ и даже может быть расходящимся. В самом деле, сходимость ряда (1) к функции $u_\varepsilon(x)$ означает, что

$$\|u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Асимптотический ряд (1) по определению удовлетворяет условию (2), т. е. существуют числа $c > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ (зависящие, вообще говоря, от n) такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется неравенство

$$\sup_D \|u_\varepsilon(x) - U_n(x, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{n+1}. \quad (4)$$

Хотя множитель ε^{n+1} в правой части (4) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если $0 < \varepsilon < 1$, тем не менее из неравенства (4) не следует условие (3), поскольку $c = c(n)$ зависит от n и эта зависимость может быть такой, что $c(n)\varepsilon^{n+1}$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

4. Приведем пример асимптотического ряда вида (1), который расходится. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x^2} - \frac{1}{x}. \quad (5)$$

Будем искать его решение в виде ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (5), получим

$$\varepsilon (u'_0 + \varepsilon u'_1 + \dots + \varepsilon^{k-1} u'_{k-1} + \dots) = -\frac{1}{x^2} (u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^k u_k + \dots) - \frac{1}{x}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, приходим к уравнениям

$$0 = -\frac{u_0}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad u'_0 = -\frac{u_1}{x^2}, \quad u'_1 = -\frac{u_2}{x^2}, \dots, \quad u'_{k-1} = -\frac{u_k}{x^2}, \dots,$$

откуда последовательно находим коэффициенты искомого ряда:

$$u_0 = -x, \quad u_1 = x^2, \quad u_2 = -(2!)x^3, \dots, \quad u_k = (-1)^{k+1} (k!) x^{k+1}, \dots$$

Таким образом, мы построили ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (-1)^{k+1} (k!) x^{k+1}, \quad (6)$$

который, очевидно, расходится при $\varepsilon > 0$ во всех точках x , кроме $x=0$.

Покажем, что этот расходящийся ряд является асимптотическим рядом для некоторого решения уравнения (5). Будем рассматривать уравнение (5) на промежутке $0 < x \leq a$. Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u = c \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) - \left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right) dt\right) \exp(1/\varepsilon x).$$

Рассмотрим его частное решение при $c=0$:

$$u_\varepsilon(x) = -\left(\int_0^x \frac{1}{\varepsilon t} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right) dt\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right).$$

Интегрируя трижды по частям, получим

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= -\left(\int_0^x t \, d \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)\right) \exp(1/\varepsilon x) = -t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right) \Big|_0^x \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) + \left(\int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right) dt\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) = \\ &= -x + \left(\int_0^x \varepsilon t^2 \, d \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right)\right) \exp(1/\varepsilon x) = \\ &= -x + \varepsilon x^2 - \left(\int_0^x 2\varepsilon t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t}\right) dt\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right) = \\ &= -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^2 \int_0^x 6t^2 \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon x}\right) dt. \end{aligned}$$

Так как $\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon t} + \frac{1}{\varepsilon x}\right) \leq 1$ при $0 < t \leq x$, то последнее слагаемое в полученном равенстве не превосходит $\varepsilon^2 \int_0^x 6t^2 dt = 2\varepsilon^2 x^3 \leq 2a^3 \varepsilon^2$. Таким образом,

$$u_\varepsilon(x) = -x + \varepsilon x^2 + O(\varepsilon^2).$$

Продолжая интегрировать по частям, придем к равенству

$$u_\varepsilon(x) = -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \dots + \varepsilon^n (-1)^{n+1} (n!) x^{n+1} + O(\varepsilon^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (-1)^{k+1} (k!) x^{k+1} + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Это равенство показывает, что расходящийся ряд (6) удовлетворяет условию (2), а значит, является асимптотическим рядом при $\varepsilon \rightarrow 0$ для решения $u_\varepsilon(x)$ уравнения (5) на промежутке $0 < x \leq a$.

§ 3. Примеры асимптотических разложений решений регулярно и сингулярно возмущенных задач

Введем некоторые обозначения. Пусть $x = \text{col}(x_1, \dots, x_k)$ — k -мерный вектор, t — скаляр, $f(x, t) = \text{col}(f_1, \dots, f_m)$ — m -мерная вектор-функция. Тогда $f_x(x, t) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) - (m \times k)$ - матрица, $f_t(x, t) = \text{col}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial t}\right)$ — m -мерный вектор.

3.1. Регулярно возмущенная задача

1. Рассмотрим начальную задачу для системы дифференциальных уравнений $(x(t, \varepsilon) - m$ -мерная вектор-функция)

$$A_\varepsilon : \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(0, \varepsilon) = x^0.$$

Соответствующая задача A_0 имеет вид

$$A_0 : \frac{dx}{dt} = f(x, t, 0), \quad 0 \leq t \leq T; \quad x(0) = x^0.$$

Пусть задача A_0 имеет решение $x = \bar{x}(t)$ и пусть функция $f(x, t, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема в области

$$\|x - \bar{x}(t)\| \leq a, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (1)$$

где a и ε_0 — некоторые положительные числа.

Решение задачи A_ε будем искать в виде ряда

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + \dots \quad (2)$$

Подставляя ряд (2) в задачу A_ε , раскладывая формально $f(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + \dots, t, \varepsilon)$ в ряд Тейлора с центром разложения в точке $(x_0, t, 0)$ и группируя члены с одинаковыми степенями ε , приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^k x_k + \dots) &= f(x_0, t, 0) + \bar{f}_x(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \\ &+ \varepsilon^k x_k + \dots) + \bar{f}_\varepsilon \cdot \varepsilon + \dots = f(x_0, t, 0) + \varepsilon(\bar{f}_x \cdot x_1 + \varphi_1) + \dots + \\ &+ \varepsilon^k(\bar{f}_x \cdot x_k + \varphi_k) + \dots \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k, \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \dots + \varepsilon^k x_k(0) + \dots = x^0, \quad (4)$$

где $\bar{f}_x = f_x(x_0, t, 0)$, $\varphi_1 = \bar{f}_\varepsilon = f_\varepsilon(x_0, t, 0)$, а φ_k ($k > 1$) выражается рекуррентно через x_i с номерами $i < k$.

Приравнявая в обеих частях равенств (3) и (4) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем задачи для нахождения коэффициентов x_0, x_1, \dots ряда (2):

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= f_0 \equiv f(x_0, t, 0), \quad x_0(0) = x^0, \\ \frac{dx_k}{dt} &= f_k \equiv \bar{f}_x \cdot x_k + \varphi_k, \quad x_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Задача для x_0 совпадает, очевидно, с задачей A_0 , и поэтому $x_0 = \bar{x}(t)$, а уравнения для x_k ($k = 1, 2, \dots$) — так называемые *уравнения в вариациях* — представляют собой линейные дифференциальные уравнения и, следовательно, имеют единственные решения с заданными начальными условиями. Таким образом, можно определить члены ряда (2) до любого номера n . Подчеркнем, что главный член $x_0(t)$ ряда (2) есть решение задачи A_0 (вообще говоря, более простой, чем задача A_ε), а остальные члены ряда — решения линейных начальных задач (исходная же задача A_ε , вообще говоря, нелинейная).

2. Обозначим n -ю частичную сумму ряда (2) через $X_n(t, \varepsilon)$, т. е.

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k(t).$$

Теорема 3.1. При достаточно малых ε ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторое число) задача A_ε имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, причем ряд (2) является асимптотическим рядом для этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ на всем отрезке $0 \leq t \leq T$, т. е.

$$\sup_{[0, T]} \|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (5)$$

Не останавливаясь подробно на всех деталях, укажем схему доказательства этой классической теоремы. Уравнение для остаточного члена асимптотики $v(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)$, которое получается подстановкой $x = X_n + v$ в уравнение A_ε , запишем в виде

$$\frac{dv}{dt} = \bar{f}_x \cdot v + g(v, t, \varepsilon), \quad v(0, \varepsilon) = 0, \quad (6)$$

где $g(v, t, \varepsilon) = f(X_n(t, \varepsilon) + v, t, \varepsilon) - \bar{f}_x \cdot v - \frac{dX_n}{dt}$. Функция $g(v, t, \varepsilon)$ обладает следующими двумя свойствами:

$$1^0. \quad g(0, t, \varepsilon) = f(X_n, t, \varepsilon) - \frac{dX_n}{dt} = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k f_k + O(\varepsilon^{n+1}) -$$

$$- \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n \varepsilon^k x_k = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \left(f_k - \frac{dx_k}{dt} \right) + O(\varepsilon^{n+1}) = O(\varepsilon^{n+1}),$$

так как $\frac{dx_k}{dt} = f_k$. Свойство 1^0 показывает, что $X_n(t, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению A_ε с точностью порядка ε^{n+1} . Этот же факт выражают такими словами: невязка, получающаяся при подстановке X_n в уравнение A_ε равна $O(\varepsilon^{n+1})$.

2^0 . Если $\|v_1(t, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon$, $\|v_2(t, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon$, где c_1 — любое число, то найдутся числа $c_2 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{[0, T]} \|g(v_2, t, \varepsilon) - g(v_1, t, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon \sup_{[0, T]} \|v_2(t, \varepsilon) - v_1(t, \varepsilon)\|.$$

Это свойство следует из формулы конечных приращений $g(v_2, t, \varepsilon) - g(v_1, t, \varepsilon) = g_v^*(v_2 - v_1)$ (* означает, что элементы матрицы g_v вычисляются в промежуточных точках) и оценки матрицы g_v :

$$g_v = f_x(X_n + v, t, \varepsilon) - \bar{f}_x = f_x(x_0 + O(\varepsilon) + v, t, \varepsilon) - f_x(x_0, t, 0) = \\ = O(\varepsilon + \|v\|) = O(\varepsilon), \quad \text{если } \|v\| = O(\varepsilon).$$

Используя фундаментальную матрицу $\Phi(t, s)$ однородного уравнения $\frac{dv}{dt} = \bar{f}_x \cdot v$, перейдем от дифференциального уравнения (6) для v к эквивалентному интегральному уравнению

$$v(t, \varepsilon) = \int_0^t \Phi(t, s) g(v(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds \equiv G(v, t, \varepsilon).$$

Интегральный оператор $G(v, t, \varepsilon)$ обладает такими же двумя свойствами, как и функция $g(v, t, \varepsilon)$. Первое свойство ($G(0, t,$

$\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$) показывает, что $G(v, t, \varepsilon)$ является величиной порядка ε^{n+1} при $v=0$, а значит, и при $v=O(\varepsilon^{n+1})$. Из второго свойства следует, что при достаточно малых $\|v\|$ и ε оператор G является сжимающим (для этого нужно взять ε столь малым, чтобы выполнялось неравенство $c_2\varepsilon < 1$). Применяя теперь к интегральному уравнению метод последовательных приближений:

$$v_0=0, v_i=G(v_{i-1}, t, \varepsilon), i=1, 2, \dots$$

и используя отмеченные два свойства оператора G , нетрудно доказать, что при достаточно малых ε решение существует, единственно и имеет оценку $\max_{[0, T]} \|v(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1})$, что и доказывает теорему.

Отметим, что для построения $X_n(t, \varepsilon)$ и доказательства оценки (5) при данном n достаточно, чтобы функция $f(x, t, \varepsilon)$ была $n+1$ раз непрерывно дифференцируема в области (1).

3. Подчеркнем особо два обстоятельства:

1) Решение $x_0 = \bar{x}(t)$ задачи A_0 является асимптотическим приближением для решения $x(t, \varepsilon)$ задачи A_ε (с точностью порядка ε , как следует из (5)) на всем отрезке $0 \leq t \leq T$. Таким образом, задача A_ε — регулярно возмущенная.

2) Асимптотическое разложение (2) решения регулярно возмущенной задачи A_ε представляет собой степенной ряд по ε с коэффициентами, зависящими от t и не зависящими от ε .

3.2. Пример асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной задачи

1. Рассмотрим теперь начальную задачу для скалярного линейного дифференциального уравнения с малым параметром $\varepsilon > 0$ при производной, которое имеет вид

$$A_\varepsilon: \varepsilon \frac{dx}{dt} = -ax + f(t), 0 \leq t \leq T, x(0, \varepsilon) = 0;$$

$a = \text{const} > 0$, $f(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Соответствующая задача A_0 состоит из одного алгебраического уравнения

$$0 = -ax + f(t),$$

откуда $x = f(t)/a \equiv \bar{x}(t)$.

Попытаемся построить асимптотическое разложение решения задачи A_ε в виде такого же степенного ряда по ε , как в п. 3.1:

$$x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^k x_k(t) + \dots \quad (7)$$

Подставляя этот ряд в уравнение A_ε , приходим к равенству

$$\varepsilon \frac{d}{dt} (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^{k-1} x_{k-1} + \dots) = -a(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots + \varepsilon^k x_k + \dots) + f(t),$$

откуда стандартным способом (приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε) находим

$$x_0 = f(t)/a, \quad x_1 = -\frac{1}{a} \frac{dx_0}{dt} = -f'(t)/a^2, \dots, \quad (8)$$

$$x_k = -\frac{1}{a} \frac{dx_{k-1}}{dt} = (-1)^k f^{(k)}(t)/a^{k+1}, \quad k=2, 3, \dots$$

Заметим, что главный член $x_0(t)$ построенного ряда (7) совпадает с решением $\bar{x}(t)$ задачи A_0 .

Ряд (7) удовлетворяет формально уравнению A_ε , но не удовлетворяет, вообще говоря, начальному условию, так как члены ряда были определены без использования заданного начального условия $x(0, \varepsilon) = x^0$. Отсюда следует, что ряд (7) не может служить асимптотическим разложением решения задачи A_ε по крайней мере в некоторой окрестности начальной точки $t=0$. Будет ли ряд (7) асимптотическим рядом для решения $x(t, \varepsilon)$ вне окрестности начальной точки?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим точное решение задачи A_ε (оно элементарно находится в явном виде):

$$x(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) f(s) ds.$$

Интегрируя по частям, получим асимптотическое разложение $x(t, \varepsilon)$. После двукратного интегрирования по частям приходим к равенству

$$x(t, \varepsilon) = \frac{1}{a} \int_0^t f(s) d \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) = \frac{1}{a} f(s) \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) \Big|_0^t -$$

$$-\frac{1}{a} \int_0^t f'(s) \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) ds = \frac{f(t)}{a} - \frac{f(0)}{a} \exp(-at/\varepsilon) -$$

$$-\frac{\varepsilon}{a^2} \int_0^t f''(s) d \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) = \left[\frac{f(t)}{a} - \varepsilon \frac{f'(t)}{a^2} \right] +$$

$$+ \left[-\frac{f(0)}{a} + \varepsilon \frac{f'(0)}{a^2} \right] \exp(-at/\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{a^2} \int_0^t f''(s) \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) ds.$$

Так как $\int_0^t \exp\left(-\frac{a}{\varepsilon}(t-s)\right) ds = \frac{\varepsilon}{a} (1 - \exp(-at/\varepsilon)) = O(\varepsilon)$, то

последнее слагаемое в полученном равенстве является величиной порядка ε^2 . Поэтому, учитывая формулы (8) и вводя новую переменную $\tau = t/\varepsilon$, это равенство можно записать в виде

$$x(t, \varepsilon) = [x_0(t) + \varepsilon x_1(t)] + [-x_0(0) \exp(-a\tau) - \varepsilon x_1(0) \exp(-a\tau)] + O(\varepsilon^2).$$

Члены, зависящие от τ , обозначим так: $\Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau)$. Очевидно, $x_0(0) + \Pi_0(0) = 0$, $x_1(0) + \Pi_1(0) = 0$.

Продолжая интегрирование по частям и учитывая формулы (8), для любого n получим равенство

$$x(t, \varepsilon) = [x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^n x_n(t)] + [\Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau)] + O(\varepsilon^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (x_k(t) + \Pi_k(\tau)) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где каждая из функций $\Pi_k(\tau)$ содержит в качестве множителя $\exp(-a\tau)$ и обладает тем свойством, что $x_k(0) + \Pi_k(0) = 0$. Таким образом, асимптотическое разложение решения $x(t, \varepsilon)$ имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (x_k(t) + \Pi_k(\tau)). \quad (9)$$

2. Отметим характерные особенности этого разложения.

1) Асимптотическое разложение (9) состоит из двух рядов: такого же ряда, как в регулярном случае (ряд (7)), т. е. степенного ряда по ε с коэффициентами, зависящими от t , и еще одного ряда — степенного ряда по ε с коэффициентами, зависящими от растянутого времени τ :

$$\Pi_0(\tau) + \varepsilon \Pi_1(\tau) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k(\tau) + \dots \quad (10)$$

2) Члены ряда (10) обладают двумя важными свойствами. Во-первых, как уже было отмечено, $x_k(0) + \Pi_k(0) = 0$, в результате чего ряд (9) удовлетворяет заданному начальному условию $x(0, \varepsilon) = 0$. Напомним, что ряд (7) этому условию не удовлетворяет. Поэтому можно сказать, что назначение ряда (10) состоит в том, чтобы совместно с рядом (7) удовлетворить заданному начальному условию. Во-вторых, функции $\Pi_k(\tau)$ экспоненциально затухают с ростом τ . Тем самым они существенны лишь в малой окрестности начальной точки $t=0$ (в пограничном слое), а при $t \geq \delta$ (δ — сколь угодно малое, но фиксированное число) $\Pi_k(\tau) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ быстрее любой степени ε , так как при $t \geq \delta \exp(-a\tau) = \exp(-at/\varepsilon) \leq \exp(-a\delta/\varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ для любого N .

Функции $\Pi_k(\tau)$ называются пограничными функциями, ряд (7) — регулярным рядом или регулярной частью асимптотики,

а ряд (10) — погранслоиным рядом или погранслоиной частью асимптотики.

3) В отличие от регулярно возмущенной задачи, рассмотренной в п. 3.1, в данном случае решение $x_0(t)$ задачи A_0 — главный член регулярного ряда — является асимптотическим приближением для решения $x(t, \varepsilon)$ задачи A_ε не на всем отрезке $0 \leq t \leq T$, а только вне пограничного слоя, т. е. на отрезке $\delta \leq t \leq T$. Чтобы получить асимптотическое приближение для $x(t, \varepsilon)$ на всем отрезке $0 \leq t \leq T$, нужно прибавить к $x_0(t)$ главный член погранслоиного ряда — функцию $\Pi_0(\tau)$. При этом $\sup_{[0, T]} |x(t, \varepsilon) - (x_0(t) + \Pi_0(\tau))| = O(\varepsilon)$, т. е. сумма $x_0(t) + \Pi_0(\tau)$

является равномерным асимптотическим приближением для $x(t, \varepsilon)$ с точностью порядка ε .

4) Вне пограничного слоя, где все Π -функции меньше любой степени ε , асимптотическим разложением решения $x(t, \varepsilon)$ служит один регулярный ряд (7).

5) Отметим также, что если изменить знак a , то для любого $t > 0$ функция $x(t, \varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и поэтому $x_0(t)$ не будет асимптотическим приближением (а ряд (7) — асимптотическим рядом) для $x(t, \varepsilon)$ ни на каком промежутке из отрезка $0 \leq t \leq T$. Таким образом, в случае сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений должно выполняться некоторое специальное условие на правую часть, чтобы решение задачи A_0 было приближением (хотя бы в какой-то подобласти) для решения исходной задачи. В данном конкретном примере это условие свелось к неравенству $a > 0$. Для более общих сингулярно возмущенных задач мы познакомимся с более общей формой этого условия в следующей главе, где будут построены асимптотические разложения решений типа (9) для тихоновской системы и ряда других задач.

Глава 2

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 4. Начальная задача

4.1. Теорема Тихонова

1. В 1948 г. в журнале «Математический сборник» появилась статья А. Н. Тихонова, которая называлась «О зависимости решений дифференциальных уравнений от малых параметра» [104]. Затем вышли еще две статьи А. Н. Тихонова, посвящен-

ные тому же вопросу [105, 106]. Эти работы положили начало новому направлению в области дифференциальных уравнений и математической физики — теории сингулярных возмущений.

А. Н. Тихонов рассматривал начальную задачу (следуя оригиналу, будем обозначать малый параметр греческой буквой μ)

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$z(0, \mu) = z^0, \quad y(0, \mu) = y^0. \quad (2)$$

Здесь $\mu > 0$, z и y — вектор-функции произвольных размерностей M и m . Как видим, часть уравнений системы (1) (для функции z) содержит малый параметр μ при производных, а другая часть (для функции y) не содержит его. Как уже отмечалось, систему (1) принято называть *тихоновской системой*. На самом деле А. Н. Тихоновым была исследована не только задача (1), (2), но и более общая система, содержащая разные по величине малые параметры в разных уравнениях. Но мы ограничимся рассмотрением задачи (1), (2).

Будем считать, что функции $F(z, y, t)$ и $f(z, y, t)$ непрерывны вместе с производными по z и y в некоторой области $G = \{\|z\| \leq a, \|y\| \leq a, 0 \leq t \leq T\}$.

Решение задачи (1), (2) обозначим $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$. Как правило, точное решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ найти не удастся, и проблема состоит в нахождении приближенного решения, используя малость параметра μ . Если положить $\mu = 0$, то из (1) получим систему уравнений

$$0 = F(\bar{z}, \bar{y}, t), \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{z}, \bar{y}, t). \quad (3)$$

Порядок этой системы ниже, чем исходной, поскольку первое уравнение не является дифференциальным. Система (3) называется *вырожденной*. В этой системе не нужно задавать начальное условие для функции \bar{z} , а следует оставить только начальное условие для функции \bar{y} :

$$\bar{y}(0) = y^0. \quad (4)$$

Итак, при $\mu = 0$ вместо задачи (1), (2) получаем задачу (3), (4). Как ее решать? Сначала из первого уравнения (3) нужно выразить \bar{z} через \bar{y} и t . Заметим, что эта операция может быть неоднозначной, т. е. уравнение $F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$ может иметь несколько корней относительно \bar{z} . В этом случае встает вопрос о выборе корня. Но допустим, что корень каким-то образом выбран: $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ (ответ на вопрос, как выбирать нужный корень, будет дан в теореме Тихонова). Подставляя этот

корень во второе уравнение (3), получим уравнение для функции \bar{y} :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t). \quad (5)$$

Решив это дифференциальное уравнение с начальным условием (4), найдем $\bar{y}(t)$, а значит, и $\bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t)$. Мы видим, что нахождение $\bar{z}(t)$, $\bar{y}(t)$ является более простой задачей, чем нахождение решения $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ исходной задачи (1), (2): вместо системы двух дифференциальных уравнений нужно последовательно решить сначала конечное (не дифференциальное) уравнение $F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$, а затем дифференциальное уравнение (5) с условием (4), не содержащее малого параметра и имеющее меньший порядок, нежели исходная система (1).

Естественно поставить вопрос: будет ли $\bar{z}(t)$, $\bar{y}(t)$ асимптотическим приближением для $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$? Сразу можно отметить, что $\bar{z}(t)$ не будет в общем случае удовлетворять начальному условию (2), т. е. $\bar{z}(0) \neq z^0$, поскольку заданное начальное значение z^0 вообще не участвовало в определении $\bar{z}(t)$ (оно «выпало» при переходе от задачи (1), (2) к задаче (3), (4)). Поэтому по крайней мере в некоторой окрестности начальной точки $t=0$ $\bar{z}(t)$ не будет близко к $z(t, \mu)$. Будет ли $\bar{z}(t)$ близко к $z(t, \mu)$ вне этой окрестности? В отличие от \bar{z} и z значения функций $\bar{y}(t)$ и $y(t, \mu)$ совпадают в точке $t=0$: $\bar{y}(0) = y(0, \mu) = y^0$. Поэтому в некоторой малой окрестности точки $t=0$ эти функции будут близки. Сохранится ли эта близость $\bar{y}(t)$ и $y(t, \mu)$ на всем заданном отрезке $0 \leq t \leq T$? Ответ на эти вопросы может быть положительным или отрицательным в зависимости от условий, наложенных на системы (1) и (3), в частности от выбора корня $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$. Теорема Тихонова дает положительный ответ на эти вопросы.

2. Сформулируем условия теоремы Тихонова.

1. Пусть уравнение $F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$ имеет изолированный корень относительно \bar{z} : $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$, $(\bar{y}, t) \in D = \{\|\bar{y}\| \leq a, 0 \leq t \leq T\}$, а задача (3), (4) имеет единственное решение на отрезке $0 \leq t \leq T$, соответствующее этому корню.

Наглядно корень $z = \varphi(y, t)$ можно представить как некоторую поверхность в пространстве переменных (z, y, t) (рис. 2). Изолированность корня означает, что в некоторой его окрестности нет других корней уравнения. Вне этой окрестности могут быть и другие корни.

Следующие два условия показывают, какой именно корень нужно выбрать. Они связаны с так называемой *присоединенной системой*:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(\tilde{z}, y, t), \quad \tau \geq 0. \quad (6)$$

Независимой переменной здесь является новая переменная τ , а y, t входят в систему (6) как параметры, т. е. система рассматривается при любых фиксированных значениях (y, t) из области D . В силу условия I $\bar{z} = \varphi(y, t)$ является точкой покоя системы (6).

II. Пусть точка покоя $\bar{z} = \varphi(y, t)$ присоединенной системы является асимптотически устойчивой по Ляпунову при $\tau \rightarrow \infty$ равномерно относительно $(y, t) \in D$.

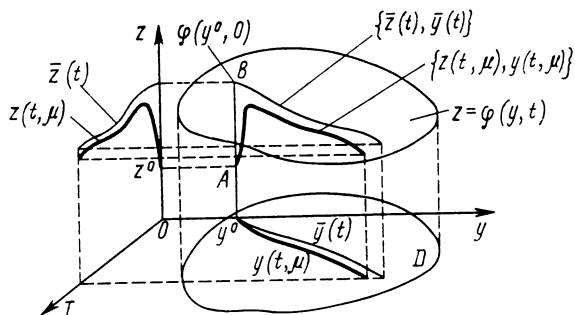


Рис. 2

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (одно и то же для всех $(y, t) \in D$) такое, что если $\|\bar{z}(0) - \varphi(y, t)\| < \delta$, то $\|\bar{z}(\tau) - \varphi(y, t)\| < \varepsilon$ при $\tau \geq 0$ и $\bar{z}(\tau) \rightarrow \varphi(y, t)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Корней уравнения $F(z, y, t) = 0$, удовлетворяющих условию II, может быть несколько. Для окончательного выбора корня рассмотрим присоединенную систему (6) при $y = y^0, t = 0$ (т. е. при начальных значениях параметров y, t)

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(\tilde{z}, y^0, 0) \quad (7)$$

с начальным условием

$$\tilde{z}(0) = z^0, \quad (8)$$

где z^0 — тот самый вектор, который входит в начальное условие (2). Этот вектор, вообще говоря, не является близким к точке покоя $\bar{z} = \varphi(y^0, 0)$ системы (7), так как условие (2) задавалось независимо от этой точки покоя. Поэтому решение $\tilde{z}(\tau)$ задачи (7), (8) может и не стремиться к точке покоя $\varphi(y^0, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Мы потребуем, чтобы это стремление имело место.

III. Пусть решение $\tilde{z}(\tau)$ задачи (7), (8) существует при $\tau \geq 0$ и стремится к точке покоя $\varphi(y^0, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

В таком случае говорят, что z^0 принадлежит области влияния точки покоя $\varphi(y^0, 0)$. Что представляет собой область влияния в случае, когда z — скалярная функция, будет сказано ниже.

Итак, условия II и III — это и есть те условия, которые позволяют выбрать нужный корень $z = \varphi(y, t)$ уравнения $F(z, y, t) = 0$.

Сформулируем теперь теорему Тихонова.

Теорема 4.1. Если выполнены условия I—III, то при достаточно малых μ задача (1), (2) имеет единственное решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ и справедливы предельные равенства

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T,$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = \bar{z}(t) \quad \text{при } 0 < t \leq T.$$

Эти равенства показывают, что в пределе при $\mu \rightarrow 0$ решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (1), (2) переходит в решение $\bar{z}(t)$, $\bar{y}(t)$ вырожденной задачи (3), (4). Поэтому теорему Тихонова называют теоремой о предельном переходе. Заметим, что предельный переход для y имеет место для всех t на отрезке $0 \leq t \leq T$. Более того, в процессе доказательства выясняется, что этот предельный переход — равномерный. Предельный же переход для z имеет место для любого t , кроме $t=0$. Это и понятно: $z(0, \mu) = z^0 \neq \bar{z}(0)$. Равномерным предельный переход для z будет вне малой окрестности начальной точки. Эту окрестность мы и назовем *пограничным слоем*.

Таким образом, $\bar{y}(t)$ является асимптотическим приближением для $y(t, \mu)$ на всем отрезке $0 \leq t \leq T$, а $\bar{z}(t)$ — асимптотическим приближением для $z(t, \mu)$ на отрезке $\delta \leq t \leq T$, где δ — сколь угодно малое, но фиксированное число. Наглядное представление о поведении решения $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ при малых μ дает рис. 2.

3. Мы не будем приводить здесь доказательства теоремы Тихонова. Оно подробно изложено в [43]. Поясним лишь роль требований II и III. Если в системе (1) сделать замену переменной $\tau = t/\mu$ (τ — растянутое время), то придем к системе

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y, \tau\mu), \quad \frac{dy}{d\tau} = \mu f(z, y, \tau\mu) \quad (9)$$

с начальными условиями

$$z|_{\tau=0} = z^0, \quad y|_{\tau=0} = y^0.$$

Рассмотрим качественно поведение решения при изменении τ от нуля до некоторого значения $\tau_0 > 0$. Так как μ мало, то пра-

вая часть во втором уравнении мала: $\mu \dot{f} = O(\mu)$, т. е. скорость $\frac{dy}{d\tau}$ изменения y по отношению к растянутому времени τ является величиной порядка μ . Поэтому величина y , равная y^0 в начальный момент, за промежуток $0 \leq \tau \leq \tau_0$ изменится мало, не более чем на величину порядка μ :

$$y = y^0 + O(\mu) \text{ при } 0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Подставив это выражение для y в первое из уравнений (9), получим

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y^0 + O(\mu), \tau\mu). \quad (10)$$

На ограниченном отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_0$ это уравнение можно рассматривать как уравнение с регулярными возмущениями по отношению к уравнению, которое получается из (10) при $\mu = 0$:

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y^0, 0). \quad (11)$$

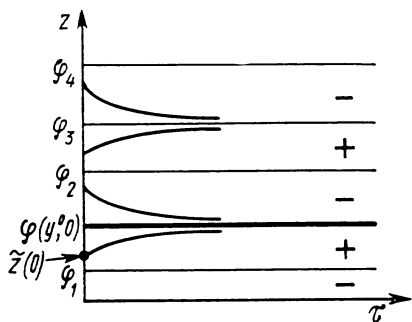


Рис. 3

При малых μ решения уравнений (10) и (11) с начальными условиями $z|_{\tau=0} = z^0$ близки на отрезке $0 \leq \tau \leq \tau_0$. Но уравнение (11) есть не что иное, как присоединенное уравнение

(7). Таким образом, при $0 \leq \tau \leq \tau_0$, т. е. при $0 \leq t \leq \tau_0 \mu$, поведение функции $z(t, \mu)$ приближенно описывается уравнением (7). В силу условия III решение уравнения (7) с начальным условием (8) стремится с ростом τ к $\varphi(y^0, 0)$ (рис. 2). Итак, условие III обеспечивает быстрое изменение $z(t, \mu)$ от значения z^0 при $t=0$ до значения, близкого к $\varphi(y^0, 0)$, при $t=\tau_0 \mu$. Условие II гарантирует после этого, что $z(t, \mu)$ останется вблизи $\bar{z}(t)$.

4. Выясним теперь, что представляет собой область влияния асимптотически устойчивой точки покоя $\bar{z} = \varphi(y^0, 0)$ уравнения (7) в случае, когда z — скалярная функция. Пусть уравнение $F(\bar{z}, y^0, 0) = 0$ наряду с корнем $\bar{z} = \varphi(y^0, 0)$ имеет и другие корни: $\bar{z} = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. На плоскости (\bar{z}, τ) эти корни изображаются прямыми линиями (рис. 3). Пусть в промежутках между корнями функция $F(\bar{z}, y^0, 0)$ имеет такие знаки, как показано на рис. 3. Тогда если $\bar{z}(0)$ лежит в промежутке между φ_1 и $\varphi(y^0, 0)$, где $F > 0$, то решение $\bar{z}(\tau)$ при $\tau > 0$ будет возрастать, и монотонно приближаться к точке покоя $\varphi(y^0, 0)$. Если $\bar{z}(0)$ лежит в промежутке между $\varphi(y^0, 0)$ и φ_2 , где $F < 0$, то решение

$\tilde{z}(\tau)$ при $\tau > 0$ будет убывать и снова монотонно приближается к точке покоя $\varphi(y^0, 0)$. Если же взять начальное значение $\tilde{z}(0)$ вне промежутка (φ_1, φ_2) , то решение $\tilde{z}(\tau)$ не будет стремиться к точке покоя $\varphi(y^0, 0)$.

Таким образом, в рассмотренном случае точка покоя $\tilde{z} = \varphi(y^0, 0)$ уравнения (7) является асимптотически устойчивой, а область ее влияния представляет собой интервал (φ_1, φ_2) .

На рис. 3 видно, что точка покоя $\tilde{z} = \varphi_3$ также является асимптотически устойчивой, а область ее влияния — интервал (φ_2, φ_4) . Поэтому условие II теоремы Тихонова не дает еще возможности однозначно выбрать нужный корень уравнения $F(z, y, t) = 0$. Условие же III делает этот выбор однозначным. Если z^0 принадлежит интервалу (φ_1, φ_2) , то нужно взять корень $z = \varphi(y, t)$, а если z^0 принадлежит области влияния другой точки покоя, например $z^0 \in (\varphi_2, \varphi_4)$, то нужно взять корень $z = \varphi_3(y, t)$. Но может быть и так, что z^0 не лежит в области влияния ни одной асимптотически устойчивой точки покоя. Тогда теорема Тихонова неприменима.

Отметим также, что описанный простой вид область влияния имеет лишь в том случае, когда z — скалярная функция. Если же z — вектор-функция, то вопрос о структуре области влияния усложняется. Во многом он до сих пор остается открытым.

4.2. Алгоритм построения асимптотического разложения решения начальной задачи

1. Теорема Тихонова является лишь первым шагом в исследовании асимптотики решения задачи (1), (2). Поскольку функция $\tilde{z}(t)$ не является приближением для $z(t, \mu)$ при малых μ в пограничном слое, возникает задача построения асимптотического приближения для $z(t, \mu)$, пригодного на всем отрезке $0 \leq t \leq T$ (равномерного приближения). Кроме того, теорема Тихонова не дает порядка точности асимптотического приближения $\tilde{y}(t)$ для $y(t, \mu)$ на $0 \leq t \leq T$ и $\tilde{z}(t)$ для $z(t, \mu)$ вне пограничного слоя. Как будет показано, этот порядок равен μ .

Возникает задача построения приближения с более высокой точностью и, если возможно, асимптотического разложения решения задачи (1), (2).

Для построения асимптотического разложения решения задачи (1), (2) нужно наложить на функции F и f дополнительные требования.

IV. Пусть функции $F(z, y, t)$ и $f(z, y, t)$ бесконечно дифференцируемы в области G .

Обозначим через $\lambda_i(t)$ ($i=1, \dots, M$) собственные значения матрицы $F_z(t) = F_z(\tilde{z}(t), \tilde{y}(t), t)$. Условие II теоремы Тихонова заменим следующим условием, которое снова обозначим II.

II. Пусть

$$\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, M.$$

Отметим, что из этого условия следует условие II теоремы Тихонова (см. [43]).

2. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем строить в виде, характерном для сингулярно возмущенных задач (этот вид подсказан разложением решения (9) в примере из п. 3.2 гл. 1):

$$x(t, \mu) = \bar{x}(t, \mu) + \Pi x(\tau, \mu), \quad (12)$$

где $\tau = t/\mu$, x означает z и y в совокупности, т. е. $x = \{z, y\}$,

$$\bar{x}(t, \mu) = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \dots + \mu^k \bar{x}_k(t) + \dots \quad (13)$$

— регулярная часть асимптотики,

$$\Pi x(\tau, \mu) = \Pi_0 x(\tau) + \mu \Pi_1 x(\tau) + \dots + \mu^k \Pi_k x(\tau) + \dots \quad (14)$$

— погранслоная часть асимптотики. Подставляя искомое разложение (12) в систему (1), получим равенства

$$\mu \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d\Pi z}{d\tau} = F(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t), \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{1}{\mu} \frac{d\Pi y}{d\tau} = f(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t).$$

Представим правые части этих равенств в виде, аналогичном (12): $F = \bar{F} + \Pi F$, $f = \bar{f} + \Pi f$. Покажем, как это делается, на примере F :

$$\begin{aligned} F(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t) &= F(\bar{z}(t, \mu), \bar{y}(t, \mu), t) + [F(\bar{z}(\tau\mu, \mu) + \\ &+ \Pi z(\tau, \mu), \bar{y}(\tau\mu, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \tau\mu) - F(\bar{z}(\tau\mu, \mu), \bar{y}(\tau\mu, \mu), \tau\mu)] \equiv \\ &\equiv \bar{F} + \Pi F. \end{aligned}$$

Равенства (15) принимают теперь вид

$$\mu \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d\Pi z}{d\tau} = \bar{F} + \Pi F, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{1}{\mu} \frac{d\Pi y}{d\tau} = \bar{f} + \Pi f. \quad (16)$$

Подставляя в (16) вместо $\bar{x}(t, \mu)$ и $\Pi x(\tau, \mu)$ ряды (13) и (14), представим \bar{F} , ΠF , \bar{f} и Πf в виде рядов по степеням μ :

$$\begin{aligned} \bar{F} &= F(\bar{z}_0(t) + \mu \bar{z}_1(t) + \dots, \bar{y}_0(t) + \mu \bar{y}_1(t) + \dots, t) = \\ &= F(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t) + \mu [\bar{F}_z(t) \bar{z}_1(t) + \bar{F}_y(t) \bar{y}_1(t)] + \dots + \mu^k [\bar{F}_z(t) \bar{z}_k + \\ &+ \bar{F}_y(t) \bar{y}_k + \mathbf{F}_k(t)] + \dots = \bar{F}_0 + \mu \bar{F}_1 + \dots + \mu^k \bar{F}_k + \dots; \end{aligned}$$

здесь элементы матриц $F_z(t)$ и $F_y(t)$ вычисляются в точке $(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$, а функции $F_k(t)$ рекуррентно выражаются через $\bar{z}_i(t), \bar{y}_i(t)$ с номерами $i < k$;

$$\begin{aligned} \Pi F &= F(\bar{z}_0(\tau^\mu) + \mu \bar{z}_1(\tau^\mu) + \dots + \Pi_0 z(\tau) + \mu \Pi_1 z(\tau) + \dots, \bar{y}_0(\tau^\mu) + \\ &+ \mu \bar{y}_1(\tau^\mu) + \dots + \Pi_0 y(\tau) + \mu \Pi_1 y(\tau) + \dots, \tau^\mu) - F(\bar{z}_0(\tau^\mu) + \mu \bar{z}_1(\tau^\mu) + \\ &+ \dots, \bar{y}_0(\tau^\mu) + \mu \bar{y}_1(\tau^\mu) + \dots, \tau^\mu) = [F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \bar{y}_0(0) + \\ &+ \Pi_0 y(\tau), 0) - F(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0)] + \mu [F_z(\tau) \Pi_1 z(\tau) + F_y(\tau) \Pi_1 y(\tau) + \\ &+ G_1(\tau)] + \dots + \mu^k [F_z(\tau) \Pi_k z(\tau) + F_y(\tau) \Pi_k y(\tau) + G_k(\tau)] + \dots = \\ &= \Pi_0 F + \mu \Pi_1 F + \dots + \mu^k \Pi_k F + \dots; \end{aligned}$$

здесь элементы матриц $F_z(\tau)$ и $F_y(\tau)$ вычисляются в точке $(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0)$, а функции $G_k(\tau)$ рекуррентно выражаются через $\Pi_i z(\tau), \Pi_i y(\tau)$ с номерами $i < k$.

Такое же разложение имеет место для \bar{f} и Πf .

Приравняем теперь коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях равенств (16), причем отдельно приравняем коэффициенты, зависящие от t , и отдельно — зависящие от τ . Это и даст уравнения для нахождения коэффициентов рядов (13) и (14).

3. Для главного члена $\bar{x}_0(t) = \{\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t)\}$ регулярной части асимптотики получим систему уравнений

$$0 = \bar{F}_0 \equiv F(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t), \frac{d\bar{y}_0}{dt} = \bar{f}_0 \equiv f(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t), \quad (17)$$

которая, очевидно, совпадает с вырожденной системой (3).

Для главного члена $\Pi_0 x(\tau) = \{\Pi_0 z(\tau), \Pi_0 y(\tau)\}$ погранслоистой части асимптотики получается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 z}{d\tau} &= \Pi_0 F \equiv F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0) - F(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0) = \\ &= F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0), \quad (18) \\ \frac{d\Pi_0 y}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

(отметим, что $F(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0) = 0$ в силу первого уравнения (17)).

Для членов асимптотики $\bar{x}_k(t), \Pi_k x(\tau)$ при $k \geq 1$ имеем линейные уравнения (так называемые уравнения в вариациях)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_{k-1}}{dt} &= \bar{F}_k \equiv \bar{F}_z(t) \bar{z}_k + \bar{F}_y(t) \bar{y}_k + F_k(t), \\ \frac{d\bar{y}_k}{dt} &= \bar{f}_k \equiv \bar{f}_z(t) \bar{z}_k + \bar{f}_y(t) \bar{y}_k + f_k(t); \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau} = \Pi_k F \equiv F_z(\tau) \Pi_k z + F_y(\tau) \Pi_k y + G_k(\tau), \quad (20)$$

$$\frac{d\Pi_k y}{d\tau} = \Pi_{k-1} f,$$

где функции $f_k(t)$, как и $F_k(t)$, рекуррентно выражаются через $\bar{z}_i(t)$, $\bar{y}_i(t)$, $i < k$, функции $G_k(\tau)$ — через $\Pi_i z(\tau)$, $\Pi_i y(\tau)$, $i < k$, а $\Pi_{k-1} f$ — коэффициент при μ^{k-1} в разложении Πf по степеням μ , аналогичном разложению ΠF . Так, например,

$$G_1(\tau) = (F_z(\tau) - \bar{F}_z(0))(\bar{z}'_0(0)\tau + \bar{z}_1(0)) + (F_y(\tau) - \bar{F}_y(0))(\bar{y}'_0(0)\tau + \bar{y}_1(0)) + (F_t(\tau) - \bar{F}_t(0))\tau, \quad (21)$$

$$\Pi_0 f = f(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0) - f(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0). \quad (22)$$

Чтобы из полученных уравнений определить $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau)$, нужно задать начальные условия. Подставляя искомое разложение (12) в начальные условия (2), приходим к равенствам

$$\bar{z}_0(0) + \mu \bar{z}_1(0) + \dots + \Pi_0 z(0) + \mu \Pi_1 z(0) + \dots = z^0,$$

$$\bar{y}_0(0) + \mu \bar{y}_1(0) + \dots + \Pi_0 y(0) + \mu \Pi_1 y(0) + \dots = y^0,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях равенств, получаем

$$\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = z^0, \quad \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0, \quad (23)$$

$$\bar{z}_k(0) + \Pi_k z(0) = 0, \quad \bar{y}_k(0) + \Pi_k y(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Два уравнения (23) содержат четыре неизвестных: $\bar{z}_0(0)$, $\Pi_0 z(0)$, $\bar{y}_0(0)$, $\Pi_0 y(0)$ (так же обстоит дело с уравнениями (24)). Ясно, что с помощью только уравнений (23) эти четыре неизвестных определить нельзя. Нужны какие-то дополнительные соображения. Прежде всего отметим, что первое уравнение в (17) не является дифференциальным, и поэтому для $\bar{z}_0(t)$ не нужно задавать начального условия. Поэтому $\bar{z}_0(0)$ не следует рассматривать в (23) как искомую величину. То же самое относится к $\bar{z}_k(0)$ в системе (24).

Второе соображение состоит в том, что функции $\Pi_k x(\tau)$ должны быть пограничными функциями, т. е. стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Оказывается, это требование достаточно предъявить к функциям $\Pi_k y(\tau)$, а в результате оно будет выполнено и для $\Pi_k z(\tau)$. Итак, мы вводим условие

$$\Pi_k y(\infty) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

4. Покажем теперь, что уравнения (17) — (20) совместно с условиями (23) — (25) позволяют последовательно найти все члены рядов (13), (14). Из второго уравнения (18) получаем $\Pi_0 y(\tau) = \text{const}$, а так как в силу (25) $\Pi_0 y(\infty) = 0$, то

$$\Pi_0 y(\tau) \equiv 0.$$

Этот факт можно интерпретировать следующим образом: в нулевом приближении функция $y(t, \mu)$ не имеет погранслоя.

Поскольку $\Pi_0 y(0) = 0$, из второго уравнения (23) находим $\bar{y}_0(0) = y^0$. Таким образом, для $\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$ имеем систему (17), совпадающую с вырожденной системой (3), и начальное условие, совпадающее с (4). В качестве решения $\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$ возьмем то решение задачи (3), (4), которое фигурировало в теореме Тихонова: $\bar{z}_0 = \bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t)$, $\bar{y}_0 = \bar{y}(t)$. Итак, главные члены $\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$ регулярной части асимптотики совпадают с предельным решением из теоремы Тихонова.

Так как функция $\bar{z}_0(t)$ определена, то $\bar{z}_0(0)$ известно и поэтому из первого уравнения (23) находим

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \bar{z}_0(0) = z^0 - \varphi(y^0, 0). \quad (26)$$

Для нахождения $\Pi_0 z(\tau)$ остается решить первое уравнение (18) с этим начальным условием (учитывая, что $\Pi_0 y(\tau) = 0$). Замена переменной $\tilde{z}(\tau) = \Pi_0 z(\tau) + \varphi(y^0, 0)$ сводит полученную задачу для $\Pi_0 z$ к присоединенной системе (7) с начальным условием (8). В силу условия III теоремы Тихонова отсюда следует, что

$$\Pi_0 z(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty.$$

Можно доказать, используя условие II, что $\Pi_0 z(\tau)$ имеет экспоненциальную оценку (см. [43]):

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (27)$$

Здесь и далее буквами c и κ обозначаются некоторые подходящие положительные числа, вообще говоря, разные в разных неравенствах.

Если z — скалярная функция, то оценка (27) получается весьма просто. В этом случае условие II сводится к неравенству

$$F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t) < 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq T. \quad (28)$$

Первое уравнение (18) согласно формуле конечных приращений можно записать в виде

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F_z(\bar{z}_0(0) + \theta\Pi_0 z(\tau), \underline{y}_0, 0) \Pi_0 z,$$

где $0 < \theta < 1$. Отсюда, учитывая начальное условие (26), находим

$$\Pi_0 z(\tau) = (z^0 - \bar{z}_0(0)) \exp \left(\int_0^\tau F_z(\bar{z}_0(0) + \theta \Pi_0 z(s), y^0, 0) ds \right). \quad (29)$$

Так как $\Pi_0 z(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, а $F_z(\bar{z}_0(0), y^0, 0) < 0$ в силу (28), то существуют числа $\kappa > 0$ и $\tau_0 > 0$ такие, что $F_z(\bar{z}_0(0) + \theta \Pi_0 z(\tau), y^0, 0) < -\kappa$ при $\tau \geq \tau_0$. Отсюда следует, что

$$\int_{\tau_0}^\tau F_z(\bar{z}_0(0) + \theta \Pi_0 z(s), y^0, 0) ds < -\kappa(\tau - \tau_0) \quad \text{при } \tau \geq \tau_0, \text{ и, значит,}$$

$$\begin{aligned} |\Pi_0 z(\tau)| &= \left[|z^0 - \bar{z}_0(0)| \exp \left(\int_0^{\tau_0} F_z(\bar{z}_0(0) + \theta \Pi_0 z(s), y^0, 0) ds \right) \right] \times \\ &\times \exp \left(\int_{\tau_0}^\tau F_z(\bar{z}_0(0) + \theta \Pi_0 z(s), y^0, 0) ds \right) \leq c \exp(-\kappa(\tau - \tau_0)) = \\ &= c_1 \exp(-\kappa\tau), \end{aligned} \quad (30)$$

$c_1 = c \exp(\kappa\tau_0)$. Обозначая c_1 через c , получим для $\Pi_0 z(\tau)$ оценку (27).

Итак, найдены все члены нулевого приближения.

5. Определение следующих членов асимптотики проходит по такой же схеме для любого $k \geq 1$. Допустим, что мы уже определили все члены с номерами до $k-1$ включительно, причем Π -функции (т. е. $\Pi_i z$ и $\Pi_i y$ при $i=0, 1, \dots, k-1$) имеют экспоненциальную оценку типа (27). Тогда неоднородности в линейных системах (19), (20), т. е. $\frac{d\bar{z}_{k-1}}{dt}$, $F_k(t)$, $f_k(t)$, $G_k(\tau)$,

$\Pi_{k-1} f$, являются известными функциями, причем $G_k(\tau)$ и $\Pi_{k-1} f$ имеют экспоненциальную оценку типа (27). Для $G_1(\tau)$ и $\Pi_0 f$ такая оценка непосредственно следует из формул (21), (22) и экспоненциальной оценки для $\Pi_0 z(\tau)$.

Из второго уравнения (20) с условием (25) находим

$$\Pi_k y(\tau) = \int_{-\infty}^\tau \Pi_{k-1} f(s) ds. \quad (31)$$

Так как $\|\Pi_{k-1} f(\tau)\| \leq c \exp(-\kappa\tau)$, то

$$\|\Pi_k y(\tau)\| \leq \int_{-\infty}^\tau c \exp(-\kappa s) ds = \frac{c}{\kappa} \exp(-\kappa\tau).$$

Обозначая постоянную c/κ снова через c , получим оценку типа (27) для $\Pi_k y(\tau)$. Из (31) имеем

$$\Pi_k y(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_{k-1} f(s) ds.$$

Поэтому из второго уравнения (24) можно найти $\bar{y}_k(0)$:

$$\bar{y}_k(0) = -\Pi_k y(0) = \int_0^{\infty} \Pi_{k-1} f(s) ds. \quad (32)$$

Для нахождения $\bar{z}_k(t)$, $\bar{y}_k(t)$ нужно решить теперь систему (19) с начальным условием (32). Для этого из первого уравнения (19) выразим \bar{z}_k через \bar{y}_k :

$$\bar{z}_k = \bar{F}_z^{-1}(t) \left[\frac{d\bar{z}_{k-1}}{dt} - \bar{F}_y(t) \bar{y}_k - F_k(t) \right] \quad (33)$$

(отметим, что в силу условия II $\det \bar{F}_z(t) \neq 0$ и, следовательно, $\bar{F}_z^{-1}(t)$ существует), а затем подставим это выражение во второе уравнение (19). Получим линейное дифференциальное уравнение для $\bar{y}_k(t)$. Решив его при начальном условии (32), найдем $\bar{y}_k(t)$, а значит, и $\bar{z}_k(t)$ (по формуле (33)).

Вектор $\bar{z}_k(0)$ является теперь известным, поэтому из первого уравнения (24) находим начальное условие для $\Pi_k z(0)$: $\Pi_k z(0) = -\bar{z}_k(0)$. Остается решить первое уравнение (20) с этим начальным условием, учитывая, что $\Pi_k y(\tau)$ — известная функция. Так как $G_k(\tau)$ и $\Pi_k y(\tau)$ имеют экспоненциальную оценку, то и функция $\tilde{G}_k(\tau) = F_y(\tau) \Pi_k y(\tau) + G_k(\tau)$ имеет оценку того же типа:

$$\|\tilde{G}_k(\tau)\| \leq c \exp(-\kappa\tau). \quad (34)$$

Решение задачи для $\Pi_k z(\tau)$ можно записать в виде

$$\Pi_k z(\tau) = -\Phi(\tau) \bar{z}_k(0) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau) \Phi^{-1}(s) \tilde{G}_k(s) ds, \quad (35)$$

где $\Phi(\tau)$ — фундаментальная матрица соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = F_z(\tau) \Phi, \quad \Phi(0) = E_M \text{ — единичная матрица.}$$

Можно доказать [43], что в силу условия II справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tau)\| &\leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0, \\ \|\Phi(\tau) \Phi^{-1}(s)\| &\leq c \exp(-\kappa(\tau-s)), \quad 0 \leq s \leq \tau. \end{aligned} \quad (36)$$

В том случае, когда z — скалярная функция, имеем $\Phi(\tau) = \exp\left(\int_0^\tau F_z(s) ds\right)$ и оценки (36) легко доказать таким же способом, как была доказана оценка (30).

Используя неравенства (34) и (36), из (35) находим

$$\begin{aligned} \|\Pi_k z(\tau)\| &\leq c \exp(-\kappa\tau) + \int_0^\tau c \exp(-\kappa(\tau-s)) \cdot c \exp(-\kappa s) ds \leq \\ &\leq c \exp(-\kappa\tau) + c^2 \tau \exp(-\kappa\tau). \end{aligned}$$

Возьмем κ_1 такое, что $0 < \kappa_1 < \kappa$. Так как $\tau \exp(-(\kappa - \kappa_1)\tau) \leq c$, то $\tau \exp(-\kappa\tau) \leq c \exp(-\kappa_1\tau)$. Обозначая κ_1 снова через κ , а все однотипные постоянные одной и той же буквой c , окончательно получаем

$$\|\Pi_k z(\tau)\| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geq 0.$$

Итак, описанный алгоритм позволяет определить члены рядов (13) и (14) до любого номера n включительно, причем все Π -функции имеют экспоненциальную оценку.

4.3. Обоснование асимптотики

Обозначим через $X_n(t, \mu)$ частичную сумму построенного разложения (12):

$$X_n(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k [\bar{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau)].$$

Теорема 4.2 (теорема Васильевой). *При условиях I—IV ряд (12) является асимптотическим рядом для решения $x(t, \mu) = \{z(t, \mu), y(t, \mu)\}$ задачи (1), (2) при $\mu \rightarrow 0$ на отрезке $0 \leq t \leq T$, т. е. справедлива оценка*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| = O(\mu^{n+1}). \quad (37)$$

Доказательство этой теоремы можно провести по такой же схеме, как и в п. 3.1. Отметим, что существование и единственность решения следует из теоремы Тихонова. Однако попутно с доказательством оценки (37) можно доказать существование и единственность решения, не опираясь на теорему Тихонова.

Для остаточных членов асимптотики

$$u(t, \mu) = z(t, \mu) - Z_n(t, \mu), \quad v(t, \mu) = y(t, \mu) - Y_n(t, \mu)$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} \mu \frac{du}{dt} &= F_2 u + F_y v + g_1(u, v, t, \mu), \quad \frac{dv}{dt} = \\ &= f_2 u + f_y v + g_2(u, v, t, \mu), \quad u(0, \mu) = 0, \quad v(0, \mu) = 0, \end{aligned}$$

где элементы матриц F_z, F_y, f_z, f_y вычисляются в точке

$$\begin{aligned} & (\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z(t/\mu), \bar{y}_0(t), t), \quad g_1(u, v, t, \mu) = F(Z_n + u, Y_n + v, t) - \\ & - \mu \frac{dZ_n}{dt} - F_z u - F_y v, \quad g_2(u, v, t, \mu) = \\ & = f(Z_n + u, Y_n + v, t) - \frac{dY_n}{dt} - f_z u - f_y v. \end{aligned}$$

Функции g_1 и g_2 обладают следующими двумя свойствами, аналогичными свойствам функции g из п. 3.1:

$$1^0. \quad g_1(0, 0, t, \mu) = O(\mu^{n+1}),$$

$$g_2(0, 0, t, \mu) = O(\mu^{n+1} + \mu^n \exp(-\kappa t/\mu)).$$

2⁰. Если $\|u_i(t, \mu)\| \leq c_1 \mu$, $\|v_i(t, \mu)\| \leq c_1 \mu$, $i=1, 2$, то существуют числа $c_2 > 0$ и $\mu_0 > 0$ такие, что при $0 < \mu \leq \mu_0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < T} \|g_i(u_2, v_2, t, \mu) - g_i(u_1, v_1, t, \mu)\| \leq \\ & \leq c_2 \mu \left[\sup_{0 < t < T} \|u_2 - u_1\| + \sup_{0 < t < T} \|v_2 - v_1\| \right]. \end{aligned}$$

Используя фундаментальные матрицы $U(t, s, \mu)$ и $V(t, s, \mu)$ однородных систем $\mu \frac{du}{dt} = F_z u$ и $\frac{dv}{dt} = f_y v$, перейдем к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(t, \mu) &= \int_0^t U(t, s, \mu) \frac{1}{\mu} [F_y v(s, \mu) + g_1(u, v, s, \mu)] ds, \\ v(t, \mu) &= \int_0^t V(t, s, \mu) [f_z u(s, \mu) + g_2(u, v, s, \mu)] ds. \end{aligned} \quad (38)$$

Для фундаментальной матрицы $U(t, s, \mu)$ справедлива оценка [43]

$$\|U(t, s, \mu)\| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa}{\mu} (t-s)\right), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Подставляя теперь выражение для $v(t, \mu)$, определяемое вторым уравнением (38), в первое уравнение, получим

$$u(t, \mu) = \int_0^t K(t, s, \mu) u(s, \mu) ds + Q_1(u, v, t, \mu), \quad (39)$$

где K — ограниченное ядро, а оператор Q_1 обладает такими же двумя свойствами, как и функция $g_1(u, v, t, \mu)$. Уравнение (39)

заменяем эквивалентным уравнением

$$u(t, \mu) = Q_1(u, v, t, \mu) + \int_0^t R(t, s, \mu) Q_1(u, v, s, \mu) ds \equiv \\ \equiv G_1(u, v, t, \mu), \quad (40)$$

где R — резольвента ядра K . Затем выражение для $u(t, \mu)$, определяемое этим уравнением, подставим во второе уравнение (38):

$$v(t, \mu) = \int_0^t V(t, s, \mu) [f_z(s, \mu) G_1(u, v, s, \mu) + g_2(u, v, s, \mu)] ds \equiv \\ \equiv G_2(u, v, t, \mu). \quad (41)$$

Интегральные операторы G_1 и G_2 в уравнениях (40), (41) обладают такими же двумя свойствами, как и функция $g_1(u, v, t, \mu)$.

Применив теперь к системе (40), (41) метод последовательных приближений, как и в п. 3.1, получим, что решение существует, единственно и имеет оценку

$$\max_{0 < t < T} \|u(t, \mu)\| = O(\mu^{n+1}), \quad \max_{0 < t < T} \|v(t, \mu)\| = O(\mu^{n+1}),$$

т. е. справедливо равенство (37).

Подробное доказательство теоремы содержится в [43].

В заключение отметим, что для доказательства оценки (37) при данном n достаточно потребовать, чтобы функции F и f были $n+2$ раза непрерывно дифференцируемы в некоторой δ -трубке кривой L_0 , являющейся объединением двух кривых: $L_0 = L_1 \cup L_2$.

$$L_1 = \{(z, y, t) : z = \bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \tau \geq 0; y = y^0; t = 0\},$$

$$L_2 = \{(z, y, t) : z = \bar{z}_0(t); y = \bar{y}_0(t); 0 \leq t \leq T\}.$$

Кривая L_0 , очевидно, является предельной кривой при $\mu \rightarrow 0$ для интегральной кривой, соответствующей решению $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (1), (2) (см. рис. 2, на котором L_1 есть отрезок AB , L_2 — кривая BC).

§ 5. Краевые задачи

5.1. Условно устойчивый случай

1. Рассмотрим тихоновскую систему

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t) \quad (1)$$

в случае, когда y — m -мерный вектор, а вектор z состоит из двух компонент z_1 и z_2 . Пусть выполнено условие I из п. 4.1 и пусть собственные значения матрицы $F_z(t) = F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$, где

$\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$ — то же самое решение вырожденной задачи, что в п. 4.2, удовлетворяют не условию II (см. п. 4.2), а условию

$$\text{II}'. \lambda_1(t) < 0, \lambda_2(t) > 0.$$

Как показывают простейшие примеры, в этом случае решение начальной задачи при $\mu \rightarrow 0$ не ограничено, а значит, теорема о предельном переходе не имеет места.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\mu \frac{dz_1}{dt} = z_2 - 1, \quad \mu \frac{dz_2}{dt} = z_1 + 1,$$

$$z_1(0, \mu) = 0, \quad z_2(0, \mu) = 1.$$

Данная система не содержит y , а матрица \bar{F}_z имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Точное решение задачи таково: $z_1 = \text{ch} \frac{t}{\mu} - 1$, $z_2 = \text{sh} \frac{t}{\mu} + 1$. Если $\mu \rightarrow 0$, то z_1 и z_2 , очевидно, не являются ограниченными и предельного перехода при $\mu \rightarrow 0$ к решению $\bar{z}_1 = -1$, $\bar{z}_2 = 1$ вырожденной системы здесь нет.

Если в тихоновской системе выполнено условие II', то начальное условие для z надо заменить краевыми условиями (будем считать $T = 1$)

$$z_1(0, \mu) = z_1^0, \quad z_2(1, \mu) = z_2^0. \quad (2)$$

Для y по-прежнему сохраняем начальное условие

$$y(0, \mu) = y_0. \quad (3)$$

Как показывает исследование, решение такой задачи стремится к решению вырожденной задачи, а его асимптотическое разложение содержит пограничные функции, причем не только в окрестности $t = 0$, но и в окрестности $t = 1$.

Пример 2. Рассмотрим те же уравнения, что в примере 1, но с краевыми условиями $z_1(0, \mu) = 0$, $z_2(1, \mu) = 0$. Точное решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} z_1 &= (1 + \exp(-1/\mu))(1 + \exp(-2/\mu))^{-1} \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) + \\ &+ \left(-1 + \exp\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{2}{\mu}\right)\right)^{-1} \exp\left(\frac{t-1}{\mu}\right) - 1, \\ z_2 &= -(1 + \exp(-1/\mu))(1 + \exp(-2/\mu))^{-1} \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) + \\ &+ \left(-1 + \exp\left(-\frac{1}{\mu}\right)\right) \left(1 + \exp\left(-\frac{2}{\mu}\right)\right)^{-1} \exp\left(\frac{t-1}{\mu}\right) + 1. \end{aligned}$$

Из этих формул отчетливо видно наличие пограничного слоя в окрестности каждого из концов отрезка $[0, 1]$ и стремление z_1 , z_2

к решению $\bar{z}_1 = -1$, $\bar{z}_2 = 1$ вырожденной системы на интервале $(0, 1)$.

2. Опишем алгоритм построения асимптотики решения задачи (1)–(3). Будем строить асимптотическое разложение решения в виде

$$x(t, \mu) = \bar{x}(t, \mu) + \Pi x(\tau_0, \mu) + Qx(\tau_1, \mu), \quad (4)$$

где $\bar{x}(t, \mu)$ — регулярный ряд:

$$\bar{x}(t, \mu) = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \dots + \mu^k \bar{x}_k(t) + \dots;$$

$\Pi x(\tau_0, \mu)$ ($\tau_0 = t/\mu$) — погранслойный ряд в окрестности $t=0$:

$$\Pi x(\tau_0, \mu) = \Pi_0 x(\tau_0) + \mu \Pi_1 x(\tau_0) + \dots + \mu^k \Pi_k x(\tau_0) + \dots;$$

$Qx(\tau_1, \mu)$ ($\tau_1 = \frac{t-1}{\mu}$) — погранслойный ряд в окрестности $t=1$:

$$Qx(\tau_1, \mu) = Q_0 x(\tau_1) + \mu Q_1 x(\tau_1) + \dots + \mu^k Q_k x(\tau_1) + \dots$$

Подставляя (4) в уравнения (1), запишем их в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d\Pi z}{d\tau_0} + \frac{dQz}{d\tau_1} &= \bar{F} + \Pi F + QF, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{1}{\mu} \frac{d\Pi y}{d\tau_0} + \frac{1}{\mu} \frac{dQy}{d\tau_1} &= \bar{f} + \Pi f + Qf, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\bar{F} = F(\bar{z}(t, \mu), \bar{y}(t, \mu), t),$$

$$\begin{aligned} \Pi F &= F(\bar{z}(\tau_0\mu, \mu) + \Pi z(\tau_0, \mu), \bar{y}(\tau_0\mu, \mu) + \Pi y(\tau_0, \mu), \tau_0\mu) - \\ &- F(\bar{z}(\tau_0\mu, \mu), \bar{y}(\tau_0\mu, \mu), \tau_0\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QF &= F(\bar{z}(1 + \tau_1\mu, \mu) + Qz(\tau_1, \mu), \bar{y}(1 + \tau_1\mu, \mu) + \\ &+ Qy(\tau_1, \mu), 1 + \tau_1\mu) - F(\bar{z}(1 + \tau_1\mu, \mu), \bar{y}(1 + \tau_1\mu, \mu), 1 + \tau_1\mu). \end{aligned}$$

Аналогичный смысл имеют \bar{f} , Πf , Qf .

Следует заметить, что имеется некоторое различие между формулами (5) и формулами (16) из п. 4.2. В п. 4.2 выражение $\bar{F} + \Pi F$ получилось тождественным формальным преобразованием

$$F(\bar{z} + \Pi z, \bar{y} + \Pi y, t) = \bar{F} + \Pi F. \quad (6)$$

Теперь же равенство

$$F(\bar{z} + \Pi z + Qz, \bar{y} + \Pi y + Qy, t) = \bar{F} + \Pi F + QF \quad (7)$$

формально не верно и замену F на $\bar{F} + \Pi F + QF$ следует рассмат-

ривать как один из пунктов предлагаемого алгоритма построения ряда (4). Эта замена оправдывается следующими соображениями. Всюду, за исключением некоторой окрестности точки $t=1$, величины $Q_k x$, а значит, и QF будут сколь угодно малы при $\mu \rightarrow 0$ (меньше любой степени μ) и поэтому равенство (7) будет выполнено с точностью порядка μ^N (N — любое): это почти (6). С другой стороны, всюду, за исключением некоторой окрестности точки $t=0$, Π -функции меньше любой степени μ и равенство (7) также выполняется с точностью порядка μ^N (N — любое). Таким образом, оно выполняется с точностью μ^N всюду на $[0, 1]$.

Для коэффициентов разложения ΠF справедливо то же развернутое представление, как в п. 4.2, с заменой τ на τ_0 , а для QF — аналогичное представление с заменой $t=0$ на $t=1$ и τ на τ_1 . Аналогичные представления имеют место для Πf и Qf .

Подставляя (4) в краевые условия (2), (3) и полагая априори, что $\Pi_k x(1/\mu)$, $Q_k x(-1/\mu)$ меньше любой степени μ , получим равенства

$$\begin{aligned} \bar{z}_{10}(0) + \mu \bar{z}_{11}(0) + \dots + \Pi_0 z_1(0) + \mu \Pi_1 z_1(0) + \dots &= z_1^0, \\ \bar{z}_{20}(1) + \mu \bar{z}_{21}(1) + \dots + Q_0 z_2(0) + \mu Q_1 z_2(0) + \dots &= z_2^0, \\ \bar{y}_0(0) + \mu \bar{y}_1(0) + \dots + \Pi_0 y(0) + \mu \Pi_1 y(0) + \dots &= y^0 \end{aligned} \quad (8)$$

(первый индекс у \bar{z}_{1k} и \bar{z}_{2k} означает номер компоненты).

3. Приравняем в (5) отдельно члены, зависящие от t , τ_0 и τ_1 . В нулевом приближении имеем

$$0 = \bar{F}_0 \equiv \bar{F}(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t), \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = \bar{f}_0 \equiv f(\bar{z}_0, \bar{y}_0, t) \quad (9)$$

(это, очевидно, вырожденная система для исходной системы (1));

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau_0} = \Pi_0 F \equiv F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0), \quad \frac{d\Pi_0 y}{d\tau_0} = 0 \quad (10)$$

$(\tau_0 \geq 0)$;

$$\frac{dQ_0 z}{d\tau_1} = Q_0 F \equiv F(\bar{z}_0(1) + Q_0 z, \bar{y}_0(1) + Q_0 y, 1), \quad \frac{dQ_0 y}{d\tau_1} = 0$$

$(\tau_1 \leq 0)$.

Дополнительные условия для этих систем получаем из (8), приравнявая коэффициенты при μ^0 :

$$\bar{z}_{10}(0) + \Pi_0 z_1(0) = z_1^0, \quad (11)$$

$$\bar{z}_{20}(1) + Q_0 z_2(0) = z_2^0,$$

$$\bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0. \quad (12)$$

Кроме того, как и в п. 4.2, потребуем

$$\Pi_k y(\infty) = 0, \quad Q_k y(-\infty) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда $\Pi_0 y(\tau_0) \equiv 0$, $Q_0 y(\tau_1) \equiv 0$, а из (12) находим $\bar{y}_0(0) = y^0$. Система (9) с этим начальным условием определяет решение $\bar{z}_0(t)$, $\bar{y}_0(t)$, для которого, мы считаем, выполнено требование II'.

Обратимся к задаче (10), (11). С учетом равенства $\Pi_0 y = 0$ имеем

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau_0} = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z, y^0, 0), \quad (13)$$

$$\Pi_0 z_1(0) = z_1^0 - \bar{z}_{10}(0). \quad (14)$$

Таким образом, для двумерной вектор-функции $\Pi_0 z$ задано лишь одно условие (14), которое не может однозначно определить решение. Для определения $\Pi_0 z$ и следующих П-функций добавим требование стремления их к нулю при $\tau_0 \rightarrow \infty$:

$$\Pi_k z(\infty) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Точка покоя $\Pi_0 z = 0$ уравнения (13) в силу II' является уже не асимптотически устойчивой точкой покоя, а точкой покоя типа седла. На рис. 4 изображена эта точка (точка O) с двумя проходящими через нее сепаратрисами 1 и 2. Стрелками обозначено направление возрастания τ_0 . Чтобы решение задачи (13), (14) удовлетворяло требованию $\Pi_0 z(\infty) = 0$, сепаратриса 1 должна содержать такую точку, абсцисса которой равна $z_1^0 - \bar{z}_{10}(0)$ (точка M на рис. 4). Тем самым определяются значение $\Pi_0 z_2(0)$ (рис. 4) и все решение $\Pi_0 z(\tau_0)$.

Итак, потребуем выполнения следующего условия, аналогичного условию III в п. 4.1.

III'. Пусть прямая $\Pi_0 z_1 = z_1^0 - \bar{z}_{10}(0)$ пересекает сепаратрису точки покоя (типа седла) $\Pi_0 z = 0$ системы (13), входящую в эту точку покоя при $\tau_0 \rightarrow \infty$.

Замечания. 1) Название *условно устойчивый случай* связано

именно с тем, что точка покоя $\Pi_0 z = 0$ теперь не является асимптотически устойчивой и «притягивает» к себе при $\tau_0 \rightarrow \infty$ лишь те решения, начальные значения которых лежат на сепаратрисе 1.

2) Может случиться, что сепаратриса 1 не содержит точки, абсцисса которой равна $z_1^0 - \bar{z}_{10}(0)$ (рис. 5, а), или, напротив, содержит не одну такую точку (точки M_1 и M_2 на рис. 5, б). В первом случае решения с асимптотикой вида (4) не существуют.

вует. Во втором случае могут существовать два решения с асимптотикой вида (4). В зависимости от выбора точки M_1 или M_2 дальнейшее развитие алгоритма идет по-разному.

Нетрудно доказать, что $\Pi_0 z(\tau_0)$ имеет экспоненциальную оценку

$$\|\Pi_0 z(\tau_0)\| \leq c \exp(-\kappa \tau_0), \quad \tau_0 \geq 0. \quad (15)$$

Аналогично $\Pi_0 z(\tau_0)$ определяется пограничная функция $Q_0 z(\tau_1)$. При этом используется сепаратриса, входящая в седло при $\tau_1 \rightarrow -\infty$, и требуется условие, аналогичное III', которое обозначим III''. Функция $Q_0 z(\tau_1)$ имеет оценку, аналогичную (15):

$$\|Q_0 z(\tau_1)\| \leq c \exp(\kappa \tau_1), \quad \tau_1 \leq 0. \quad (16)$$

Итак, нулевое приближение построено.

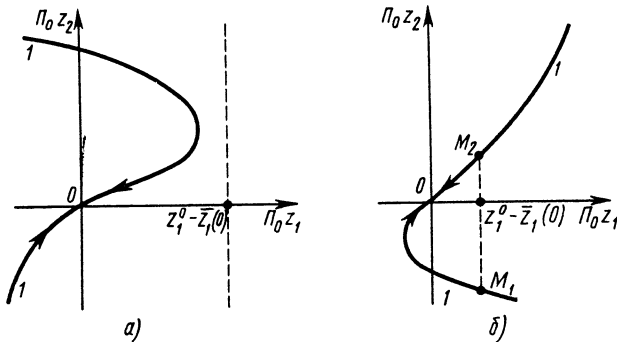


Рис. 5

4. Рассмотрим теперь системы уравнений для $\bar{x}_1(t)$ и $\Pi_1 x(\tau_0)$ и дополнительные условия для них:

$$\frac{d\bar{z}_0}{dt} = \bar{F}_z(t) \bar{z}_1 + \bar{F}_y(t) \bar{y}_1, \quad \frac{d\bar{y}_1}{dt} = \bar{f}_z(t) \bar{z}_1 + \bar{f}_y(t) \bar{y}_1, \quad (17)$$

где $\bar{F}_z(t) = F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$ и аналогичный смысл имеют $\bar{F}_y(t)$, $\bar{f}_z(t)$, $\bar{f}_y(t)$;

$$\frac{d\Pi_1 z}{d\tau_0} = \Pi_1 F \equiv F_z(\tau_0) \Pi_1 z + F_y(\tau_0) \Pi_1 y + G_1(\tau_0), \quad (18)$$

$$\frac{d\Pi_1 y}{d\tau_0} = \Pi_0 f,$$

где $F_z(\tau_0) = F_z(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau_0), y^0, 0)$, $F_y(\tau_0)$ имеет аналогичный смысл, $G_1(\tau_0)$ выражается формулой (21) из п. 4,2;

$$\bar{z}_{11}(0) + \Pi_1 z_1(0) = 0, \quad \bar{y}_1(0) + \Pi_1 y(0) = 0, \quad (19)$$

$$\Pi_1 z(\infty) = 0, \quad \Pi_1 y(\infty) = 0. \quad (20)$$

Из второго уравнения (18) с условием (20) находим

$$\Pi_1 y(\tau_0) = - \int_{\tau_0}^{\infty} \Pi_0 f(s) ds.$$

Следовательно,

$$\Pi_1 y(0) = - \int_0^{\infty} \Pi_0 f(s) ds,$$

и из второго уравнения (19) получаем

$$\bar{y}_1(0) = \int_0^{\infty} \Pi_0 f(s) ds.$$

Это начальное условие однозначно определяет решение $\bar{z}_1(t)$, $\bar{y}_1(t)$ системы (17). Для нахождения $\Pi_1 z(\tau_0)$ имеем теперь первое уравнение (18) с дополнительными условиями $\Pi_1 z_1(0) = -\bar{z}_{11}(0)$, $\Pi_1 z(\infty) = 0$. Можно показать, что эти условия однозначно определяют $\Pi_1 z(\tau_0)$ [43].

Система уравнений и дополнительные условия для $Q_1 x(\tau_1)$ имеют вид

$$\frac{dQ_1 z}{d\tau_1} = F_z(\tau_1) Q_1 z + F_y(\tau_1) Q_1 y + H_1(\tau_1),$$

$$\frac{dQ_1 y}{d\tau_1} = Q_0 f, \quad (21)$$

$$\bar{z}_{21}(1) + Q_1 z_2(0) = 0, \quad (22)$$

$$Q_1 z(-\infty) = 0, \quad Q_1 y(-\infty) = 0. \quad (23)$$

Здесь $F_z(\tau_1) = F_z(\bar{z}_0(1) + Q_0 z(\tau_1), \bar{y}_0(1), 1)$, а структура $H_1(\tau_1)$ аналогична структуре $G_1(\tau_0)$ в (18).

Из второго уравнения (21) с условием (23) находим

$$Q_1 y(\tau_1) = - \int_{\tau_1}^{-\infty} Q_0 f(s) ds.$$

Величина $\bar{z}_{21}(1)$ в (22) известна, так как функция $\bar{z}_{21}(t)$ уже найдена, и таким образом для $Q_1 z(\tau_1)$ имеем первое уравнение (21) с дополнительными условиями $Q_1 z_2(0) = -\bar{z}_{21}(1)$, $Q_1 z(-\infty) = 0$, что позволяет однозначно определить $Q_1 z(\tau_1)$.

Аналогично находятся $\bar{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau_0)$, $Q_k x(\tau_1)$ для произвольного k . Для Π - и Q -функций имеют место экспоненциальные оценки типа (15) и (16).

З а м е ч а н и е. Описанный алгоритм претерпевает несущественные изменения, если вместо (2) задать условия $z_1(0) = z_1^0$,

$z_1(1) = z_1^1$ или $z_2(0) = z_2^0, z_2(1) = z_2^1$, т. е. задать одну и ту же компоненту вектор-функции z на обоих концах отрезка $[0, 1]$.

5. Обозначим через $X_n(t, \mu)$ частичную сумму порядка n разложения (4):

$$X_n(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k [\bar{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau_0) + Q_k x(\tau_1)].$$

Теорема 5.1. Если выполнены условия I, IV из п. 4.2 и, кроме того, условия II', III', III'', то при достаточно малых μ в некоторой окрестности главного члена асимптотики $\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(t/\mu) + Q_0 x\left(\frac{t-1}{\mu}\right)$ существует единственное решение $x(t, \mu)$ задачи (1) — (3), а ряд (4) является асимптотическим рядом для этого решения при $\mu \rightarrow 0$ на отрезке $0 \leq t \leq 1$, т. е.

$$\max_{0 < t < 1} \|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| = O(\mu^{n+1}).$$

Доказательство этой теоремы в более общем случае, когда z является M -мерной вектор-функцией, содержится в [43].

6. Отметим некоторые обобщения рассмотренной задачи.

1) Краевые условия могут иметь более сложный вид:

$$R(z_1(0), z_2(0), y(0); z_1(1), z_2(1), y(1)) = 0, \quad (24)$$

где R — $(m+2)$ -мерный вектор. В этом случае можно доказать существование решения краевой задачи и построить асимптотику типа (4), пользуясь результатами, полученными в п. 1—5, но для этого надо несколько видоизменить рассмотренную в п. 1—5 задачу, взяв z_1^0, z_2^0, y^0 не постоянными, а зависящими от μ , причем так, что имеют место асимптотические представления

$$z_i^0 = z_{i0}^0 + \mu z_{i1}^0 + \dots, \quad i = 1, 2; \quad y^0 = y_0^0 + \mu y_1^0 + \dots \quad (25)$$

Описанный выше алгоритм очевидным образом переносится на этот случай.

Попытаемся теперь выбрать z_{ik}^0, y_k^0 так, чтобы решение задачи (1) — (3) с крайевыми значениями (25) удовлетворяло условию (24). Подставляя в (24) вместо точного решения его асимптотическое разложение, получим

$$R(z_{10}^0 + \mu z_{11}^0 + \dots, \bar{z}_{20}(0) + \Pi_0 z_2(0) + \dots, y_0^0 + \mu y_1^0 + \dots; \\ \bar{z}_{10}(1) + Q_0 z_1(0) + \dots, z_{20}^0 + \mu z_{21}^0 + \dots, \bar{y}_0(1) + \mu \bar{y}_1(1) + \dots) = 0.$$

Разложим левую часть равенства по степеням μ : $R_0 + \mu R_1 + \dots + \mu^k R_k + \dots$ — и приравняем нулю коэффициенты. Тогда получим

последовательность уравнений $R_k=0$ ($k=0, 1, \dots$) для определения неизвестных $z_{i_k}^0, y_k^0$. Так, в нулевом приближении имеем

$$R_0 = R(z_{10}^0, \bar{z}_{20}(0) + P_0 z_2(0), y_0^0; \bar{z}_{10}(1) + Q_0 z_1(0), z_{20}^0, \bar{y}_0(1)) = 0.$$

Это система $m+2$ уравнений с $m+2$ неизвестными $z_{10}^0, z_{20}^0, y_0^0$, поскольку, согласно изложенному в п. 3, $P_0 z_2(0)$ зависит от z_{10}^0, y_0^0 ; $Q_0 z_1(0)$ зависит от z_{20}^0, y_0^0 , а $\bar{y}_0(1)$ зависит от y_0^0 .

Будем считать, что эта система разрешима и соответствующий функциональный определитель отличен от нуля. Оказывается, тогда будут разрешимы все последующие уравнения $R_k=0$ и тем самым будут определены все коэффициенты в (25).

Можно показать, что в окрестности точки $(z_{10}^0, z_{20}^0, y_0^0)$ существует единственная точка $(z_1^0(\mu), z_2^0(\mu), y^0(\mu))$ такая, что решение системы (1) с краевыми условиями $z_1(0, \mu) = z_1^0(\mu), z_2(1, \mu) = z_2^0(\mu), y(0, \mu) = y^0(\mu)$ будет являться решением краевой задачи (1), (24), а построенное разложение решения задачи (1) — (3), где z_i^0, y^0 задаются формулой (25), будет асимптотическим рядом для решения краевой задачи (1), (24) при $\mu \rightarrow 0$ на отрезке $0 \leq t \leq 1$.

2) Результаты п. 1—5 обобщаются на случай произвольной размерности M вектор-функции z . При этом вместо требования II' должно выполняться требование

$$\operatorname{Re} \lambda_1(t) < 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_k(t) < 0; \operatorname{Re} \lambda_{k+1}(t) > 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_m(t) > 0, \quad (26)$$

а краевые условия для z должны состоять в том, что при $t=0$ задается k компонент вектор-функции z , а при $t=1$ — $M-k$ компонент z . Этот общий случай подробно изложен в [43].

Краевые условия вида (24) в этом случае можно исследовать способом, описанным в [67].

З а м е ч а н и е. Может возникнуть впечатление, что краевые задачи можно рассматривать только при условии II' или (26). Однако это не так. Имеется много краевых задач, решение которых существует и обладает погранслошной асимптотикой при условии, что $\lambda_i(t)$ удовлетворяют условию II из п. 4.2. При этом пограничный слой возникает только в окрестности точки $t=0$ (см. [43], § 13).

5.2. Внутренний переходный слой

1. Снова обратимся к тихоновской системе (1). Пусть уравнение $F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$ имеет несколько корней $\bar{z} = \varphi_i(\bar{y}, t)$. В этом случае наряду с решениями, рассмотренными в предыдущем пункте, в асимптотике которых «участвовал» один из корней, могут быть решения, в асимптотике которых «участвует» более одного корня, — решения с переходами с корня на корень, или, иначе говоря, решения с *внутренними переходными слоями*.

Проследим за этим явлением на примере системы, эквивалентной одному уравнению второго порядка $\mu^2 \frac{d^2 z}{dt^2} = F(z, t)$,

$$\mu \frac{dz_1}{dt} = F(z_2, t), \quad \mu \frac{dz_2}{dt} = z_1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (27)$$

с краевыми условиями

$$z_2(0, \mu) = 0, \quad z_2(1, \mu) = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим сначала автономную систему, получающуюся из (27), если в правой части (27) положить $t = T = \text{const}$ и сделать замену $t = \tau\mu$:

$$\frac{dz_1}{d\tau} = F(z_2, T) \equiv F(z_2), \quad \frac{dz_2}{d\tau} = z_1 \quad (29)$$

(это присоединенная система (см. п. 4.1), отвечающая (27) при $t = T$). Пусть функция $F(z_2)$ имеет три простых корня $z_2 = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$, причем $F_{z_2}(\varphi_i) > 0$, $i = 1, 3$, $F_{z_2}(\varphi_2) < 0$ (рис. 6). Введем фазовую плоскость (z_1, z_2) . Из (29) имеем

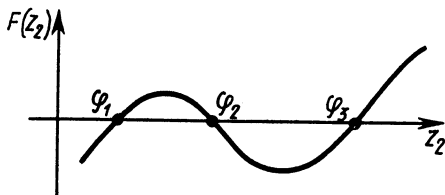


Рис. 6

$$\frac{z_1^2}{2} = \int_{\varphi_2}^{z_2} F(z) dz + c \equiv \Phi(z_2) + c,$$

откуда

$$z_1 = \pm \sqrt{2} \sqrt{\Phi(z_2) + c}. \quad (30)$$

В зависимости от функции $\Phi(z_2)$ семейство фазовых кривых (30) выглядит по-разному. Можно выделить три случая, для каждого из которых на рис. 7 представлены график $\Phi(z_2)$ и соответствующее семейство фазовых траекторий:

$$\text{а) } \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z) dz > \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} F(z) dz,$$

т. е. $\Phi(\varphi_1) < \Phi(\varphi_3)$;

$$\text{б) } \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z) dz < \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} F(z) dz,$$

т. е. $\Phi(\varphi_1) > \Phi(\varphi_3)$;

$$\text{в) } \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z) dz = \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} F(z) dz, \quad (31)$$

т. е. $\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_3)$. В этом случае седла A_1 и A_3 (рис. 7, в) оказываются соединенными сепаратрисами, т. е. имеет место так называемая ячейка.

2. Рассмотрим теперь систему (27).

I. Пусть функция $F(z_2, t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно в некоторой области D на плоскости (z_2, t) .

II. Пусть уравнение $F(z_2, t) = 0$ имеет три корня $z_2 = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что

1) $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \varphi_3(t)$ при $0 \leq t \leq 1$;

2) область $\{(z_2, t) : \varphi_1(t) \leq z_2 \leq \varphi_3(t), 0 \leq t \leq 1\}$ содержится в области D ;

3) $F_{z_2}(\varphi_i(t), t) > 0$ при $i = 1, 3$; $0 \leq t \leq 1$,
 $F_{z_2}(\varphi_2(t), t) < 0$ при $0 \leq t \leq 1$.

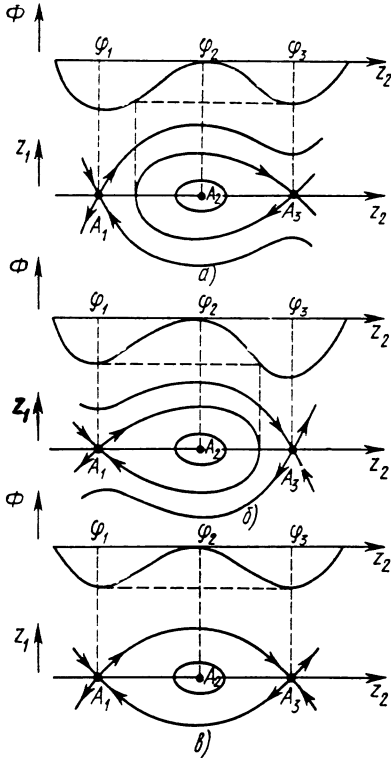


Рис. 7

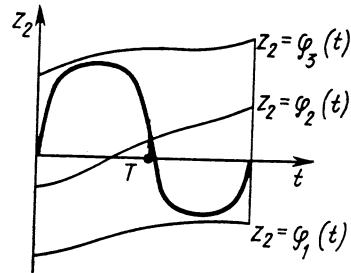


Рис. 8

Из условия II следует, что график $F(z_2, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ имеет вид такой, как на рис. 6. С изменением t этот график может деформироваться. Оказывается, явление перехода решения задачи (27), (28) с корня $\varphi_1(t)$ на корень $\varphi_3(t)$ или, наоборот, с $\varphi_3(t)$ на $\varphi_1(t)$ (оба эти корня условно устойчивые: $\lambda_{1,2}^{(i)} = \pm \sqrt{F_{z_2}(\varphi_i(t), t)}$, $i = 1, 3$) может наблюдаться, если при некотором значении $t = T$ на фазовой плоскости присоединенной системы, отвечающей значению $t = T$, имеет место ячейка. Образно говоря, для перехода с седла на седло между ними должен быть как бы «мост» в виде сепаратрисы (рис. 7, в).

К этому выводу можно прийти, пользуясь асимптотическими формулами п. 5.1. Покажем, что существует решение такого типа, как на рис. 8. Значение $t=T$, при котором $z_2=\varphi_2$, назовем *точкой перехода*.

Поступим следующим образом. Считая, что T — некоторое, не известное пока значение между $t=0$ и $t=1$, построим на отрезке $[0, T]$, пользуясь алгоритмом п. 5.1, асимптотическое разложение решения системы (27), удовлетворяющего условиям $z_2(0, \mu)=0$, $z_2(T, \mu)=\varphi_2(T)$ и стремящегося при $\mu \rightarrow 0$ к $\{0, \varphi_3(t)\}$. Другими словами, построим асимптотику решения, отвечающего левому полуциклу на рис. 8. Заметим, что на концах $t=0$ и $t=T$ задается одна и та же компонента z_2 (см. замечание перед теоремой 5.1).

Точно так же построим на отрезке $[T, 1]$ асимптотику решения системы (27), удовлетворяющего условиям $z_2(T, \mu)=\varphi_2(T)$, $z_2(1, \mu)=0$ и стремящегося при $\mu \rightarrow 0$ к $\{0, \varphi_1(t)\}$, т. е. решения, отвечающего правому полуциклу на рис. 8.

Приравнивая в точке T выражения для z_1 , отвечающие верхнему и нижнему полуциклам, получим уравнение для определения T . Заметим, что T , вообще говоря, есть функция μ и его следует искать в виде $T=T_0+\mu T_1+\dots$. Величина T_0 определяется из условия равенства членов нулевого приближения для z_1 . Ограничиваясь рассмотрением только нулевого приближения, мы индекс 0 у T_0 будем опускать: $T_0=T$.

3. Асимптотика решения, отвечающего левому полуциклу, с точностью порядка μ выражается следующими формулами (верхний индекс у пограничных функций означает номер отрезка, на которые разбит $[0, 1]$):

$$z_1(t, \mu) = \Pi_0^{(1)} z_1(\tau_0) + Q_0^{(1)} z_1(\tau_T) + O(\mu), \quad (32)$$

$$z_2(t, \mu) = \varphi_3(t) + \Pi_0^{(1)} z_2(\tau_0) + Q_0^{(1)} z_2(\tau_T) + O(\mu),$$

где $\tau_0 = \frac{t}{\mu} \geq 0$, $\tau_T = \frac{t-T}{\mu} \leq 0$, а $\Pi_0^{(1)} z_i$ и $Q_0^{(1)} z_i$ определяются как решения следующих задач:

$$\frac{d\Pi_0^{(1)} z_1}{d\tau_0} = F(\varphi_3(0) + \Pi_0^{(1)} z_2, 0), \quad \frac{d\Pi_0^{(1)} z_2}{d\tau_0} = \Pi_0^{(1)} z_1,$$

$$\Pi_0^{(1)} z_2(0) = -\varphi_3(0), \quad \Pi_0^{(1)} z_i(\infty) = 0, \quad i=1, 2;$$

$$\frac{dQ_0^{(1)} z_1}{d\tau_T} = F(\varphi_3(T) + Q_0^{(1)} z_2, T), \quad \frac{dQ_0^{(1)} z_2}{d\tau_T} = Q_0^{(1)} z_1, \quad (33)$$

$$Q_0^{(1)} z_2(0) = \varphi_2(T) - \varphi_3(T), \quad Q_0^{(1)} z_i(-\infty) = 0, \quad i=1, 2. \quad (34)$$

Аналогично, асимптотика решения системы (27), отвечающего правому полуциклу, имеет вид

$$z_1(t, \mu) = \Pi_0 z_1(\tau_T) + Q_0 z_1(\tau_1) + O(\mu), \quad (35)$$

$$z_2(t, \mu) = \varphi_1(t) + \Pi_0 z_2(\tau_T) + Q_0 z_2(\tau_1) + O(\mu),$$

где $\tau_T = \frac{t-T}{\mu} \geq 0$, $\tau_1 = \frac{t-1}{\mu} \leq 0$, а $\Pi_0 z_i$ и $Q_0 z_i$ определяются как решения задач

$$\frac{d\Pi_0 z_1}{d\tau_T} = F(\varphi_1(T) + \Pi_0 z_2, T), \quad \frac{d\Pi_0 z_2}{d\tau_T} = \Pi_0 z_1, \quad (36)$$

$$\Pi_0 z_2(0) = \varphi_2(T) - \varphi_1(T), \quad \Pi_0 z_i(\infty) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (37)$$

$$\frac{dQ_0 z_1}{d\tau_1} = F(\varphi_1(1) + Q_0 z_2, 1), \quad \frac{dQ_0 z_2}{d\tau_1} = Q_0 z_1,$$

$$Q_0 z_2(0) = -\varphi_1(1), \quad Q_0 z_i(-\infty) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Приравнивая в точке $t=T$ выражения (32) и (35) для z_1 и учитывая, что в этой точке $\Pi_0 z_i$ и $Q_0 z_i$ меньше любой степени μ , получим в нулевом приближении

$$Q_0 z_1(0) = \Pi_0 z_1(0). \quad (38)$$

Это и есть уравнение относительно T . Отметим, что равенство в точке $t=T$ выражений (32) и (35) для z_2 обеспечивается в нулевом приближении условиями (34) и (37).

Уравнение (38) запишем в ином виде. Для этого в (33), (34) произведем замену переменных $\tilde{z}_1 = Q_0 z_1$, $\tilde{z}_2 = \varphi_3(T) + Q_0 z_2$. В этих переменных задача (33), (34) примет вид

$$\frac{d\tilde{z}_1}{d\tau_T} = F(\tilde{z}_2, T), \quad \frac{d\tilde{z}_2}{d\tau_T} = \tilde{z}_1, \quad \tau_T \leq 0, \quad (39)$$

$$\tilde{z}_2(0) = \varphi_2(T), \quad \tilde{z}_1(-\infty) = 0, \quad \tilde{z}_2(-\infty) = \varphi_3(T).$$

Точно так же в (36), (37) произведем замену $\tilde{\tilde{z}}_1 = \Pi_0 z_1$, $\tilde{\tilde{z}}_2 = \varphi_1(T) + \Pi_0 z_2$. Получим

$$\frac{d\tilde{\tilde{z}}_1}{d\tau_T} = F(\tilde{\tilde{z}}_2, T), \quad \frac{d\tilde{\tilde{z}}_2}{d\tau_T} = \tilde{\tilde{z}}_1, \quad \tau_T \geq 0, \quad (40)$$

$$\tilde{\tilde{z}}_2(0) = \varphi_2(T), \quad \tilde{\tilde{z}}_1(\infty) = 0, \quad \tilde{\tilde{z}}_2(\infty) = \varphi_1(T).$$

В новых переменных уравнение (38) примет вид

$$\dot{\tilde{z}}_1(0) = \tilde{z}_1(0). \quad (41)$$

Очевидно, как (39), так и (40) с точностью до обозначений представляют собой систему (29). Предположим, что ей отвечает фазовая картина рис. 7, а. Тогда значению $\tilde{z}_2(0) = \varphi_2(T)$ на сепаратрисе, идущей при $\tau_T \rightarrow -\infty$ в седло $(0, \varphi_3(T))$, отвечает точка А, а значению $\tilde{z}_2(0) = \varphi_2(T)$ на сепаратрисе, идущей при $\tau_T \rightarrow \infty$ в седло $(0, \varphi_1(T))$, отвечает точка В, не совпадающая с точкой А (рис. 9). Таким образом, условие (41) не выполняется. Точно так же (41) не будет выполняться, если имеет место фазовая картина рис. 7, б. Лишь фазовая картина рис. 7, в обеспечивает нужное равенство. Итак, T действительно должно быть таким значением t , при котором на фазовой плоскости присоединенной системы образуется ячейка. Условие существования такого T будет сформулировано ниже в виде требования IV после приведения уравнения (41) к надлежащему виду.

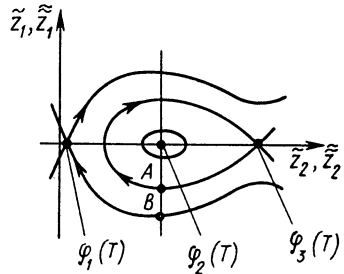


Рис. 9

Кроме того, для реализации каждого полуцикла фазовые картины присоединенных систем при $t=0$ и $t=1$ должны удовлетворять определенным условиям, соответствующим требованиям III' и III'' п. 5.1. Эти условия можно сформулировать следующим образом:

III'. Пусть на фазовой плоскости присоединенной системы $\frac{d\tilde{z}_1}{d\tau_0} = F(\tilde{z}_2, 0)$, $\frac{d\tilde{z}_2}{d\tau_0} = \tilde{z}_1$ прямая $\tilde{z}_2=0$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $(0, \varphi_3(0))$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$.

III''. Пусть на фазовой плоскости присоединенной системы $\frac{d\tilde{z}_1}{d\tau_1} = F(\tilde{z}_2, 1)$, $\frac{d\tilde{z}_2}{d\tau_1} = \tilde{z}_1$ прямая $\tilde{z}_2=0$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $(0, \varphi_1(1))$ при $\tau_1 \rightarrow -\infty$.

Запишем теперь уравнение (41) в другой форме. Сепаратриса системы (39), входящая в седло $(0, \varphi_3(T))$ при $\tau_T \rightarrow -\infty$, описывается уравнением

$$\tilde{z}_1 = -\sqrt{2} \sqrt{\int_{\varphi_3(T)}^{\tilde{z}_1} F(z, T) dz}, \quad (42)$$

а сепаратриса системы (40), входящая в седло $(0, \varphi_1(T))$ при

$\tau_T \rightarrow \infty$, — уравнением

$$\bar{z}_1 = -\sqrt{2} \sqrt{\int_{\varphi_1(T)}^{\bar{z}_2} F(z, T) dz} \quad (43)$$

Подставляя эти выражения в (41), получим уравнение для T в виде

$$\int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_2(T)} F(z, T) dz = \int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)} F(z, T) dz, \quad (44)$$

что совпадает с условием ячейки (31).

IV. Пусть уравнение (44) имеет решение $T=T_0$, причем $0 < T_0 < 1$.

Для построения асимптотики более высокого порядка, а также для доказательства существования решения такого типа, как на рис. 8, требуется еще одно условие (см. [43]).

$$V. \quad \left. \frac{d}{dT} \int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_1(T)} F(z, T) dz \right|_{T=T_0} \neq 0.$$

Теорема 5.2. Если выполнены условия I—V, то при достаточно малых μ существует решение краевой задачи (27), (28), для которого

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z_2(t, \mu) = \begin{cases} \varphi_3(t) & \text{при } 0 < t < T_0, \\ \varphi_1(t) & \text{при } T_0 < t < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z_1(t, \mu) = 0 \quad \text{при } 0 < t < T_0, \quad T_0 < t < 1.$$

4. Замечания. 1) Наряду с описанным может существовать решение, у которого $z_2(t, \mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ стремится к $\varphi_1(t)$ на $(0, T_0)$ и к $\varphi_3(t)$ на $(T_0, 1)$.

2) Если при нескольких значениях T из интервала $(0, 1)$ образуется ячейка у присоединенной системы (29), то может существовать решение с несколькими переходными слоями.

3) Указанные решения могут сосуществовать друг с другом, а также с решениями без переходного слоя, описанными в п. 5.1, так что решение задачи (27), (28) в целом не единственно.

4) Результаты обобщаются на случай тихоновской системы, содержащей как «быстрые» (функция z), так и «медленные» переменные (функция y).

5) Возможен случай, когда в системе (29) ячейка имеет место при любом T . Оказывается, и в этом случае возможно решение такого типа, как на рис. 8. Уравнение для определения T_0 будет более сложным, чем (44) ((44) при этом обращается в тождество).

дество), а именно (формула написана для случая $\varphi_2(t) \equiv 0$):

$$\dot{\varphi}_i(T) + \frac{1}{\left[2 \int_{\varphi_i(T)}^0 F(z, T) dz \right]^{1/2}} \times$$

$$\times \int_0^{\varphi_i(T)} \frac{\int_{\varphi_i(T)}^z [\dot{\varphi}_i(T) F_z(z, T) + F_t(z, T)] dz}{\left[2 \int_{\varphi_i(T)}^z F(z, T) dz \right]^{1/2}} dz \Bigg|_{t=1}^{t=3} = 0. \quad (45)$$

Это уравнение получено в [39].

Уравнение (45) обращается в тождество, если система (27) автономна, т. е. $F = F(z_2)$ (не зависит от t). В этом случае при изменении малого параметра μ меняется только скорость движения вдоль траектории на фазовой плоскости, а сами траектории не изменяются.

Пусть на фазовой плоскости автономной системы имеется ячейка (рис. 10). Рассмотрим траекторию, которой отвечает замкнутый цикл внутри этой ячейки. Если фиксировать время обращения (время прохождения цикла), то при $\mu \rightarrow 0$ цикл будет приближаться к границе ячейки и в пределе будет состоять из отрезков сепаратрис.

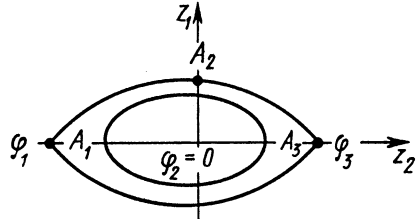


Рис. 10

Если задать краевые условия (28), то может существовать решение, отвечающее части цикла, лежащей справа от оси z_1 (кривая 1 на рис. 11, а изображает зависимость z_2 от t для этого решения), и может существовать решение, отвечающее части цикла, лежащей слева от оси z_1 (на рис. 11, а этому решению соответствует кривая 2). Теория п. 5.1 здесь полностью применима.

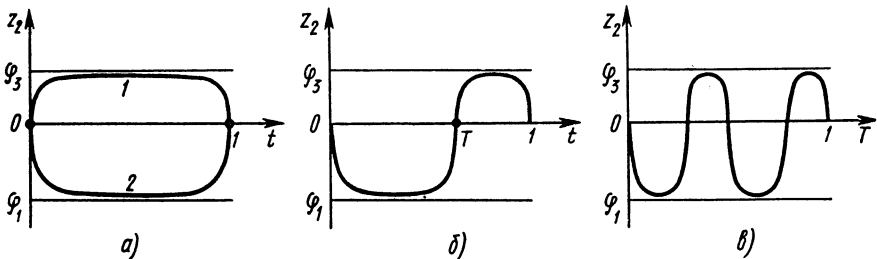


Рис. 11

Однако наряду с этим может существовать решение с переходом от φ_1 к φ_3 , которому отвечает полный оборот по циклу (рис. 11, б). Чтобы найти точку перехода T с точностью порядка μ , можно провести приближенный расчет, считая, что движение происходит почти по сепаратрисе (μ мало!). Движение вдоль сепаратрис описывается уравнениями (используем формулы (42), (43))

$$\frac{dz_2}{d\tau} = \pm \sqrt{2} \sqrt{\Phi(z_2) - \Phi(\varphi_3)},$$

где $\Phi(z) = \int_0^z F(z) dz$ и $\Phi(\varphi_3) = \Phi(\varphi_1)$ (условие существования

ячейки). Время τ_1 движения по участку, близкому к участку A_1A_2 сепаратрисы (рис. 10), и время τ_2 движения по участку, близкому к участку A_2A_3 сепараторы, вычисляются по формулам

$$\tau_1 = - \int_0^{\varphi_1 + \delta} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z) - \Phi(\varphi_1)}}, \quad \tau_2 = \int_0^{\varphi_3 - \delta} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z) - \Phi(\varphi_3)}}.$$

Пользуясь этими формулами, можно установить, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\tau_1}{\tau_2} = \lambda_3/\lambda_1$, где $\lambda_i = \sqrt{F_z(\varphi_i)}$, $i=1, 3$. Отсюда следует, что отношение длин отрезков $[0, T]$ и $[T, 1]$ (рис. 11, б) равно $\frac{T}{1-T} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ и, значит, $T = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_1}$. Это соотношение было получено в [54] для

произвольной системы двух уравнений.

Очевидно, могут реализоваться также решения, отвечающие нескольким оборотам по циклу (любому фиксированному числу оборотов). На рис. 11, в изображен случай двух оборотов.

б) Если на фазовой плоскости имеется петля, как на рис. 6, а, б, то может существовать решение с внутренним переходным слоем типа «всплеска» [55, 16, 17]. Подробно мы на этом останавливаться здесь не будем, так как в следующем параграфе будет рассмотрено явление «всплеска» для более сложной системы уравнений, чем (27).

§ 6. Решения типа контрастных структур

6.1. Постановка задачи и алгоритм построения асимптотического разложения решения

1. В последнее время внимание многих исследователей в различных областях естествознания привлекают явления возникновения *пространственных и временных структур*. Обширная библиография по этому вопросу содержится в [95, 98, 102, 116].

При этом в качестве математической модели часто рассматривают систему двух диффузионных уравнений, которая в одномерном случае имеет вид

$$u_t = D_1 u_{xx} - f(u, v), \quad v_t = D_2 v_{xx} - g(u, v).$$

При $D_1 \ll D_2$ в этой системе могут возникать контрастные пространственные структуры, характеризующиеся сочетанием участков плавного и резкого изменения переменной u (рис. 12). Такие



Рис. 12

структуры описываются соответствующей стационарной системой, которую, полагая $D_1 = \mu^2$ ($\mu > 0$ — малый параметр), $D_2 = 1$, запишем в виде

$$\mu^2 u'' = f(u, v), \quad v' = g(u, v). \quad (1)$$

Систему (1) будем рассматривать на отрезке $0 \leq x \leq l$ с краевыми условиями

$$u'(0) = u'(l) = v'(0) = v'(l) = 0 \quad (2)$$

(можно брать и другие краевые условия).

Ниже будет построено асимптотическое разложение решения задачи (1), (2), представляющего собой контрастную пространственную структуру. В процессе построения будут выявлены три типа точек x_* , вблизи которых происходит резкое изменение («всплеск») переменной u . Первый тип точек «всплеска» рассматривается в п. 6.1, 6.2, второй — в п. 6.3, третий — в п. 6.4, 6.5. Мы ограничимся здесь только алгоритмом построения асимптотики и не затрагиваем вопросы существования решения задачи (1), (2) вблизи построенной асимптотики. Всюду далее считаем функции f и g достаточно гладкими.

Для простоты изложения будем рассматривать случай, когда решение задачи (1), (2) имеет на отрезке $[0, l]$ только одну точку x_* , $0 < x_* < l$, вблизи которой происходит «всплеск» функции $u(x, \mu)$ (рис. 13). Случай нескольких таких точек исследуется аналогично.

Будем считать, что x_* — это точка, в которой функция u достигает экстремума. Тогда

$$u'(x_*, \mu) = 0. \quad (3)$$

Само значение x_* представим в виде

$$x_* = x_0 + \mu x_1 + \dots + \mu^k x_k + \dots \quad (4)$$

Одна из стоящих перед нами задач состоит в определении x_* , т. е. в нахождении коэффициентов x_k .

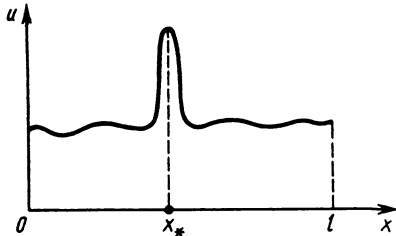


Рис. 13

2. С помощью метода, описанного в п. 5.1, будем строить асимптотику решения задачи (1), (2) отдельно на отрезках $0 \leq x \leq x_*$ и $x_* \leq x \leq l$, производя одновременно «сшивание» в точке x_* . При $0 \leq x \leq x_*$ асимптотическое разложение решения ищем в виде

$$u = \bar{u}_0(x) + \mu \bar{u}_1(x) + \dots + \mu \Pi_1 u(\tau_0) + \dots + Q_0 u(\tau) + \mu Q_1 u(\tau) + \dots, \quad (5)$$

$$v = \bar{v}_0(x) + \mu \bar{v}_1(x) + \dots + \mu^3 \Pi_3 v(\tau_0) + \dots + \mu^2 Q_2 v(\tau) + \dots,$$

где $\tau_0 = x/\mu$, $\tau = (x - x_*)/\mu$. Функции \bar{u}_i , \bar{v}_i составляют регулярную часть асимптотики; функции Π_i описывают погранслои вблизи точки $x=0$ (так как условия (2) задают на концах значения не самих функций u и v , а их производных, то Π -функции для быстрой переменной u начинаются с члена порядка μ , а для медленной переменной v — с члена порядка μ^3); функции Q_i (и прежде всего главный член $Q_0 u$) описывают быстрое изменение решения вблизи точки x_* слева от нее. Как и в п. 5.1, на Π - и Q -функции накладываем требование $\Pi_i(+\infty) = 0$, $Q_i(-\infty) = 0$.

При $x_* \leq x \leq l$ асимптотика имеет аналогичный вид:

$$u = \bar{u}_0(x) + \mu \bar{u}_1(x) + \dots + P_0 u(\tau) + \mu P_1 u(\tau) + \dots + \mu R_1 u(\tau_1) + \dots, \quad (6)$$

$$v = \bar{v}_0(x) + \mu \bar{v}_1(x) + \dots + \mu^2 P_2 v(\tau) + \dots + \mu^3 R_3 v(\tau_1) + \dots,$$

где $\tau_1 = (x - l)/\mu$.

Подставляя (5) в уравнения (1) краевые условия (2) при $x=0$ и условие (3), представляя далее функции f и g в виде, аналогичном (5), например $f = \bar{f} + \Pi f + Q f$ (см. (5) в п. 5.1), стандартным способом получаем уравнения для членов асимптотики (5). Подобным же образом получаются уравнения для членов рядов (6).

3. Для \bar{u}_0 , \bar{v}_0 имеем систему уравнений

$$f(\bar{u}_0, \bar{v}_0) = 0, \quad \bar{v}_0' = g(\bar{u}_0, \bar{v}_0). \quad (7)$$

I. Пусть уравнение $f(u, v) = 0$ имеет два решения относительно u при $v \in I$ (I — некоторый интервал):

$$u = \varphi(v), \quad u = \chi(v)$$

(пусть для определенности $\varphi(v) < \chi(v)$), причем

$$f_u(\varphi(v), v) > 0, \quad f_u(\chi(v), v) < 0 \quad (8)$$

(заметим, что могут быть и другие решения, но в построении асимптотики будут участвовать два названных). Кроме того, пусть существует такая функция $\psi(v)$ (рис. 14), что

$$\int_{\varphi(v)}^{\psi(v)} f(u, v) du = 0. \quad (9)$$

Положим $\bar{u}_0 = \varphi(\bar{v}_0)$. Тогда для \bar{v}_0 имеем уравнение

$$\bar{v}_0'' = g(\varphi(\bar{v}_0), \bar{v}_0). \quad (10)$$

Учитывая вид асимптотики (5) и (6), получаем для \bar{v}_0 краевые условия

$$\bar{v}_0'(0) = \bar{v}_0'(l) = 0, \quad (11)$$

а условие непрерывности $v(x, \mu)$ и $v'(x, \mu)$ в точке x_* в нулевом приближении приводит к равенствам $\bar{v}_0(x_0-0) = \bar{v}_0(x_0+0)$, $\bar{v}_0'(x_0-0) = \bar{v}_0'(x_0+0)$. Поэтому $\bar{v}_0(x)$ можно определить сразу на всем отрезке $[0, l]$ как решение задачи (10), (11). При этом указанные равенства для \bar{v}_0 и \bar{v}_0' в точке x_0 будут выполнены.

Могут представиться следующие случаи, требующие отдельного рассмотрения:

II. Задача (10), (11) имеет непостоянное решение $\bar{v}_0 = \bar{v}_0(x)$.

II'. Задача (10), (11) имеет постоянное решение $\bar{v}_0 = \text{const}$. Первый случай рассматривается в п. 6.1—6.3, второй — в п. 6.4, 6.5.

Итак, пусть выполнено условие II. Тогда $\bar{v}_0 = \bar{v}_0(x)$, $\bar{u}_0 = \varphi(\bar{v}_0(x))$.

4. Для $Q_0 u$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 Q_0 u}{d\tau^2} = f(\bar{u}_0(x_0) + Q_0 u, \bar{v}_0(x_0)), \quad -\infty < \tau \leq 0, \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$Q_0' u(0) = 0, \quad Q_0 u(-\infty) = 0 \quad (13)$$

(первое следует из (3)).

Заметим, что хотя $\bar{v}_0(x)$ и $\bar{u}_0(x)$ — известные функции, однако точка x_0 пока не известна и потому в уравнение (12) входят неизвестные величины $\bar{v}_0(x_0)$ (обозначим ее для краткости через v_0) и $\bar{u}_0(x_0) = \varphi(v_0) \equiv \varphi_0$.

В силу (8) точка покоя $Q_0 u = 0$ уравнения (12) является седлом. На фазовой плоскости сепаратриса, выходящая из седла, обходит вокруг другой точки покоя ($x_0 - \varphi_0$), которая является центром, и снова возвращается в седло, т. е. образует петлю (на рис. 15 стрелки указывают направление возрастания τ). Верхняя часть этой сепаратрисы имеет уравнение

$$Q_0' u = \sqrt{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + Q_0 u} f(\xi, v_0) d\xi} \equiv \Phi(Q_0 u). \quad (14)$$

Решение этого дифференциального уравнения при $\tau \leq 0$ с начальным условием $Q_0 u(0) = \psi_0 - \varphi_0$ ($\psi_0 = \psi(v_0)$), где $\psi(v)$ — функция

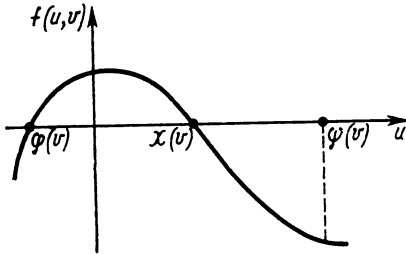


Рис. 14

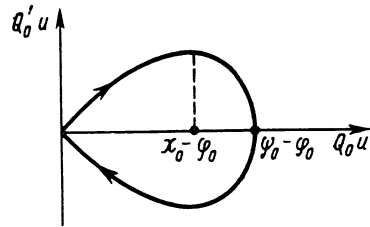


Рис. 15

из соотношения (9)) дает искомое нетривиальное решение задачи (12), (13). Это решение зависит от v_0 , как от параметра.

Точка покоя $Q_0 u = 0$ уравнения (14) является асимптотически устойчивой при $\tau \rightarrow -\infty$. Действительно, $\Phi'(Q_0 u) = f(\varphi_0 + Q_0 u, v_0) / \Phi(Q_0 u)$ и $\Phi'(0) = \sqrt{f_u(\varphi_0, v_0)} > 0$ в силу (8). Отсюда для $Q_0 u$ следует обычная для пограничных функций оценка

$$|Q_0 u(\tau)| \leq c \exp(\kappa \tau), \quad -\infty < \tau \leq 0. \quad (15)$$

Аналогично для $P_0 u$ получаем задачу

$$\frac{d^2 P_0 u}{d\tau^2} = f(\varphi_0 + P_0 u, v_0), \quad 0 \leq \tau < \infty,$$

$$P_0' u(0) = 0, \quad P_0 u(\infty) = 0.$$

Ее нетривиальное решение изображается на фазовой плоскости нижней частью сепаратрисы (рис. 15), имеющей уравнение

$$P_0' u = -\Phi(P_0 u).$$

Решение этого уравнения при $\tau \geq 0$ с начальным условием $P_0 u(0) = \psi_0 - \varphi_0$ и есть искомая функция $P_0 u(\tau)$. Для $P_0 u$ справедлива оценка $|P_0 u(\tau)| \leq c \exp(-\kappa \tau)$, $0 \leq \tau < \infty$.

Итак, построены члены асимптотики нулевого порядка, но точка x_0 пока не определена. Отметим, что условие непрерывности функции $u(x, \mu)$ в точке x_* в нулевом приближении выполнено: $\bar{u}_0(x_0-0) + Q_0 u(0) = \bar{u}_0(x_0+0) + P_0 u(0)$. Справедливость этого равенства следует из непрерывности функции $\bar{u}_0(x)$ в точке x_0 и равенства $Q_0 u(0) = P_0 u(0)$.

5. Для \bar{u}_1, \bar{v}_1 имеем систему уравнений

$$\bar{f}_u \cdot \bar{u}_1 + \bar{f}_v \cdot \bar{v}_1 = 0, \quad \bar{v}_1' = \bar{g}_u \bar{u}_1 + \bar{g}_v \bar{v}_1,$$

где $\bar{f}_u = f_u(\bar{u}_0(x), \bar{v}_0(x))$ (такой же смысл имеют обозначения $\bar{f}_v, \bar{g}_u, \bar{g}_v$). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\bar{f}_u^{-1} \bar{f}_v \bar{v}_1 = \varphi'(\bar{v}_0(x)) \bar{v}_1, \\ \bar{v}_1' &= A(x) \bar{v}_1, \end{aligned} \tag{16}$$

где $A(x) = \bar{g}_v + \bar{g}_u \varphi'(\bar{v}_0)$. Краевые условия на концах отрезка имеют вид

$$\bar{v}_1'(0) = \bar{v}_1'(l) = 0, \tag{17}$$

а из условия непрерывности v и v' в точке x_* получаем

$$\bar{v}_1(x_0-0) = \bar{v}_1(x_0+0), \quad \bar{v}_1'(x_0-0) + Q_2' v(0) = \bar{v}_1'(x_0+0) + P_2' v(0).$$

Таким образом, для нахождения $\bar{v}_1(x)$ нужно определить сначала $Q_2 v$ и $P_2 v$. Для $Q_2 v$ имеем задачу

$$\frac{d^2 Q_2 v}{d\tau^2} = Q_0 g \equiv g(\varphi_0 + Q_0 u(\tau), v_0) - g(\varphi_0, v_0), \quad Q_2 v(-\infty) = 0.$$

Отсюда находим

$$Q_2 v(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} ds \int_{-\infty}^s Q_0 g(\sigma) d\sigma, \quad Q_2' v(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} Q_0 g(\sigma) d\sigma.$$

Из этих формул, пользуясь экспоненциальной оценкой (15) для $Q_0 u(\tau)$ и, следовательно, такой же оценкой для $Q_0 g(\tau)$, нетрудно вывести оценку

$$|Q_2 v(\tau)| \leq c \exp(\kappa\tau), \quad -\infty < \tau \leq 0.$$

Так как, согласно (14), имеем $d\sigma = dQ_0 u(\sigma) / \Phi(Q_0 u(\sigma))$, то

$$Q_2' v(\tau) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + Q_0 u(\tau)} \frac{g(u, v_0) - g(\varphi_0, v_0)}{\Phi(u - \varphi_0)} du, \quad \text{откуда}$$

$$Q_2' v(0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{g(u, v_0) - g(\varphi_0, v_0)}{\Phi(u - \varphi_0)} du.$$

Таким же образом находим

$$Q_2 v(0) = \int_{\varphi_0}^{\psi_0} \left[\int_{\varphi_0}^s \frac{g(u, v_0) - g(\varphi_0, v_0)}{\Phi(u - \varphi_0)} du \right] \frac{ds}{\Phi(s - \varphi_0)}.$$

Проделав аналогичную выкладку для $P_2 v$, приходим к равенствам

$$P_2 v(0) = Q_2 v(0), \quad P_2' v(0) = -Q_2' v(0).$$

Следовательно, для \bar{v}_1 имеем в точке x_0 условия

$$v_1(x_0 + 0) - \bar{v}_1(x_0 - 0) = 0, \quad \bar{v}_1'(x_0 + 0) - \bar{v}_1'(x_0 - 0) = 2Q_2' v(0). \quad (18)$$

Чтобы найти $\bar{v}_1(x)$, нужно решить линейное уравнение (16) с дополнительными условиями (17) и (18).

III. Пусть задача (16), (17) имеет только тривиальное решение.

Тогда, как нетрудно видеть, задача (16) — (18) для $\bar{v}_1(x)$ однозначно разрешима и тем самым определены $\bar{v}_1(x)$ и $\bar{u}_1(x)$, зависящие от не известного пока значения x_0 . Подчеркнем, что $\bar{v}_1(x)$ и $\bar{u}_1(x)$ имеют в точке x_0 разрыв производной.

6. Для $Q_1 u$ получаем задачу

$$\frac{d^2 Q_1 u}{d\tau^2} = f_u Q_1 u + f_1(\tau), \quad (19)$$

$$Q_1' u(0) = -u_0'(x_0) = -\varphi'(v_0) \bar{v}_0'(x_0), \quad Q_1 u(-\infty) = 0, \quad (20)$$

где $f_1(\tau) = (f_v + f_u \varphi'(v_0)) [\bar{v}_0'(x_0)(x_1 + \tau) + \bar{v}_1(x_0)]$, f_u и f_v вычисляются в точке $(\varphi_0 + Q_0 u(\tau), v_0)$, x_1 — коэффициент при u в разложении (4).

Заметим, что соответствующее (19) однородное уравнение имеет нетривиальное решение $Q_1 u = Q_0' u(\tau)$, удовлетворяющее условиям $Q_1 u(0) = 0$, $Q_1 u(-\infty) = 0$. В этом легко убедиться, проинтегрировав уравнение (12). Заметим также, что в силу (12) будем иметь $Q_0'' u(0) = f(\psi_0, v_0)$.

Умножив уравнение (19) на $Q_0' u(\tau)$ и проинтегрировав от $-\infty$ до 0, получим

$$\begin{aligned} Q_1 u(0) &= -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} \int_{-\infty}^0 f_1(\tau) Q_0' u(\tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} \int_{\varphi_0}^{\psi_0} [f_v(u, v_0) + f_u(u, v_0) \varphi'(v_0)] \times \\ &\times \left[\bar{v}_0'(x_0) \left(x_1 + \int_{\varphi_0}^u \frac{ds}{\Phi(s - \varphi_0)} \right) + \bar{v}_1(x_0) \right] du. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, если решение задачи (19), (20) существует, то его значение при $\tau=0$ вычисляется по этой формуле.

Чтобы доказать существование решения задачи (19), (20) и установить его экспоненциальное убывание при $\tau \rightarrow -\infty$, воспользуемся фундаментальной системой решений однородного уравнения (19). В качестве одного из нетривиальных решений можно взять указанное выше решение $Y_1 = Q_0' u(\tau) = \Phi(Q_0 u(\tau))$. Решение Y_2 , линейно независимое от Y_1 , определим следующим условием при $\tau = -1$: $Y_2(-1) = 0$, $Y_2'(-1) = 1/Y_1(-1)$. Тогда вронскиан $Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = 1$ и Y_2 можно представить по известной фор-

муле $Y_2 = Y_1(\tau) \int_{-1}^{\tau} ds / Y_1^2(s)$. Заметим, что это решение ограничено

при $\tau \rightarrow 0$ вместе с производной, причем $Y_2(0) = -1/f(\psi_0, v_0)$. Однако при $\tau \rightarrow -\infty$ это решение будет экспоненциально возрастающим. Нетрудно вычислить, что

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} Y_1(\tau) Y_2(\tau) = -\frac{1}{2 \sqrt{f_u(\varphi_0, v_0)}}.$$

Так как при $\tau \rightarrow -\infty$ для Y_1 справедливо соотношение $Y_1 = \sqrt{f_u(\varphi_0, v_0)} (Q_0 u + o(Q_0 u))$, то $Y_2 = -\frac{1}{2 f_u(\varphi_0, v_0) (Q_0 u + o(Q_0 u))}$.

Рассмотрим частное решение $\tilde{Q}_1 u$ неоднородного уравнения (19), положив

$$\tilde{Q}_1(u) = -Y_1(\tau) \int_0^{\tau} Y_2(\xi) f_1(\xi) d\xi + Y_2(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} Y_1(\xi) f_1(\xi) d\xi.$$

При этом условии (21) очевидно удовлетворяется.

Исследуем поведение $\tilde{Q}_1 u$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Заметим, что $f_1(\tau) = (Q_0 f_v + \varphi'(v_0) Q_0 f_u)[\bar{v}_0'(x_0)(x_1 + \tau) + \bar{v}_1(x_0)]$ и, следовательно, $|f_1(\tau)| \leq (c_1 + c_2 |\tau|) Q_0 u(\tau)$, где c_1 и c_2 — некоторые постоянные.

Так как $|Y_2(\tau)| \leq \frac{c}{Q_0 u(\tau)}$, то интеграл в первом слагаемом $\tilde{Q}_1 u$

растет не более чем степенным образом по τ , а так как $Y_1(\tau)$ экспоненциально стремится к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$, то и все первое слагаемое в $\tilde{Q}_1 u$ экспоненциально стремится к нулю при $\tau \rightarrow -\infty$.

Во втором слагаемом $\tilde{Q}_1 u$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\tau} Y_1(\xi) f_1(\xi) d\xi \right| &\leq \int_0^{Q_0 u} (c_1 + c_2 |\xi|) Q_0 u \cdot dQ_0 u \leq \\ &\leq c \int_0^{Q_0 u} (Q_0 u)^{1-\gamma} dQ_0 u \leq c (Q_0 u)^{2-\gamma}, \quad 2-\gamma > 1. \end{aligned}$$

Произведение этой величины на $Y_2(\tau)$ ($|Y_2| \leq \frac{c}{Q_0\mu}$) также экспоненциально мало.

Производная от $\tilde{Q}_1 u$ имеет вид

$$\tilde{Q}'_1 u = -Y'_1(\tau) \int_{\tau}^{\infty} Y_2(\xi) f_1(\xi) d\xi + Y'_2(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} Y_1(\xi) f_1(\xi) d\xi$$

и, следовательно, $\tilde{Q}'_1 u(0) = Y'_2(0) \int_{-\infty}^0 Y_1(\xi) f_1(\xi) d\xi \equiv p$.

Таким образом, построенное решение $\tilde{Q}_1 u$ уравнения (19) удовлетворяет условиям

$$\tilde{Q}'_1 u(0) = p, \quad \tilde{Q}_1 u(-\infty) = 0.$$

Чтобы получить решение, удовлетворяющее условиям (20), достаточно прибавить к $\tilde{Q}_1 u$ решение $Y_1 = Q_0' u$ однородного уравнения с коэффициентом $c = (-\varphi'(v_0) \bar{v}'_0(x_0) - p) / f(\psi_0, v_0)$. Итак,

$$Q_1 u = \tilde{Q}_1 u + c Q_0' u.$$

Аналогично исследуется задача для $P_1 u$ и получается равенство

$$P_1 u(0) = -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} \int_{\varphi_0}^{\psi_0} [f_v(u, v_0) + f_u(u, v_0) \varphi'(v_0)] \times \\ \times \left[\bar{v}'_0(x_0) \left(x_1 - \int_{\varphi_0}^u \frac{ds}{\Phi(s - \varphi_0)} \right) + \bar{v}_1(x_0) \right] du.$$

7. Условие непрерывности $u(x, \mu)$ в точке x_* в первом приближении дает уравнение $\bar{u}_1(x_0 - 0) + Q_1 u(0) = \bar{u}_1(x_0 + 0) + P_1 u(0)$, а так как $\bar{u}_1(x)$ непрерывна в точке x_0 , то $Q_1 u(0) = P_1 u(0)$. Отсюда, используя выражения для $Q_1 u(0)$ и $P_1 u(0)$, получаем уравнение

$$F(v_0) \cdot \bar{v}'_0(x_0) = 0, \quad (22)$$

где

$$F(v_0) = \int_{\varphi(v_0)}^{\psi(v_0)} [f_v(u, v_0) + f_u(u, v_0) \varphi'(v_0)] \left(\int_{\psi(v_0)}^u \frac{ds}{\Phi(s - \varphi(v_0))} \right) du. \quad (23)$$

Уравнение (22) распадается на два уравнения: $F(v_0) = 0$ и $\bar{v}'_0(x_0) = 0$. В соответствии с этим будем различать два типа точек x_* .

8. Рассмотрим первый тип точек «всплеска».

IV. Пусть уравнение $F(v_0) = 0$ имеет решение $v_0 = v_0^0$ и пусть $F'(v_0^0) \neq 0$.

Для отыскания x_0 получаем теперь уравнение

$$\bar{v}_0(x_0) = v_0^0.$$

V. Пусть это уравнение имеет решение $x_0 \in (0, l)$ и пусть $\bar{v}_0'(x_0) \neq 0$.

Зная x_0 , найдем окончательно $Q_0u, P_0u, Q_2v, P_2v, \bar{v}_1(x), \bar{u}_1(x)$, а в Q_1u и P_1u входит линейно не известное пока значение x_1 .

На следующем шаге аналогично определим последовательно функции $Q_3v, P_3v, \bar{u}_2, \bar{v}_2$ (они зависят от x_1) и Q_2u, P_2u (они зависят от x_1 и x_2). Из условия непрерывности $u(x, \mu)$ в точке x_* получаем уравнение $Q_2u(0) = P_2u(0)$. Несложный, но достаточно громоздкий расчет показывает, что это уравнение приводится к виду

$$F'(v_0^0) \bar{v}_0'(x_0) x_1 = k_1, \quad (24)$$

где k_1 — известное число. Так как $F'(v_0^0) \bar{v}_0'(x_0) \neq 0$, то отсюда однозначно определяется x_1 , что позволяет найти окончательно $Q_1u, P_1u, Q_3v, P_3v, \bar{v}_2$ и \bar{u}_2 , а в Q_2u и P_2u входит линейно не известное пока значение x_2 . Отметим, что \bar{v}_2 и \bar{u}_2 разрывны в точке x_0 .

Аналогичные (24) уравнения для $x_i, i=2, 3, \dots$, получаются в следующих приближениях, и описанная процедура повторяется.

Пограничные функции Π_i и R_i определяются стандартным способом. Например, для $\Pi_1u(\tau_0)$ получается уравнение

$$\frac{d^2 \Pi_1 u}{d\tau_0^2} = \bar{f}_u(0) \Pi_1 u$$

с краевыми условиями

$$\Pi_1 u(0) = -\bar{u}'_0(0), \quad \Pi_1 u(\infty) = 0,$$

где $\bar{f}_u(0) = f_u(\bar{u}_0(0), \bar{v}_0(0))$. Но $\bar{u}'_0(0) = \varphi'(\bar{v}_0(0)) \bar{v}_0'(0) = 0$ в силу (11). Поэтому $\Pi_1 u = 0$.

Для $\Pi_3v(\tau_0)$ имеем уравнение

$$\frac{d^2 \Pi_3 v}{d\tau_0^2} = \bar{g}_u(0) \Pi_1 u,$$

откуда, учитывая, что $\Pi_1 u = 0$, получаем $\Pi_3 v = 0$.

Продолжая процесс, находим, что все $\Pi_i u, i \geq 1$, и $\Pi_i v, i \geq 3$, тождественно равны нулю. Функции R_i , которые определяются аналогично Π -функциям, точно так же тождественно равны нулю.

6.2. Оценка по невязке

Пусть определены x_0, x_1, \dots, x_n и найдены члены рядов (5) и (6) до номера n включительно, а кроме того, определены $Q_i v$ и $P_i v$ при $i=n+1, n+2$. Напомним, что \bar{u}_i, \bar{v}_i оказываются разрывными в точке x_0 при $i \geq 2$.

Введем обозначение $X_n = \sum_{k=0}^n \mu^k x_k$ и положим $\tau' = \frac{x - X_n}{\mu}$. Будем использовать разложение (5) при $0 \leq x \leq$

X_n , а разложение (6) при $X_n \leq x \leq l$, заменив аргумент τ у Q - и P -функций на τ' и, кроме того, «передвинув» разрыв функций \bar{u}_i, \bar{v}_i из точки x_0 в точку X_n . Это можно сделать следующим образом.

Пусть, например, $X_n > x_0$. В этом случае изменим функцию \bar{v}_i на промежутке $x_0 \leq x < X_n$, определив ее на этом промежутке как решение дифференциального уравнения для \bar{v}_i с начальными значениями \bar{v}_i и \bar{v}_i' в точке x_0 , равными $\bar{v}_i(x_0 - 0)$ и $\bar{v}_i'(x_0 - 0)$. Измененная таким образом функция \bar{v}_i (а также \bar{u}_i , выраженная через \bar{v}_i по известной формуле) будет иметь разрыв уже не в точке x_0 , а в точке X_n .

Обозначим n -е частичные суммы разложений (5) и (6) через U_n и V_n :

$$U_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \mu^k (\bar{u}_k(x) + Q_k u(\tau')), & 0 \leq x < X_n, \\ \sum_{k=0}^n \mu^k (\bar{u}_k(x) + P_k u(\tau')), & X_n \leq x \leq l, \end{cases}$$

V_n имеет аналогичный вид. Положим

$$\tilde{V}_n = \begin{cases} V_n + \mu^{n+1} Q_{n+1} v(\tau') + \mu^{n+2} Q_{n+2} v(\tau'), & 0 \leq x < X_n, \\ V_n + \mu^{n+1} P_{n+1} v(\tau') + \mu^{n+2} P_{n+2} v(\tau'), & X_n \leq x \leq l. \end{cases}$$

Из самого способа построения U_n и \tilde{V}_n следует, что они удовлетворяют уравнениям (1) с точностью порядка μ^{n+1} во всех точках отрезка $0 \leq x \leq l$, кроме точки X_n :

$$\mu^2 U_n'' - f(U_n, \tilde{V}_n) = O(\mu^{n+1}), \quad \tilde{V}_n'' - g(U_n, \tilde{V}_n) = O(\mu^{n+1}) \quad (25)$$

(если вместо \tilde{V}_n взять V_n , то правая часть во втором равенстве будет величиной $O(\mu^{n+1} + \mu^{n-1} \exp(-\chi|\tau'|))$).

В точке X_n функции U_n и \tilde{V}_n разрывны, причем

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= U_n(X_n + 0) - U_n(X_n - 0) = O(\mu^{n+1}), \\ \sigma_1 &= U_n'(X_n + 0) - U_n'(X_n - 0) = O(\mu^n), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\tilde{V}_n(X_n+0) - \tilde{V}_n(X_n-0) = O(\mu^{n+1}),$$

$$\tilde{V}'_n(X_n+0) - \tilde{V}'_n(X_n-0) = O(\mu^{n+1}).$$

Из (25), используя равенства (26), получим

$$\sigma_2 = U_n^*(X_n+0) - U_n^*(X_n-0) = \frac{1}{\mu_2} [f(U_n(X_n+0), \tilde{V}_n(X_n+0)) - f(U_n(X_n-0), \tilde{V}_n(X_n-0))] + O(\mu^{n+1}) = O(\mu^{n-1})$$

и, аналогично, $\tilde{V}_n''(X_n+0) - \tilde{V}_n''(X_n-0) = O(\mu^{n+1})$.

Введем функцию

$$\tilde{u}(\tau') = \begin{cases} (A\tau'^2 + B\tau' + C) \exp(\tau'), & \tau' < 0, \\ 0 & \tau' \geq 0, \end{cases}$$

где коэффициенты A, B, C выберем так, чтобы $\tilde{u}(-0) = \sigma_0$, $\tilde{u}'(-0) = \mu\sigma_1$, $\tilde{u}''(-0) = \mu^2\sigma_2$. Для этого нужно взять $C = \sigma_0$, $B = \mu\sigma_1 - C$, $A = \frac{1}{2}(\mu^2\sigma_2 - 2B - C)$. Очевидно, A, B и C — величины порядка μ^{n+1} , поэтому $\tilde{u} = O(\mu^{n+1})$, а также $\tilde{u}' = O(\mu^{n+1})$, $\tilde{u}'' = O(\mu^{n+1})$ при $\tau' \neq 0$. Положим

$$\tilde{U}_n = \begin{cases} U_n + \tilde{u}, & 0 \leq x < X_n, \\ U_n, & X_n \leq x \leq l. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{U}_n \in C^2[0, l]$. «Подправляя» аналогичным образом \tilde{V}_n , получим $\tilde{V}_n \in C^2[0, l]$.

Основной результат теперь можно сформулировать следующим образом.

Теорема 6.1. *Если выполнены условия I—V, то функции \tilde{U}_n, \tilde{V}_n удовлетворяют системе уравнений (1) с точностью порядка μ^{n+1} на всем отрезке $0 \leq x \leq l$ и с такой же точностью удовлетворяют граничным условиям (2).*

6.3. Второй тип точек «всплеска»

Второй тип точек x_* связан с уравнением $\bar{v}_0'(x_0) = 0$ (см. (22)).

IV_1 . Пусть уравнение $\bar{v}_0'(x_0) = 0$ имеет решение $x_0 \in (0, l)$ и пусть $F(\bar{v}_0(x_0)) \neq 0$, $\bar{v}_0''(x_0) \neq 0$.

В этом случае, как показывает вид функции $f_1(\tau)$ из уравнения (19), Q_1u (и также P_1u) не зависит от x_1 и, следовательно, после того как найдено x_0 , полностью определяются $Q_0u, P_0u, Q_1u, P_1u, Q_2v, P_2v, Q_3v, P_3v, \bar{u}_1, \bar{v}_1$.

На следующем шаге получаем для x_1 уравнение $Q_2u(0) = P_2u(0)$, которое приводится к виду

$$F(\bar{v}_0(x_0)) \cdot \bar{v}_0''(x_0) x_1 = k_1, \quad (27)$$

где k_1 — известное число. В силу IV_1 это уравнение однозначно определяет x_1 , что дает возможность найти $\bar{u}_2, \bar{v}_2, Q_2u, P_2u, Q_4v, P_4v$.

Далее процедура повторяется. Для $x_i (i \geq 2)$ получаются уравнения типа (27). Функции \bar{u}_i, \bar{v}_i снова оказываются разрывными в точке x_0 при $i \geq 2$. Функции \bar{U}_n и \bar{V}_n , построенные так же, как в п. 6.2, при условиях I, II, III, IV_1 удовлетворяют системе уравнений (1) на отрезке $[0, l]$ и краевым условиям (2) с точностью порядка μ^{n+1} .

6.4. Третий тип точек «всплеска»

1. Рассмотрим теперь случай, когда выполнено условие II' : задача (10), (11) имеет постоянное решение $\bar{v}_0 = v_0 = \text{const}$, причем $v_0 \in I$ (I — интервал из требования I). В этом случае $\bar{u}_0 = \varphi(v_0) = \varphi_0 = \text{const}$, $f(\varphi_0, v_0) = 0$, $g(\varphi_0, v_0) = 0$, т. е. точка (φ_0, v_0) является точкой покоя системы (1). Заметим, что решение $u = \varphi_0, v = v_0$ удовлетворяет также краевым условиям (2). Однако нас интересует другое решение задачи (1), (2), а именно решение, имеющее вид (5), (6).

Функции Q_{0u} и P_{0u} определяются, как в п. 6.1, а так как теперь v_0 и φ_0 — известные величины, то Q_{0u} и P_{0u} полностью определены. Величина же x_0 остается пока не известной. Отметим также, что Q_{0u} и P_{0u} удовлетворяют соотношению

$$P_{0u}(\tau) = Q_{0u}(-\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (28)$$

2. Для \bar{v}_1 имеем уравнение (16) с условиями (17), (18), причем в данном случае $A = \bar{g}_v + \bar{g}_u \varphi'(v_0) = \text{const}$.

III' . Пусть $A = k^2 > 0$ (именно такой случай, как увидим в п. 6.5, имеет место для известной модели «брюсселятор»).

Решив задачу (16) — (18), для \bar{v}_1 получим выражение

$$\bar{v}_1(x) = q \begin{cases} \text{ch}(k(x_0 - l)) \text{ch}(kx), & 0 \leq x \leq x_0, \\ \text{ch}(kx_0) \text{ch}(k(x - l)), & x_0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (29)$$

где $q = -2Q_2'v(0)/k \text{sh}(kl)$ — известное число, а \bar{u}_1 , как и ранее, выражается через \bar{v}_1 : $\bar{u}_1 = \varphi'(v_0) \bar{v}_1$.

3. Для Q_{1u} имеем задачу (19), (20), причем теперь $f_1(\tau) = \bar{v}_1(x_0) h_1(\tau)$, где

$$h_1(\tau) = f_v(\varphi_0 + Q_{0u}(\tau), v_0) + f_u(\varphi_0 + Q_{0u}(\tau), v_0) \varphi'(v_0). \quad (30)$$

Существование решения $Q_{1u}(\tau)$ и его экспоненциальное убывание при $\tau \rightarrow -\infty$ доказываются в точности так же, как в п. 6.1, а для $Q_{1u}(0)$ получается выражение (см. (21))

$$Q_{1u}(0) = -\frac{\bar{v}_1(x_0)}{f(\varphi_0, v_0)} \int_{-\infty}^0 h_1(\tau) Q_0' u(\tau) d\tau. \quad (31)$$

Аналогичное выражение получается для $P_1u(0)$:

$$P_1u(0) = -\frac{\bar{v}_1(x_0)}{f(\psi_0, v_0)} \int_{-\infty}^0 H_1(\tau) P_0'u(\tau) d\tau,$$

где

$$H_1(\tau) = f_v(\varphi_0 + P_0u(\tau), v_0) + f_u(\varphi_0 + P_0u(\tau), v_0) \varphi'(v_0). \quad (32)$$

В силу (28) $H_1(\tau) = h_1(-\tau)$, $P_0'u(\tau) = -Q_0'u(-\tau)$ при $\tau \geq 0$. Поэтому для Q_1u и P_1u также справедливо соотношение типа (28), в частности $Q_1u(0) = P_1u(0)$. Так как $\bar{u}_1(x)$ — непрерывная функция, то равенство $Q_1u(0) = P_1u(0)$ обеспечивает непрерывность функции u в точке x_* в первом приближении: $\bar{u}_1(x_0-0) + Q_1u(0) = \bar{u}_1(x_0+0) + P_1u(0)$. При этом значение x_0 по-прежнему остается неопределенным. Это отличает случай II' от случая II, исследованного в п. 6.1—6.3, где условие $Q_1u(0) = P_1u(0)$ давало уравнение для x_0 . В данном случае это условие выполняется при любых x_0 . Уравнение для x_0 получается лишь на следующем шаге, при рассмотрении членов асимптотики второго порядка.

4. Для \bar{u}_2, \bar{v}_2 получаем уравнения

$$\bar{u}_2 = \varphi'(v_0) \bar{v}_2 + B \bar{v}_1^2(x), \quad \bar{v}_2'' = k^2 v_2 + D \bar{v}_1^2(x), \quad (33)$$

где B и D — известные числа, например $B = -\frac{1}{2} \bar{f}_u^{-1}(\bar{f}_{uu} \varphi'^2(v_0) + 2\bar{f}_{uv} \varphi'(v_0) + \bar{f}_{vv})$. Краевые условия для \bar{v}_2 имеют вид

$$\bar{v}_2'(0) = \bar{v}_2'(l) = 0, \quad (34)$$

а из условия непрерывности v и v' в точке x_* следуют равенства

$$\bar{v}_2(x_0+0) - \bar{v}_2(x_0-0) = -[\bar{v}_1'(x_0+0) - \bar{v}_1'(x_0-0)] x_1, \quad (35)$$

$$\bar{v}_2'(x_0+0) - \bar{v}_2'(x_0-0) = Q_3'v(0) - P_3'v(0). \quad (36)$$

Входящие в (36) функции Q_3v и P_3v определяются аналогично Q_2v и P_2v и удовлетворяют соотношению типа (28).

5. К задаче для $\bar{v}_2(x)$ мы еще вернемся, а сейчас рассмотрим задачу для Q_2u :

$$\frac{d^2 Q_2u}{d\tau^2} = f_u \cdot Q_2u + f_2(\tau),$$

$$Q_2u(0) = -\bar{u}_1'(x_0-0), \quad Q_2u(-\infty) = 0.$$

Функцию $f_2(\tau)$ можно записать в виде $f_2(\tau) = h_1(\tau) \tau \bar{v}_1'(x_0-0) + \bar{f}_2(\tau)$, где $h_1(\tau)$ определяется формулой (30), а

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(\tau) = & h_1(\tau) [\bar{v}_2(x_0-0) + \bar{v}_1'(x_0-0) x_1] + f_v \cdot Q_2v(\tau) + \frac{1}{2} f_{uu} \times \\ & \times [\bar{u}_1(x_0) + Q_1u(\tau)]^2 + f_{uv} [\bar{u}_1(x_0) + Q_1u(\tau)] \bar{v}_1(x_0) + \frac{1}{2} f_{vv} \cdot \bar{v}_1^2(x_0), \end{aligned}$$

причем все частные производные функции f вычисляются в точке $(\psi_0 + Q_0 u(\tau), v_0)$.

Аналогично (31) находим

$$Q_2 u(0) = -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} \int_{-\infty}^0 f_2(\tau) Q'_0 u(\tau) d\tau.$$

Такого же типа выражение получается для $P_2 u(0)$:

$$P_2 u(0) = -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} \int_{-\infty}^0 F_2(\tau) P'_0 u(\tau) d\tau,$$

где $F_2(\tau) = H_1(\tau) \tau \bar{v}'_1(x_0 + 0) + \bar{F}_2(\tau)$, $H_1(\tau)$ определяется формулой (32), а $\bar{F}_2(\tau)$ получается из $\bar{f}_2(\tau)$, если заменить Q -функции на P -функции, а $x_0 - 0$ — на $x_0 + 0$. Отсюда (с учетом (35)) следует, что $\bar{F}_2(\tau) = \bar{f}_2(-\tau)$ при $\tau \geq 0$.

Разбивая теперь $Q_2 u(0)$ на два слагаемых, соответствующих двум слагаемым в выражении для $\bar{f}_2(\tau)$, и производя в первом

слагаемом замену переменной интегрирования $\tau = \int_{\psi_0 - \varphi_0}^{Q_0 \tau} \frac{ds}{\Phi(s)}$,

получим

$$Q_2 u(0) = -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} [F(v_0) \bar{v}'_1(x_0 - 0) + \alpha],$$

где $F(v_0)$ определяется формулой (23), а $\alpha = \int_{-\infty}^0 \bar{f}_2(\tau) Q'_0 u(\tau) d\tau$.

Таким же образом получаем

$$P_2 u(0) = -\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} [-F(v_0) \bar{v}'_1(x_0 + 0) + \alpha].$$

6. Условие непрерывности функции u в точке x_* во втором приближении приводит к равенству

$$\bar{u}_2(x_0 - 0) + \bar{u}'_1(x_0 - 0) x_1 + Q_2 u(0) = \bar{u}_2(x_0 + 0) + \bar{u}'_1(x_0 + 0) x_1 + P_2 u(0).$$

Отсюда, учитывая равенства $\bar{u}'_1(x) = \varphi'(v_0) \bar{v}'_1(x)$, $\bar{u}_2(x) = \varphi'(v_0) \bar{v}_2(x) + B \bar{v}_1^2(x)$ и непрерывность $\bar{v}_1(x)$ в точке x_0 , имеем

$$\varphi'(v_0) [\bar{v}_2(x_0 + 0) - \bar{v}_2(x_0 - 0) + (\bar{v}'_1(x_0 + 0) - \bar{v}'_1(x_0 - 0)) x_1] + P_2 u(0) - Q_2 u(0) = 0.$$

Но выражение в квадратных скобках равно нулю в силу (35), поэтому приходим к уравнению

$$P_2 u(0) - Q_2 u(0) = 0.$$

Подставляя сюда выражения для $Q_2u(0)$ и $P_2u(0)$, получим

$$\frac{1}{f(\psi_0, v_0)} F(v_0) [\bar{v}'_1(x_0+0) + \bar{v}'_1(x_0-0)] = 0.$$

Напомним, что первый тип точек «всплеска» определялся в п. 6.1 при помощи уравнения $F(v_0) = 0$. В данном случае будем считать, что выполняется условие

$$IV'. F(v_0) \neq 0.$$

Тогда для x_0 получаем уравнение

$$\bar{v}'_1(x_0+0) + \bar{v}'_1(x_0-0) = 0.$$

Отсюда, используя выражение (29) для $\bar{v}_1(x)$, приходим к уравнению

$$\text{sh}(k(2x_0 - l)) = 0$$

и, следовательно, $x_0 = l/2$.

Отметим, что $\bar{v}_1(x)$ является четной функцией относительно точки $x_0 = l/2$ (негладкой в этой точке), а Q_2u и P_2u удовлетворяют соотношению типа (28).

7. Коэффициент x_1 ряда (6) определяется на следующем шаге. Условие непрерывности функции u в точке x_* приводит в третьем приближении к уравнению $P_3u(0) - Q_3u(0) = 0$. В свою очередь это уравнение, как показывает несложный, но весьма громоздкий расчет, приводится к виду

$$\bar{v}'_2\left(\frac{l}{2} + 0\right) + \bar{v}'_2\left(\frac{l}{2} - 0\right) = \delta x_1, \quad (37)$$

где $\delta = -2k^2\bar{v}_1(x_0)$.

Обратимся теперь снова к уравнению (33) для $\bar{v}_2(x)$ с дополнительными условиями (34) — (36), в которых $x_0 = l/2$. Добавим к этим условиям условие (37). Этому «лишнему» условию можно удовлетворить, выбирая нужным образом x_1 . Проведем соответствующие вычисления. Положим $\bar{v}_2 = w + \tilde{v}_2$, где w — решение задачи

$$w'' = k^2 w + D\bar{v}_1^2(x), \quad w'(0) = w'(l) = 0.$$

Очевидно, $w(x)$ — четная функция относительно точки $l/2$, и так как $w(x)$ имеет производную в точке $l/2$, то $w'(l/2) = 0$. Поэтому для $\tilde{v}_2(x)$ имеем однородное уравнение $\tilde{v}_2'' = k^2\tilde{v}_2$ с дополнительными условиями

$$\tilde{v}'_2(0) = \tilde{v}'_2(l) = 0, \quad \tilde{v}_2\left(\frac{l}{2} + 0\right) - \tilde{v}_2\left(\frac{l}{2} - 0\right) = \beta x_1,$$

$$\tilde{v}'_2\left(\frac{l}{2} + 0\right) - \tilde{v}'_2\left(\frac{l}{2} - 0\right) = \gamma, \quad \tilde{v}'_2 + \left(\frac{l}{2} + 0\right) + \tilde{v}'_2\left(\frac{l}{2} - 0\right) = \delta x_1.$$

Здесь $\beta = \bar{v}'_1\left(\frac{l}{2} - 0\right) - \bar{v}'_1\left(\frac{l}{2} + 0\right)$, $\gamma = Q'_3 v(0) - P'_3 v(0)$. Не-
сложные вычисления приводят к уравнению

$$\left(\beta + \frac{\delta}{k} \operatorname{cth} \frac{kl}{2}\right) x_1 = 0.$$

V'. Пусть. $\beta + \frac{\delta}{k} \operatorname{cth} \frac{kl}{2} \neq 0$.

Тогда $x_1 = 0$. Отметим, что при этом функция $\bar{v}_2(x)$ оказывается четной относительно точки $l/2$.

Аналогичная ситуация получается в следующих приближениях: все $x_i = 0$, $i = 2, 3, \dots$. Поэтому

$$x_* = x_0 = l/2.$$

Функции $\bar{v}_i(x)$, а значит, и $\bar{u}_i(x)$ — четные относительно точки $x_* = l/2$, а функции $Q_i u$, $P_i u$ и $Q_i v$, $P_i v$ удовлетворяют соотношениям типа (28) и имеют экспоненциальные оценки типа (15).

8. Введем обозначения

$$\tilde{U}_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \mu^k (\bar{u}_k(x) + Q_k u(\tau)) + \mu^{n+1} Q_{n+1} u(\tau), & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \sum_{k=0}^n \mu^k (\bar{u}_k(x) + P_k u(\tau)) + \mu^{n+1} P_{n+1} u(\tau), & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$\tilde{V}_{n+1} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n+1} \mu^k (\bar{v}_k(x) + Q_k v(\tau)) + \mu^{n+2} Q_{n+2} v(\tau), & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \sum_{k=0}^{n+1} \mu^k (\bar{v}_k(x) + P_k v(\tau)) + \mu^{n+2} P_{n+2} v(\tau), & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Теорема 6.2. Если выполнены условия I, II'—V', то функции \tilde{U}_n и \tilde{V}_{n+1} непрерывны на отрезке $[0, l]$ вместе со своими производными до второго порядка включительно и удовлетворяют уравнениям (1) с точностью порядка μ^{n+1} , т. е.

$\mu^2 \tilde{U}_n - f(\tilde{U}_n, \tilde{V}_{n+1}) = O(\mu^{n+1})$, $\tilde{V}_{n+1} - g(\tilde{U}_n, \tilde{V}_{n+1}) = O(\mu^{n+1})$,
а краевым условиям (2) удовлетворяют с точностью порядка μ^N , где N — любое число.

Утверждение теоремы непосредственно следует из самого способа построения функций \tilde{U}_n и \tilde{V}_{n+1} . Отметим, что включение в \tilde{U}_n членов $\mu^{n+1} Q_{n+1} u(\tau)$ и $\mu^{n+1} P_{n+1} u(\tau)$ обеспечивает непрерывность \tilde{U}_n в точке $l/2$ (при $n=0$ эти члены можно не включать, так как $Q'_1 u(0) = P'_1 u(0)$). Члены $\mu^i Q_i v(\tau)$ и $\mu^i P_i v(\tau)$ ($i = n+1, n+2$) включены в \tilde{V}_{n+1} для того, чтобы второе уравнение системы (1) удовлетворялось с точностью порядка μ^{n+1} , без них точ-

ность будет иметь порядок $\mu^{n+1} + \mu^{n-1} \exp(-\kappa|\tau|)$. Наряду с этими членами добавлено также слагаемое $\mu^{n+1}\bar{v}_{n+1}(x)$, чтобы обеспечить непрерывность \bar{V}'_{n+1} в точке $l/2$. Выполнение краевых условий (2) с произвольной точностью порядка μ^N следует из того, что $\bar{v}_i'(0) = \bar{v}_i'(l) = \bar{u}_i'(0) = \bar{u}_i'(l) = 0$, а Q - и P -функции имеют экспоненциальные оценки. Если умножить Q - и P -функции на сглаживающие функции, равные нулю вне некоторой окрестности точки $x_* = l/2$, то \bar{U}_n и \bar{V}_{n+1} будут удовлетворять краевым условиям точно.

9. Заметим теперь, что так как функции \bar{u}_i, \bar{v}_i — четные относительно точки $x_* = l/2$, а функции Q_i и P_i удовлетворяют соотношениям типа (28), то асимптотика (5), (6) является четной относительно точки $x_* = l/2$. Отсюда следует важный вывод. Разобьем отрезок $[0, l]$ на произвольное число m равных частичных отрезков. На каждом из частичных отрезков построим асимптотику типа (5), (6) с точкой «всплеска» в середине отрезка. Так как эта асимптотика является четной относительно середины отрезка и ее производные первого порядка на концах отрезка обращаются в нуль, то построенные на частичных отрезках асимптотики гладким образом переходят одна в другую в граничных точках соседних отрезков. Таким образом, можно построить асимптотику решения задачи (1), (2) с произвольным числом точек «всплеска», расположенных на отрезке $[0, l]$ равномерным образом. На практике нужно иметь в виду следующее: чем больше число m точек «всплеска», тем меньше нужно брать μ для того, чтобы асимптотика была эффективной, так как для эффективности асимптотики на частичном отрезке μ должно быть много меньше длины l/m этого отрезка: $\mu \ll l/m$.

6.5. Модель «брюсселятор»

Рассмотрим известную модель «брюсселятор», описывающую химическую реакцию с двумя промежуточными веществами [95]. Безразмерные концентрации u и v этих веществ в данной модели удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta u + A - (B+1)u + u^2v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = D_2 \Delta v + Bu - u^2v,$$

где D_1, D_2, A и B — положительные постоянные, Δ — оператор Лапласа. Если $D_1 \ll D_2$, то, полагая $D_1 = \mu^2, D_2 = 1$ и рассматривая одномерный случай $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, получим для стационарных решений следующую систему уравнений:

$$\mu^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = -A + (B+1)u - u^2v, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -Bu + u^2v. \quad (38)$$

Это система типа (1), где $f(u, v) = -A + (B+1)u - u^2v, g(u, v) = -Bu + u^2v$. Будем рассматривать ее на отрезке $[0, l]$ с краевыми условиями (2).

Уравнение $f(u, v) = 0$, т. е. $-A + (B+1)u - u^2v = 0$, имеет два положительных корня относительно u при $v \in I = (0 < v < (B+1)^2/4A)$ (условие $u > 0, v > 0$ обусловлено физическим смыслом переменных u и v):

$$u = \frac{B+1 - \sqrt{(B+1)^2 - 4Av}}{2v} \equiv \varphi(v) \text{ и } u = \frac{B+1 + \sqrt{(B+1)^2 - 4Av}}{2v} \equiv \chi(v).$$

Очевидно, $\varphi(v) < \chi(v)$, $f_u(\varphi(v), v) = \sqrt{(B+1)^2 - 4Av} > 0$, $f_u(\chi(v), v) = -\sqrt{(B+1)^2 - 4Av} < 0$. Выражение для функции $\psi(v)$, определяемой уравнением (9), имеет вид

$$\psi(v) = (B+1 + 2\sqrt{(B+1)^2 - 4Av})/2v.$$

Таким образом, условие I выполнено.

Краевая задача (10), (11) для \bar{v}_0 запишется так:

$$\bar{v}_0 = \left(-2A\bar{v}_0 + B + 1 - \sqrt{(B+1)^2 - 4A\bar{v}_0} \right) / 2\bar{v}_0, \quad (39)$$

$$\bar{v}'_0(0) = \bar{v}'_0(l) = 0.$$

Нетрудно видеть, что при $B > 1$ правая часть уравнения знакопостоянна (отрицательна) для всех $\bar{v}_0 < (B+1)^2/(4A)$ и, следовательно, краевая задача (39) не имеет решений. Если же $0 < B \leq 1$, то задача имеет единственное решение

$$\bar{v}_0 = B/A = \text{const.}$$

Итак, задача (39) не имеет решений, отличных от константы, и, следовательно, система (38) не может иметь точек «всплеска» первого и второго типа.

Решение $\bar{v}_0 = B/A$ при $0 < B < 1$ удовлетворяет условию $\bar{v}_0 \in I$. Таким образом, при $0 < B < 1$ получим

$$\bar{v}_0 = B/A = v_0, \quad \bar{u}_0 = \varphi(v_0) = A = \varphi_0,$$

т. е. выполнено условие II'. Несложно проверить, что условие IV' также выполнено. В самом деле, функция $F(v_0)$ определяется формулой (23). В данном случае

$$f_v(u, v_0) + f_u(u, v_0)\varphi'(v_0) = -u^2 + \frac{B+1-2uv_0}{B+1-2\varphi_0v_0} \varphi_0^2 \leq 0,$$

так как $u \geq u_0$. Поэтому подынтегральная функция в выражении (23) для $F(v_0)$ является знакопостоянной и, следовательно, $F(v_0) \neq 0$.

Уравнение (14) для Q_0u имеет вид

$$Q_0''u = \sqrt{2 \int_A^{A+Q_0u} \left[-A + (B+1)\xi - \frac{B}{A}\xi^2 \right] d\xi} = \\ = \sqrt{(1-B) - \frac{2}{3} \frac{B}{A} Q_0u \cdot Q_0u}.$$

Решая это уравнение с начальным условием

$$Q_0u(0) = \psi_0 - \varphi_0 = 3(1-B)A/(2B),$$

находим

$$Q_0u(\tau) = \frac{6\alpha^2 A}{B} \cdot \frac{\exp(\alpha\tau)}{(1 + \exp(\alpha\tau))^2}, \quad \tau \leq 0,$$

где $\alpha = \sqrt{1-B} > 0$.

Выражение для $P_0u(\tau)$ получается из $Q_0u(\tau)$ заменой τ на $-\tau$. Таким образом, члены асимптотики нулевого порядка найдены в явном виде.

Переходя к членам асимптотики первого порядка, получим

$$\bar{u}_1 = \frac{A^2}{\alpha^2} \bar{v}_1, \quad \bar{v}_1 = \frac{A^2}{\alpha^2} \bar{v}_1$$

и, значит, $k^2 = A^2/\alpha^2 > 0$, т. е. выполнено условие III'.

Вычисление $Q_0''v(0)$ дает $Q_0''v(0) = 3\alpha A/B$. После этого по формуле (29) находим $\bar{v}_1(x)$ в явном виде ($k = A/\alpha$):

$$\bar{v}_1(x) = -\frac{3\alpha^2}{B \operatorname{sh} \frac{kl}{2}} \begin{cases} \operatorname{ch}(kx), & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \operatorname{ch}(k(x-l)), & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Проверим выполнение последнего условия V'. Вычисление величин $\beta = \bar{v}_1' \left(\frac{l}{2} - 0 \right) - \bar{v}_1' \left(\frac{l}{2} + 0 \right)$ и $\delta = -2k^2 \bar{v}_1 \left(\frac{l}{2} \right)$ дает

$\beta = -6\alpha A/B$, $\delta = 6A^2 \operatorname{cth} \frac{kl}{2} / B$. Следовательно,

$$\beta + \frac{\delta}{k} \operatorname{cth} \frac{kl}{2} = \frac{6\alpha A}{B} \left(\operatorname{cth}^2 \frac{kl}{2} - 1 \right) \neq 0,$$

т. е. условие V' выполнено.

Итак, для модели «брюсселятор» выполнены все условия I, II'—V'. Поэтому в этой модели можно построить асимптотику решения с произвольным числом точек «всплеска», расположенных равномерно на отрезке $[0, l]$.

§ 7. Критический случай

7.1. Начальная задача для системы уравнений с малой нелинейностью

1. Одним из основных требований в теореме Тихонова является условие существования изолированного корня $\bar{z} = \varphi(\bar{y}, t)$ вырожденного уравнения $F(\bar{z}, \bar{y}, t) = 0$. Во многих прикладных задачах, приводящих к сингулярно возмущенным уравнениям, в частности в задачах химической кинетики, это условие нарушается: вырожденное уравнение имеет не изолированный корень, а целое семейство решений, зависящее от одного или нескольких параметров. Такой случай мы называем *критическим*.

Оказывается, при определенных весьма общих условиях асимптотика решения начальной задачи в критическом случае имеет такой же вид, как и в п. 4.2, в частности в пределе при $\mu \rightarrow 0$ решение начальной задачи переходит в одно из решений вырожденного уравнения, однако алгоритм построения асимптотики претерпевает изменения.

Рассмотрим этот алгоритм на примере системы уравнений с малой нелинейностью:

$$\mu \frac{dx}{dt} = A(t)x + \mu f(x, t, \mu), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$x(0, \mu) = x^0. \quad (2)$$

Здесь x и f — m -мерные вектор-функции, $A(t)$ — $(m \times m)$ -матрица, $\mu > 0$ — малый параметр, $A(t)$ и $f(x, t, \mu)$ предполагаются достаточно гладкими.

I. Пусть матрица $A(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ имеет собственное значение $\lambda = 0$ кратности $k < m$:

$$a) \lambda_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

а остальные собственные значения матрицы $A(t)$ удовлетворяют неравенству

$$b) \operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0, \quad i = k + 1, \dots, m.$$

Из условия а) следует, что $\det A(t) = 0$ и, следовательно, вырожденное уравнение $A(t)\bar{x} = 0$, получающееся из (1) при $\mu = 0$, имеет семейство решений, представляющее собой линейную комбинацию (с произвольными коэффициентами) собственных векторов матрицы $A(t)$, отвечающих $\lambda = 0$.

II. Пусть собственному значению $\lambda = 0$ при каждом $t \in [0, T]$ соответствует k линейно независимых собственных векторов $e_i(t)$, $i = 1, \dots, k$.

Другие требования будут наложены в ходе построения асимптотики.

2. Как и в п. 4.2, асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем строить в виде суммы регулярного и пограничного рядов:

$$x(t, \mu) = \bar{x}(t, \mu) + \Pi x(\tau, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i (\bar{x}_i(t) + \Pi_i x(\tau)), \quad (3)$$

где $\tau = t/\mu$.

Подставляя ряд (3) в (1) и (2) и представляя f в виде $f = \bar{f} + \Pi f$ (см. п. 4.2), приходим к равенствам

$$\mu \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\Pi x}{d\tau} = A(t) \bar{x} + A(\tau\mu) \Pi x + \mu \bar{f} + \mu \Pi f, \quad (1')$$

$$\bar{x}(0, \mu) + \Pi x(0, \mu) = x^0. \quad (2')$$

Раскладывая $A(\tau\mu)$, \bar{f} и Πf в ряды по степеням μ и приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях μ в обеих частях равенств (1') и (2'), причем в (1') отдельно зависящие от t и отдельно зависящие от τ , получим уравнения для нахождения коэффициентов ряда (3).

3. Для $\bar{x}_0(t)$ имеем вырожденное уравнение

$$A(t) \bar{x}_0 = 0.$$

Общее решение этого уравнения в силу условия II можно записать в виде

$$\bar{x}_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) e_i(t), \quad (4)$$

где $e_i(t)$ — собственные векторы матрицы $A(t)$, отвечающие $\lambda=0$, $\alpha_i(t)$ — произвольные скалярные функции. Введем $(m \times k)$ -матрицу $e(t)$, столбцами которой являются собственные векторы $e_i(t)$ ($i=1, \dots, k$), и k -мерную вектор-функцию $\alpha(t)$ с элементами $\alpha_i(t)$. Тогда формула (4) запишется более кратко:

$$\bar{x}_0 = e(t) \alpha(t). \quad (5)$$

4. Для $\Pi_0 x(\tau)$ получается задача

$$\frac{d\Pi_0 x}{d\tau} = A(0) \Pi_0 x, \quad \tau \geq 0, \quad (6)$$

$$\Pi_0 x(0) = x^0 - \bar{x}_0(0) = x^0 - \sum_{i=1}^k \alpha_i(0) e_i(0). \quad (7)$$

Общее решение уравнения (6) представимо в виде

$$\Pi_0 x = \sum_{i=1}^k c_i e_i(0) + \sum_{l=k+1}^m c_l w_l(\tau) \exp(\lambda_l(0) \tau), \quad (8)$$

где c_i — произвольные постоянные, $e_i(0)$ — собственные векторы матрицы $A(0)$, отвечающие $\lambda=0$, $w_i(\tau)$ — известные вектор-функции, элементами которых являются некоторые многочлены относительно τ . В частности, если $\lambda_i(0)$ ($i=k+1, \dots, m$) — простые собственные значения, то w_i не зависит от τ и является собственным вектором матрицы $A(0)$, отвечающим собственному значению $\lambda_i(0)$.

В силу условия 1б вторая сумма в (8) стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Потребуем, чтобы и вся функция $\Pi_0 x(\tau)$ стремилась к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, и такое же требование наложим на все Π -функции:

$$\Pi_i x(\infty) = 0.$$

Чтобы это условие выполнялось для $\Pi_0 x(\tau)$, необходимо положить $c_i = 0$, $i=1, \dots, k$. Таким образом,

$$\Pi_0 x = \sum_{i=k+1}^m c_i w_i(\tau) \exp(\lambda_i(0)\tau). \quad (9)$$

Подставляя это выражение в начальные условия (7), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i(0) e_i(0) + \sum_{i=k+1}^m c_i w_i(0) = x^0. \quad (10)$$

Это векторное уравнение представляет собой линейную алгебраическую систему m уравнений относительно m неизвестных: $\alpha_i(0)$ ($i=1, \dots, k$) и c_i ($i=k+1, \dots, m$). Известно, [100], что векторы $e_i(0)$ ($i=1, \dots, k$) и $w_i(0)$ ($i=k+1, \dots, m$) линейно независимы. Поэтому система (10) имеет единственное решение.

Таким образом, функция $\Pi_0 x(\tau)$ полностью определена формулой (9), причем в силу условия 1б она имеет экспоненциальную оценку

$$\| \Pi_0 x(\tau) \| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad (11)$$

а для не известных пока функций $\alpha_i(t)$, входящих в выражение (4) для \bar{x}_0 , найдены начальные значения $\alpha_i(0)$. Введем для них обозначение: $\alpha_i(0) = \alpha_i^0$, $\alpha(0) = \alpha^0$.

5. Полностью функции $\alpha_i(t)$ определяются на следующем шаге при рассмотрении уравнения для $\bar{x}_1(t)$. Оно имеет вид

$$A(t) \bar{x}_1 = -f(\bar{x}_0(t), t, 0) + \frac{d\bar{x}_0}{dt} = -f(e(t)a(t), t, 0) + \frac{d}{dt}(e(t)a(t)). \quad (12)$$

Так как $\det A(t) = 0$, то эта система разрешима тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна ко всем собственным

векторам $g_j(t)$ ($j=1, \dots, k$) сопряженной матрицы $A^*(t)$, отвечающим собственному значению $\lambda=0$. Так как $A(t)$ — вещественная матрица, то сопряженная матрица $A^*(t)$ совпадает с транспонированной для $A(t)$. Введем $(k \times m)$ -матрицу $g(t)$, строками которой являются векторы $g_j(t)$. Тогда условие ортогональности запишется так:

$$g(t) \cdot \left(-f(e(t)\alpha(t), t, 0) + e(t) \frac{d\alpha}{dt} + \frac{de}{dt} \alpha(t) \right) = 0. \quad (13)$$

Собственные векторы $g_j(t)$ можно выбрать таким образом, что $g(t)e(t) = E_k$ — единичная матрица. Поэтому из равенства (13) получим уравнение

$$\frac{d\alpha}{dt} = F(\alpha, t). \quad (14)$$

Вид функции F ясен из сравнения (13) и (14). Таким образом, условие разрешимости уравнения (12) для \bar{x}_1 дает дифференциальное уравнение для искомой функции $\alpha(t)$. Начальное условие для $\alpha(t)$ было найдено ранее.

III. Пусть уравнение (14) с начальным условием $\alpha(0) = \alpha^0$ имеет решение при $0 \leq t \leq T$.

Тем самым функция $\bar{x}_0(t)$ полностью определена, а решение уравнения (12) можно записать в виде

$$\bar{x}_1 = \tilde{x}_1(t) + \sum_{i=1}^k \beta_i(t) e_i(t) = \tilde{x}_1(t) + e(t) \beta(t),$$

где $\tilde{x}_1(t)$ — известная функция (частное решение (12)), $\beta(t)$ — произвольная k -мерная вектор-функция.

6. Для $\Pi_1 x(\tau)$ получается задача

$$\frac{d\Pi_1 x}{d\tau} = A(0) \Pi_1 x + \varphi_1(\tau), \quad \tau \geq 0, \quad (15)$$

$$\Pi_1 x(0) = -\bar{x}_1(0) = -\tilde{x}_1(0) - \sum_{i=1}^k \beta_i(0) e_i(0), \quad (16)$$

где

$$\varphi_1(\tau) = A'(0) \tau \Pi_0 x(\tau) + (f(\bar{x}_0(0) + \Pi_0 x(\tau), 0, 0) - f(\bar{x}_0(0), 0, 0)).$$

Очевидно, $\varphi_1(\tau)$ имеет оценку типа (11).

Общее решение уравнения (15) можно записать в виде

$$\Pi_1 x = \tilde{\Pi}_1 x(\tau) + \sum_{i=0}^k d_i e_i(0) + \sum_{i=k+1}^m d_i w_i(\tau) \exp(\lambda_i(0) \tau),$$

где $\tilde{\Pi}_1 x(\tau)$ — известная функция (частное решение уравнения (15)), которую можно выбрать так, что она будет иметь оцен-

ку типа (11), d_i — произвольные постоянные, $e_i(0)$ и $w_i(\tau)$ — те же векторы, что и в (8).

Из условия $\Pi_1 x(\infty) = 0$ получаем $d_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. Подставляя затем выражение для $\Pi_1 x$ в начальное условие (16), приходим к линейной алгебраической системе уравнений

$$\sum_{i=1}^k \beta_i(0) e_i(0) + \sum_{i=k+1}^m d_i w_i(0) = -\tilde{x}_1(0) - \tilde{\Pi}_1 x(0),$$

откуда однозначно определяются $\beta_i(0)$ ($i = 1, \dots, k$) и d_i ($i = k+1, \dots, m$). Тем самым $\Pi_1 x(\tau)$ полностью определено и имеет оценку типа (11), а для неизвестной функции $\beta(t)$ найдено начальное условие. Полностью эта функция определится на следующем шаге при рассмотрении уравнения для $\tilde{x}_2(t)$. Условие разрешимости этого уравнения дает линейное дифференциальное уравнение относительно $\beta(t)$:

$$\frac{d\beta}{dt} = B(t)\beta + g_1(t), \quad (17)$$

где $B(t) = F_\alpha(\alpha(t), t)$ — известная матрица, $g_1(t)$ — известная функция. Решая это уравнение с полученным ранее начальным условием, найдем $\beta(t)$ и тем самым функция $\tilde{x}_1(t)$ будет полностью определена.

7. Построение следующих членов ряда (3) проводится аналогично. На i -м шаге решение уравнения для $\tilde{x}_i(t)$ содержит произвольную k -мерную вектор-функцию $\gamma(t)$. При построении $\Pi_i x(\tau)$ определяется начальное значение $\gamma(0)$ этой функции, а условие разрешимости уравнения для $\tilde{x}_{i+1}(t)$ дает дифференциальное уравнение типа (17):

$$\frac{d\gamma}{dt} = B(t)\gamma + g_i(t),$$

что позволяет однозначно определить $\gamma(t)$.

Пограничные функции $\Pi_i x(\tau)$ строятся аналогично $\Pi_1 x(\tau)$ и имеют оценку типа (11).

Итак, ряд (3) построен.

8. Основной результат в отношении построенного ряда (3) формулируем в виде теоремы.

Теорема 7.1. *Если выполнены условия I—III, то при достаточно малых μ задача (1), (2) имеет единственное решение $x(t, \mu)$ и ряд (3) является асимптотическим рядом для этого решения на отрезке $0 \leq t \leq T$, т. е. для любого n справедливо равенство*

$$\max_{[0, T]} \|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| = O(\mu^{n+1}),$$

где $X_n(t, \mu)$ — n -я частичная сумма ряда (3).

Доказательство этой теоремы проводится стандартным способом: сведением уравнения для остаточного члена к эквивалентному интегральному уравнению с последующим применением метода последовательных приближений (см. [44]).

7.2. О других задачах в критических случаях

1. Мы рассмотрели уравнение (1), в котором перед производной находился такой же множитель μ , как и перед функцией f в правой части уравнения. Представляет интерес случай, когда порядок малости множителя при производной выше, чем перед функцией f . Рассмотрим, например, уравнение

$$\mu^2 \frac{dx}{dt} = A(t) + \mu f(x, t, \mu), \quad (18)$$

где матрица $A(t)$ удовлетворяет таким же условиям I и II, как в п. 7.1. Асимптотическое разложение решения этого уравнения с начальным условием (2) наряду с регулярными членами $\bar{x}_i(t)$ и пограничными функциями $\Pi_i x(\tau)$ ($\tau = t/\mu$) содержит еще один погранслоиный ряд по степеням μ , коэффициенты которого P_i являются функциями погранслоиной переменной $s = t/\mu^2$.

Как и в п. 7.1, для $\bar{x}_0(t)$ получается выражение (5), где $\alpha(t)$ — произвольная k -мерная вектор-функция. Эта функция определяется из условия разрешимости уравнения для $\bar{x}_1(t)$, но только теперь условие разрешимости дает не дифференциальное, а конечное уравнение

$$g(t) f(e(t) \alpha(t), t, 0) = 0.$$

III'. Пусть это уравнение имеет изолированное решение относительно $\alpha(t)$ при $0 \leq t \leq T$.

Для $\Pi_0 x(\tau)$ получается не дифференциальное, а алгебраическое уравнение $A(0) \Pi_0 x = 0$, откуда

$$\Pi_0 x = e(0) h(\tau),$$

где $h(\tau)$ — пока произвольная k -мерная вектор-функция. Условие разрешимости неоднородной алгебраической системы уравнений для $\Pi_1 x(\tau)$ представляет собой дифференциальное уравнение относительно функции $h(\tau)$:

$$\frac{dh}{d\tau} = g(0) \cdot (f(\bar{x}_0(0) + e(0) h(\tau), 0, 0) - f(\bar{x}_0(0), 0, 0)). \quad (19)$$

Для $P_0 x(s)$ имеем уравнение

$$\frac{dP_0 x}{ds} = A(0) P_0 x$$

с начальным условием

$$P_0 x(0) = x^0 - \bar{x}_0(0) - e(0) h(0) = x^0 - \bar{x}_0(0) - \sum_{i=1}^k h_i(0) e_i(0).$$

Уравнение для P_0x имеет такой же вид, как (6), поэтому

$$P_0x = \sum_{i=1}^k c_i e_i(0) + \sum_{i=k+1}^m c_i \omega_i(s) \exp(\lambda_i(0) s).$$

Из условия $P_0x(\infty) = 0$ следует, что $c_i = 0$, $i = 1, \dots, k$. Подставляя теперь выражение для $P_0x(s)$ в начальное условие, получим уравнение

$$\sum_{i=1}^k h_i(0) e_i(0) + \sum_{i=k+1}^m c_i \omega_i(0) = x^0 - \bar{x}_0(0),$$

откуда однозначно определяются $h_i(0)$ ($i = 1, \dots, k$) и c_i ($i = k+1, \dots, m$).

Чтобы завершить построение нулевого приближения, остается решить уравнение (19) с найденным начальным условием, которое запишем так: $h(0) = h^0$.

Существенными условиями, обеспечивающими погранслойную структуру решения задачи (18), (2) и, в частности, экспоненциальную оценку типа (11) для функции $h(\tau)$, а значит, и для $P_0x(\tau)$, являются следующие два требования:

IV. Все собственные значения ($k \times k$)-матрицы $g(t) f_x(\bar{x}_0(t), t, 0) e(t)$ имеют отрицательные вещественные части при $0 \leq t \leq T$.

Отметим, что в силу этого требования $h=0$ является асимптотически устойчивой точкой покоя уравнения (19).

V. Найденное начальное значение $h(0) = h^0$ принадлежит области влияния точки покоя $h=0$ уравнения (19).

Далее аналогичным образом можно построить следующие члены асимптотического разложения решения. При этом все пограничные функции $\Pi_i x(\tau)$ и $P_i x(s)$ имеют экспоненциальные оценки типа (11). Подробное рассмотрение задачи (18), (2) проведено в [27].

2. В [44] наряду с задачей (1), (2) исследована начальная задача для общей нелинейной системы

$$\mu \frac{dx}{dt} = F(x, t, \mu)$$

в критическом случае, т. е. когда вырожденное уравнение $F(x, t, 0) = 0$ имеет семейство решений $x = \varphi(\alpha(t), t)$, зависящее от произвольной k -мерной вектор-функции $\alpha(t)$. Там же рассмотрены некоторые краевые задачи, а также прикладные задачи из химической кинетики и физики полупроводников, приводящие к сингулярно возмущенным уравнениям в критических случаях.

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

§ 8. Метод Люстерника — Вишика

8.1. Постановка задачи и алгоритм построения асимптотики решения

1. В 1957 г. в журнале «Успехи математических наук» была опубликована статья М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [58], в которой рассматривались линейные дифференциальные уравнения с малыми параметрами при производных, как обыкновенные, так и в частных производных. Эта статья является одной из фундаментальных работ в теории сингулярных возмущений. До нее имелись отдельные публикации, посвященные сингулярно возмущенным уравнениям с частными производными, например [79, 97] и некоторые другие, но в отличие от них в работе [58] впервые был сформулирован общий подход к построению асимптотических разложений решений линейных сингулярно возмущенных уравнений с частными производными. Этот подход получил название *метод Люстерника—Вишика*. Мы проиллюстрируем суть этого метода на простом примере эллиптического уравнения в области с гладкой границей на плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}_\epsilon u \equiv \epsilon^2 \Delta u - k^2(x, y) u = f(x, y, \epsilon), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

с краевым условием первого рода (задача Дирихле)

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\epsilon > 0$ — малый параметр, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа, Ω — ограниченная область на плоскости, границей которой является достаточно гладкая кривая $\partial\Omega$, $k(x, y)$ и $f(x, y, \epsilon)$ — достаточно гладкие функции, $k(x, y) > 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$. Гладкость данных k , f , $\partial\Omega$ и отрицательность коэффициента $-k^2(x, y)$ обеспечивают существование единственного классического решения $u(x, y, \epsilon)$ задачи (1), (2). Наша цель состоит в построении равномерного в $\bar{\Omega}$ асимптотического разложения этого решения по параметру ϵ .

2. Как и в задачах гл. 2, асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) состоит из регулярной и погранслошной частей: $u = \bar{u} + \Pi$. Для построения погранслошной части потребуется переход к новым (локальным) координатам в окрест-

ности границы $\partial\Omega$. Пусть уравнения $\partial\Omega$ имеют вид

$$x = \varphi(l), \quad y = \psi(l), \quad 0 \leq l \leq l_0,$$

где l — параметр, при возрастании которого от 0 до l_0 точка $(\varphi(l), \psi(l))$ пробегает вдоль $\partial\Omega$ так, что область Ω остается слева. В некоторой δ -окрестности кривой $\partial\Omega$ введем новые координаты следующим образом. Пусть точка $M(x, y)$ из области $\bar{\Omega}$ лежит на нормали к $\partial\Omega$ в точке $M'(\varphi(l), \psi(l))$, (рис. 16).

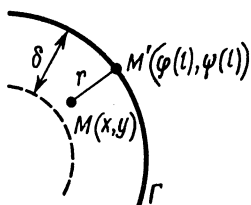


Рис. 16

Расстояние MM' обозначим буквой r . Пару чисел (r, l) примем в качестве новых координат точки M . Если δ -окрестность $\{(0 \leq r \leq \delta) \times (0 \leq l \leq l_0)\}$ достаточно узкая, т. е. δ достаточно мало, то в пределах этой окрестности нормали к $\partial\Omega$, проведенные через всевозможные точки $\partial\Omega$, не пересекаются между собой и, следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между координатами (x, y) и (r, l) . Это соответ-

ствие задается уравнениями

$$x = \varphi(l) - r \frac{\varphi'(l)}{\sqrt{\varphi'^2(l) + \psi'^2(l)}}, \quad y = \psi(l) + r \frac{\psi'(l)}{\sqrt{\varphi'^2(l) + \psi'^2(l)}}.$$

Переходя в δ -окрестности $\partial\Omega$ к новым переменным (r, l) , получим для оператора \mathcal{L}_ε выражение

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \alpha(r, l) \frac{\partial^2}{\partial l^2} + \beta(r, l) \frac{\partial}{\partial r} + \gamma(r, l) \frac{\partial}{\partial l} \right) - k^2(x(r, l), y(r, l)),$$

$$\text{где } \alpha(r, l) = \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)^2, \quad \beta(r, l) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \quad \gamma(r, l) = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2}.$$

Произведем теперь растяжение переменной $r: r = \varepsilon \rho$. Тогда, раскладывая коэффициенты в ряды по степеням ε , получим

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2(l) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{L}_i,$$

где $k^2(l) = k^2(\varphi(l), \psi(l))$, \mathcal{L}_i — линейные дифференциальные операторы, содержащие операции дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial l}$, $\frac{\partial^2}{\partial l^2}$.

3. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2)

будем строить в виде

$$u(x, y, \varepsilon) = \bar{u} + \Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{u}_k(x, y) + \Pi_k(\rho, l)). \quad (3)$$

Подставляя ряд (3) в (1), (2) и раскладывая $f(x, y, \varepsilon)$ в ряд по степеням ε , приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^2 \Delta - k^2(x, y)\} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, y) + \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2(l) \right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \mathcal{L}_i \right\} \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k(\rho, l) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(x, y), \end{aligned} \quad (1')$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{u}_k(l) + \Pi_k(0, l)) = 0, \quad (2')$$

где $\bar{u}_k(l) = \bar{u}_k(\varphi(l), \psi(l))$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях равенства (1'), причем отдельно зависящие от (x, y) и отдельно зависящие от (ρ, l) , получаем уравнения для определения коэффициентов ряда (3).

Для регулярных членов асимптотики имеем уравнения

$$-k^2(x, y) \bar{u}_0 = f_0(x, y), \quad -k^2(x, y) \bar{u}_1 = f_1(x, y),$$

$$\Delta \bar{u}_{k-2} - k^2(x, y) \bar{u}_k = f_k(x, y), \quad k=2, 3, \dots,$$

откуда

$$\bar{u}_0 = -f_0(x, y)/k^2(x, y), \quad \bar{u}_1 = -f_1(x, y)/k^2(x, y),$$

$$\bar{u}_k = -(f_k(x, y) - \Delta \bar{u}_{k-2})/k^2(x, y), \quad k=2, 3, \dots$$

4. Отметим, что регулярная часть асимптотики не удовлетворяет, вообще говоря, краевому условию (2). По терминологии работы [58], регулярные члены асимптотики вносят *невязку* в краевые условия. Для устранения этой невязки и предназначены пограничные функции $\Pi_k(\rho, l)$. Совместно с регулярными членами, как показывает равенство (2'), они удовлетворяют краевому условию (2).

Для пограничных функций получаются обыкновенные дифференциальные уравнения (l играет роль параметра)

$$\frac{\partial^2 \Pi_k}{\partial \rho^2} - k^2(l) \Pi_k = \pi_k(\rho, l), \quad \rho \geq 0, \quad (4)$$

где $\pi_0 = 0$, $\pi_k(\rho, l) = -\sum_{j=1}^k \mathcal{L}_j \Pi_{k-j}(\rho, l)$, $k \geq 1$. Таким образом,

правые части уравнения для Π_k рекуррентно выражаются через функции Π_j с меньшими номерами ($j < k$). Из (2') следует граничное условие при $\rho = 0$:

$$\Pi_k(0, l) = -\bar{u}_k(l). \quad (5)$$

Кроме того, потребуем, чтобы Π -функции стремились к нулю при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\Pi_k(\infty, l) = 0. \quad (6)$$

Решения задач (4) — (6) последовательно находятся в явном виде, в частности

$$\Pi_0(\rho, l) = -\bar{u}_0(l) \exp(-k(l)\rho),$$

а остальные функции $\Pi_k(\rho, l)$ представляют собой произведения многочленов относительно ρ на функцию $\exp(-k(l)\rho)$. Отсюда следует, что все Π -функции имеют экспоненциальную оценку

$$|\Pi_k(\rho, l)| \leq c \exp(-\kappa\rho).$$

Как и ранее, c и κ обозначают подходящие положительные числа, вообще говоря, разные для разных Π -функций.

Заметим теперь, что хотя формально Π -функции определены для $\rho \geq 0$, фактически они имеют смысл только при $0 \leq \rho \leq \delta/\varepsilon$, т. е. в δ -окрестности $\partial\Omega$, где введены локальные координаты (r, l) . Для гладкого продолжения их на всю область $\bar{\Omega}$ применим стандартный прием: умножим построенные Π -функции на сглаживающую (бесконечно дифференцируемую) функцию $\Psi(r)$ такую, что $\Psi(r) = 1$ при $0 \leq r \leq \delta/3$, $0 \leq \Psi(r) \leq 1$ при $\delta/3 \leq r \leq 2\delta/3$, $\Psi(r) = 0$ при $r \geq 2\delta/3$. В качестве окончательных Π -функций возьмем $\Pi_k(\rho, l)\Psi(r)$. Они однозначно определены во всей области $\bar{\Omega}$. При $0 \leq r \leq \delta/3$ $\Pi_k\Psi$ в точности совпадают с функциями Π_k , а при $r \geq \delta/3$ функции $\Pi_k(\rho, l)$ асимптотически меньше любой степени ε : $|\Pi_k(\rho, l)| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa\delta}{3\varepsilon}\right) = o(\varepsilon^N)$ для любого $N > 0$ при $r \geq \delta/3$. Итак, описанная процедура изменила каждую Π -функцию на величину, меньшую любой степени ε . В последующих задачах, там, где это необходимо, будем считать пограничные функции продолженными на всю область таким же образом, как в данном случае, не оговаривая это особо.

Для дальнейшего изложения полезно ввести следующее определение.

Определение. Будем говорить, что Π -функции определяются с помощью оператора $\mathcal{L}_\Pi = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - k^2(l)$ и граничных

условий (5), (6), а сам оператор \mathcal{L}_Π будем называть пограничным оператором в окрестности $\partial\Omega$.

8.2. Оценка остаточного члена

Обозначим через $U_n(x, y, \varepsilon)$ n -ю частичную сумму ряда (3):

$$U_n(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k(x, y) + \Pi_k(\rho, l)).$$

Теорема 8.1. Ряд (3) является асимптотическим рядом для решения $u(x, y, \varepsilon)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области $\bar{\Omega}$, т. е. справедлива оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Доказательство. Положим $w(x, y, \varepsilon) = u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)$. Подставляя $u = U_n + w$ в (1), (2), получим для остаточного члена w краевую задачу

$$\varepsilon^2 \Delta w - k^2(x, y) w = h(x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $h(x, y, \varepsilon) = f(x, y, \varepsilon) - \varepsilon^2 \Delta U_n + k^2(x, y) U_n$. Из самого способа построения U_n следует, что $h(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ в Ω .

Пусть (x_0, y_0) — точка из Ω , в которой $w(x, y, \varepsilon)$ принимает наибольшее положительное значение. Тогда в этой точке $\Delta w \leq 0$, а из уравнения для w получаем

$$w(x_0, y_0, \varepsilon) \leq \frac{|h(x_0, y_0, \varepsilon)|}{k^2(x_0, y_0)} = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Аналогично, если (x_1, y_1) — точка из Ω , в которой $w(x, y, \varepsilon)$ принимает наименьшее отрицательное значение, то

$$|w(x_1, y_1, \varepsilon)| \leq \frac{|h(x_1, y_1, \varepsilon)|}{k^2(x_1, y_1)} = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Отсюда следует, что $\max_{\bar{\Omega}} |w(x, y, \varepsilon)| = \max_{\bar{\Omega}} |u - U_n| = O(\varepsilon^{n+1})$,

что и требовалось доказать.

8.3. Заключительные замечания

Мы рассмотрели метод Люстерника—Вишика на простом примере. Отметим, что даже в этом простом примере точное решение задачи найти нельзя. В то же время асимптотическое приближение с любой точностью элементарно находится в явном виде.

Метод Люстерника—Вишика развит и для более общих уравнений и систем уравнений, причем не только эллиптического, но и параболического и гиперболического типов. Основным достоинством метода является его простота. Как правило, по-

граничные функции определяются как решения обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых независимой переменной выступает растянутое расстояние вдоль нормали к границе (переменная ρ в рассмотренном примере). Вместе с тем возможны случаи, когда погранслоем описывается более сложными, например параболическими, уравнениями. Обзор работ по методу Люстерника—Вишика и обширная библиография содержатся в статье [109].

§ 9. Угловые пограничные функции

9.1. Уравнение эллиптического типа в прямоугольнике

1. Существенным условием задачи, рассмотренной в § 8, было то, что граница $\partial\Omega$ области Ω представляла собой гладкую кривую. В любой точке $\partial\Omega$ существовала нормаль и пограничные функции строились как решения обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль каждой нормали.

Если же граница области не является гладкой, а содержит угловые точки, то погранслоенная структура решений сингулярно возмущенных задач усложняется в окрестности таких точек. Рассмотренный в § 8 метод становится недостаточным. Для описания пограничного слоя в окрестности угловой точки приходится вводить новый тип пограничных функций — *угловые пограничные функции*. Мы рассмотрим метод угловых пограничных функций сначала на примере того же эллиптического уравнения, что и в § 8, но в качестве области Ω возьмем прямоугольник — область с четырьмя угловыми точками границы.

Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u - k^2(x, y) u &= f(x, y, \varepsilon), \\ (x, y) \in \Omega &= (0 < x < a) \times (0 < y < b), \end{aligned} \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

В отношении функций $k(x, y)$ и $f(x, y, \varepsilon)$ сохраним те же предположения, что и в § 8.

2. Асимптотическое разложение решения $u(x, y, \varepsilon)$ задачи (1), (2) будем строить в виде

$$u = \bar{u} + \Pi + P. \quad (3)$$

Здесь $\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k(x, y)$ — регулярная часть асимптотики, ко-

торая определяется точно так же, как в § 8, буквой Π обозначены пограничные функции, играющие роль вблизи сторон прямоугольника, а буквой P — угловые пограничные функции, играющие роль вблизи вершин прямоугольника. В соответствии

с числом сторон прямоугольника Π -функции состоят из четырех слагаемых:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)} + \Pi^{(4)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\Pi_k^{(1)}(x, \eta) + \Pi_k^{(2)}(\xi, y) + \Pi_k^{(3)}(x, \eta_*) + \Pi_k^{(4)}(\xi_*, y) \right), \end{aligned}$$

где $\eta = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, $\eta_* = (b-y)/\varepsilon$, $\xi_* = (a-x)/\varepsilon$ — погранслойные переменные. Каждая из них играет такую же роль в окрестности соответствующей стороны, что и погранслойная переменная $\rho = r/\varepsilon$ в окрестности $\partial\Omega$ (см. § 8). Чтобы не повторять стереотипного описания процедуры определения Π -функций для каждой стороны (она аналогична процедуре построения Π -функций в § 8), будем указывать только соответствующий погранслойный оператор и граничные условия.

Функции $\Pi_k^{(1)}(x, \eta)$, служащие для описания погранслоя в окрестности стороны $y=0$, определяются с помощью погранслойного оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - k^2(x, 0), \quad \eta > 0,$$

и граничных условий

$$\Pi_k^{(1)}(x, 0) = -\bar{u}_k(x, 0), \quad \Pi_k^{(1)}(x, \infty) = 0.$$

Тем самым $\Pi_k^{(1)}$ -функции устраняют невязку, внесенную в граничное условие на стороне $y=0$ регулярной частью асимптотики.

Для $\Pi_0^{(1)}(x, \eta)$ получается выражение

$$\Pi_0^{(1)}(x, \eta) = -\bar{u}_0(x, 0) \exp(-k(x, 0)\eta), \quad (4)$$

и далее можно последовательно найти в явном виде $\Pi_k^{(1)}(x, \eta)$ для $k=1, 2, \dots$. Все эти функции имеют экспоненциальную оценку

$$\left| \Pi_k^{(1)}(x, \eta) \right| \leq c \exp(-k\eta). \quad (5)$$

Аналогично, функции $\Pi_k^{(2)}(\xi, y)$ определяются с помощью погранслойного оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - k^2(0, y), \quad \xi > 0,$$

и граничных условий

$$\Pi_k^{(2)}(0, y) = -\bar{u}_k(0, y), \quad \Pi_k^{(2)}(\infty, y) = 0.$$

Для $\Pi_0^{(2)}(\xi, y)$ получается выражение

$$\Pi_0^{(2)}(\xi, y) = -\bar{u}_0(0, y) \exp(-k(0, y)\xi). \quad (6)$$

Последующие $\Pi_k^{(2)}(\xi, y)$ ($k=1, 2, \dots$) также находятся в явном виде и имеют оценку типа (5):

$$\left| \Pi_k^{(2)}(\xi, y) \right| \leq c \exp(-k\xi).$$

Таким же образом определяются пограничные функции $\Pi_k^{(3)}(x, \eta_*)$ и $\Pi_k^{(4)}(\xi_*, y)$.

3. Заметим теперь, что пограничные функции $\Pi_k^{(1)}(x, \eta)$, устраняя невязку в граничном условии на стороне $y=0$, в свою очередь вносят дополнительные невязки в граничные условия на сторонах $x=0$ и $x=a$. Эти невязки существуют вблизи угловых точек $(0, 0)$ и $(a, 0)$, а далее с ростом y они экспоненциально затухают в силу (5). Аналогичные невязки вносят функции $\Pi_k^{(2)}(\xi, y)$ на стороны $y=0$ и $y=b$, функции $\Pi_k^{(3)}(x, \eta_*)$ — на стороны $x=0$ и $x=a$, а функции $\Pi_k^{(4)}(\xi_*, y)$ — на стороны $y=0$ и $y=b$.

Для устранения этих невязок и вводятся угловые пограничные функции. В соответствии с числом вершин прямоугольника P -функции состоят из четырех слагаемых:

$$P = P^{(1)} + P^{(2)} + P^{(3)} + P^{(4)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(P_k^{(1)}(\xi, \eta) + P_k^{(2)}(\xi, \eta_*) + P_k^{(3)}(\xi_*, \eta_*) + P_k^{(4)}(\xi_*, \eta) \right).$$

В частности, P -функции служат для устранения невязок, внесенных Π -функциями в граничное условие на стороне $x=0$ и Π -функциями в граничное условие на стороне $y=0$. Уравнения для функций $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$ получаются из исходного уравнения (1) (точнее, из однородного уравнения, соответствующего (1)) стандартным способом: переходом к переменным $\xi=x/\varepsilon$, $\eta=y/\varepsilon$, разложением коэффициента $k^2(\varepsilon\xi, \xi\eta)$ в ряд по степеням ε и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях ε в обеих частях уравнения. Это приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 P_k^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P_k^{(1)}}{\partial \eta^2} - k^2(0, 0) = p_k(\xi, \eta), \quad \xi > 0, \eta > 0, \quad (7)$$

где $p_k(\xi, \eta)$ рекуррентно выражаются через функции $P_i^{(1)}(\xi, \eta)$ с номерами $i < k$, в частности $p_0(\xi, \eta) = 0$. В соответствии с значением функций $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$ граничные условия для них зададим в виде

$$P_k^{(1)}(0, \eta) = -\Pi_k^{(1)}(0, \eta), \quad P_k^{(1)}(\xi, 0) = -\Pi_k^{(2)}(\xi, 0). \quad (8)$$

Кроме того, потребуем, чтобы P -функции стремились к нулю при стремлении к бесконечности каждой из погранслойных переменных:

$$P_k^{(1)}(\xi, \eta) \rightarrow 0 \text{ при } (\xi + \eta) \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Решения задач (7)–(9) можно последовательно выразить в явном виде через функцию Грина. В следующем пункте мы сделаем это для функции $P_0^{(1)}$ и покажем, что P -функции имеют экспоненциальную оценку

$$|P_k^{(1)}(\xi, \eta)| \leq c \exp(-\kappa(\xi + \eta)). \quad (10)$$

Угловые погранфункции $P_k^{(l)}$, $l=2, 3, 4$, играющие роль в окрестностях остальных вершин прямоугольника Ω , определяются аналогично и имеют аналогичные экспоненциальные оценки.

4. Перейдем к доказательству оценки (10). Рассмотрим задачу для $P_0^{(1)}(\xi, \eta)$, т. е. уравнение (7) и граничные условия (8), (9) при $k=0$. Учитывая выражения (4) и (6), граничные условия (8) можно записать в виде

$$P_0^{(1)}(0, \eta) = q \exp(-k\eta), \quad P_0^{(1)}(\xi, 0) = q \exp(-k\xi),$$

где $q = u_0(0, 0)$, $k = k(0, 0)$. Полагая

$$P_0^{(1)}(\xi, \eta) = q \exp(-k(\xi + \eta)) + v(\xi, \eta), \quad (11)$$

получим для $v(\xi, \eta)$ следующую задачу:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - k^2(0, 0)v = -qk^2 \exp(-k(\xi + \eta)), \quad \xi > 0, \quad \eta > 0,$$

$$v(0, \eta) = 0, \quad v(\xi, 0) = 0,$$

$$v(\xi, \eta) \rightarrow 0 \text{ при } (\xi + \eta) \rightarrow \infty.$$

Ее решение имеет вид [108]

$$v(\xi, \eta) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) q k^2 \exp(-k(\xi_0 + \eta_0)) d\xi_0 d\eta_0,$$

где $G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2\pi} (K_0(kR_1) + K_0(kR_2) - K_0(kR_3) - K_0(kR_4))$

— функция Грина, $K_0(z)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента (функция Макдональда),

$$R_1 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi + \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2},$$

$$R_3 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2}, \quad R_4 = \sqrt{(\xi + \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}.$$

При оценке $v(\xi, \eta)$ воспользуемся весьма грубой, но достаточной для поставленных целей оценкой функции $K_0(z)$ при $z > 0$ (она следует из асимптотики $K_0(z)$ при малых и при больших z):

$$0 < K_0(z) \leq c(|\ln z| + 1) \exp(-z),$$

$c > 0$ — некоторая постоянная, а также неравенством $K_0(z_1) \leq K_0(z_2)$ при $z_1 \geq z_2$. Тогда имеем

$$G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) \leq \frac{4}{2\pi} K_0(kR_1) \leq c(|\ln R_1| + 1) \exp(-kR_1).$$

Используя также неравенство

$$R_1 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} \geq \frac{1}{2} (|\xi - \xi_0| + |\eta - \eta_0|),$$

получим

$$|v(\xi, \eta)| \leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} c(|\ln R_1| + 1) \exp\left(-\frac{k}{2} R_1\right) \exp\left[-\frac{k}{4} (|\xi - \xi_0| + |\eta - \eta_0|) - k(\xi_0 + \eta_0)\right] d\xi_0 d\eta_0.$$

Нетрудно видеть, что

$$-\frac{k}{4} (|\xi - \xi_0| + |\eta - \eta_0|) - k(\xi_0 + \eta_0) \leq -\kappa(\xi + \eta),$$

где в качестве κ можно взять любое число из промежутка $0 < \kappa \leq k/4$. Наконец, учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (|\ln R_1| + 1) \exp\left(-\frac{k}{2} R_1\right) d\xi_0 d\eta_0 \leq c,$$

окончательно получаем

$$|v(\xi, \eta)| \leq c \exp(-\kappa(\xi + \eta)).$$

Из (11) следует, что $P_0^{(1)}(\xi, \eta)$ имеет такую же оценку. Итак, оценка (10) для $P_0^{(1)}(\xi, \eta)$ доказана.

Для следующих функций $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$ ($k \geq 1$) эта оценка легко доказывается по индукции. Для $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$ имеем уравнение (7), в котором правая часть линейно зависит от $P_i^{(1)}(\xi, \eta)$ с номерами $i < k$. Отсюда следует, что если $P_i^{(1)}(\xi, \eta)$ при $i < k$ имеют оценку типа (10), то такую же оценку будут иметь $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$, а тогда в точности так же, как для $P_0^{(1)}(\xi, \eta)$, получается экспоненциальная оценка для $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$.

Таким же образом доказываются экспоненциальные оценки для $P_k^{(l)}$, $l=2, 3, 4$.

Отметим, что в силу оценки (10) функции $P_k^{(1)}(\xi, \eta)$ существуют лишь в малой окрестности угловой точки $(0, 0)$ прямоугольника Ω , а далее экспоненциально затухают по мере удаления от точки $(0, 0)$. Этим и объясняется их название *угловые пограничные функции*.

Для дальнейшего полезно ввести следующее определение.

Определение. Будем говорить, что P -функции определяются с помощью оператора $\mathcal{L}_P = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - k^2(0, 0)$ и граничных условий (8), (9), а сам оператор \mathcal{L}_P будем называть погранслоиным оператором в окрестности вершины $(0, 0)$.

5. В точности так же, как в § 8, доказывается следующая теорема.

Теорема 9.1. Ряд (3) является асимптотическим рядом для решения $u(x, y, \varepsilon)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

9.2. О других эллиптических уравнениях с угловым погранслоем

Рассмотренное уравнение (1) не содержало производных первого порядка. Оказывается, если добавить в уравнение (1) младшие производные даже с малыми множителями, то погранслоиная структура асимптотики может существенно измениться. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 A(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - k^2(x, y) u = f(x, y, \varepsilon)$$

в прямоугольнике $\Omega = (0 < x < a) \times (0 < y < b)$ с краевыми условиями (2). По сравнению с уравнением (1) здесь добавлен член $-\varepsilon^2 A(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}$.

Если $\alpha \geq 1$, то погранслоная структура решения такая же, как описанная в п. 9.1. Если же $0 < \alpha < 1$, то погранслоные операторы в окрестностях сторон $y=0$ и $y=b$, а также в окрестностях вершин существенно изменяются, причем их вид зависит от знаков коэффициента $A(x, y)$ на этих сторонах. Пусть

$$A(x, 0) > 0, \quad A(x, b) > 0$$

и пусть $\alpha = 1/2$. В этом случае асимптотическое разложение решения представляет собой ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Пограничные функции $\Pi_k(x, \eta)$ ($\eta = y/\sqrt{\varepsilon}$) в окрестности стороны $y=0$ определяются с помощью погранслоного оператора

$$-A(x, 0) \frac{\partial}{\partial \eta} - k^2(x, 0) \quad (\eta > 0) \text{ и граничного условия } \Pi_k(x, 0) = -\bar{u}_k(x, 0),$$

где $\bar{u}_k(x, y)$ — регулярные члены асимптотики.

Пограничные функции $\Pi_k(x, \eta_*)$ ($\eta_* = (b-y)/\varepsilon^{3/2}$) в окрестности стороны $y=b$ определяются с помощью погранслоного оператора $\frac{\partial^2}{\partial \eta_*^2} + A(x, b) \frac{\partial}{\partial \eta_*}$ ($\eta_* > 0$) и граничных условий

$$\Pi_k(x, 0) = -\bar{u}_k(x, b), \quad \Pi_k(x, \infty) = 0.$$

Как видим, погранслоные операторы в окрестностях сторон $y=0$ и $y=b$ отличаются от тех, что были в п. 9.1. Другой отличительной особенностью является наличие разномасштабных погранслоных переменных: вблизи стороны $y=0$ переменная y растягивается с коэффициентом $\sqrt{\varepsilon}$, вблизи стороны $y=b$ — с коэффициентом $\varepsilon^{3/2}$.

В окрестностях сторон $x=0$ и $x=a$ погранслоные операторы не меняются. Так, пограничные функции $\Pi_k(\xi, y)$ ($\xi = x/\varepsilon$) в окрестности стороны $x=0$ определяются, как и ранее, с помощью погранслоного оператора $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - k^2(0, y)$ ($\xi > 0$) и граничных условий $\Pi_k(0, y) = -\bar{u}_k(0, y)$, $\Pi_k(\infty, y) = 0$.

Существенные изменения претерпевают угловые погранслоные операторы. Пограничные функции $P_k(\xi, \eta)$ в окрестности вершины $(0, 0)$ определяются теперь с помощью параболического оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - A(0, 0) \frac{\partial}{\partial \eta} - k^2(0, 0) \quad (\xi > 0, \eta > 0)$$

и граничных условий

$$P_k(\xi, 0) = -\bar{\Pi}_k(\xi, 0), \quad P_k(0, \eta) = -\bar{\Pi}_k(0, \eta).$$

Аналогичный параболический погранслойный оператор возникает в окрестности вершины $(a, 0)$.

В окрестности каждой из вершин $(0, b)$ и (a, b) появляются два типа угловых пограничных функций. Рассмотрим их для вершины $(0, b)$. Угловые пограничные функции первого типа (обозначим их $R_k^{(2)}(\xi, \eta_*)$) определяются с помощью обыкновенного дифференциального оператора $\frac{\partial^2}{\partial \eta_*^2} + A(0, b) \frac{\partial}{\partial \eta_*}$ ($\eta_* > 0$) и граничных условий $R_k^{(2)}(\xi, 0) = -\Pi_k^{(2)}(\xi, b)$, $R_k^{(2)}(\xi, \infty) = 0$. Отметим, что они вносят невязку в граничное условие на стороне $x=0$. Наконец, угловые пограничные функции $P_k^{(2)}(\zeta, \eta_*)$ ($\zeta = x/\varepsilon^{3/2}$) определяются с помощью эллиптического оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_*^2} + A(0, b) \frac{\partial}{\partial \eta_*} \quad (\zeta > 0, \eta_* > 0)$$

и граничных условий

$$P_k^{(2)}(\zeta, 0) = 0, \quad P_k^{(2)}(0, \eta_*) = -[\Pi_k^{(3)}(0, \eta_*) + R_k^{(2)}(0, \eta_*)], \\ P_k^{(2)}(\zeta, \eta_*) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (\zeta + \eta_*) \rightarrow \infty.$$

Все пограничные функции имеют экспоненциальные оценки типа (5), (10) по погранслойным переменным.

Отметим, что угловые пограничные функции $P_0^{(1)}(\xi, \eta)$ и $P_1^{(1)}(\xi, \eta)$ (а также $P_k^{(4)}(\xi_*, \eta)$ ($k=0, 1$) в окрестности вершины $(a, 0)$) имеют неограниченные в окрестности точки $(0, 0)$ вторые производные по η . Эти вторые производные входят в правые части уравнений соответственно для $P_2^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$. В свою очередь, вторые производные по η функций $P_2^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$, имеющие еще больший порядок особенности в точке $(0, 0)$, войдут в правые части уравнений для следующих членов асимптотики, так что порядок особенности будет расти с ростом номера P -функций. Это не позволяет продолжить итерационный процесс определения функций $P_k^{(1)}$ (и также $P_k^{(4)}$) дальше первого шага. Если ограничиться только членами асимптотики нулевого порядка, то их сумма дает равномерное в $\bar{\Omega}$ асимптотическое приближение для решения с точностью порядка ε . Если же исключить сколь угодно малые, но фиксированные при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестности вершин $(0, 0)$ и $(a, 0)$, то в оставшейся части прямоугольни-

ка $\bar{\Omega}$ n -я частичная сумма построенного разложения дает приближение к решению с точностью порядка $\varepsilon^{(n+1)/2}$.

Асимптотические разложения с угловыми пограничными функциями построены и для решений ряда эллиптических систем [30, 32, 33].

9.3. Параболические уравнения с угловым погранслоем

1. Сингулярно возмущенные параболические системы уравнений вида

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \Delta u \right) = f(u, v, x, t, \varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial t} - b \Delta v = g(u, v, x, t, \varepsilon), \quad (12)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, возникают при математическом описании химических реакций с учетом диффузии. Компоненты вектор-функций u и v являются концентрациями реагирующих веществ, а малый параметр ε — величиной, обратной константам скоростей быстрых реакций. Такого же типа системы появляются и в других прикладных задачах (см. ниже гл. 4). Мы рассмотрим построение асимптотического разложения по ε решения краевой задачи для системы (12). Чтобы упростить изложение алгоритма, ограничимся случаем, когда медленные переменные отсутствуют (нет второго уравнения в (12)), а x — одномерная переменная. Кроме того, для удобства записи малый параметр при производных обозначим через ε^2 .

2. Итак, рассмотрим систему уравнений (u — вектор-функция произвольной размерности m)

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = f(u, x, t, \varepsilon) \quad (13)$$

$$(x, t) \in \Omega = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x) \quad (14)$$

и краевыми условиями второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0 \quad (15)$$

(такие краевые условия характерны для задач химической кинетики).

Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $a(x, t) > 0$, $f(u, x, t, \varepsilon)$, $\varphi(x)$ достаточно гладкие (для построения асимптотики n -го порядка $n+2$ раза непрерывно дифференцируемые), а условия (14) и (15) согласованы в угловых точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω : $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.

II. Вырожденное уравнение $f(\bar{u}, x, t, 0) = 0$ (оно получается из (13) при $\varepsilon = 0$) имеет в прямоугольнике $\Omega = (0 \leq x \leq 1) \times (0 \leq t \leq T)$ решение $\bar{u} = \bar{u}_0(x, t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

III. Все собственные значения $\lambda_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, m$) матрицы $\bar{f}_u(x, t) = \bar{f}_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0)$ имеют отрицательные действительные части: $\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) < 0$, $(x, t) \in \bar{\Omega}$.

IV. Решение $\Pi_0(x, \tau)$ начальной задачи (x играет роль параметра, $0 \leq x \leq 1$)

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = f(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \tau \geq 0, \quad (16)$$

$$\Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$$

существует при $\tau \geq 0$ и удовлетворяет условию $\Pi_0(x, \infty) = 0$.

Условие IV означает, что начальное значение $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$ принадлежит области влияния точки покоя $\Pi_0 = 0$ уравнения (16), являющейся асимптотически устойчивой в силу III. Отметим, что условия I—IV полностью аналогичны условиям I—IV из п. 4.2, в частности уравнение (16) — аналог присоединенной системы (7) из § 4.

3. При условиях I—IV построим асимптотическое решение задачи (13)—(15) в виде

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \Pi + Q + Q^* + P + P^* = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau)), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\tau = t/\varepsilon^2$, $\xi = x/\varepsilon$, $\xi_* = (1-x)/\varepsilon$ — погранслоиные переменные; \bar{u}_k — коэффициенты регулярного ряда; Π_k , Q_k , Q_k^* — пограничные функции, служащие для описания погранслоя в окрестностях сторон $t=0$, $x=0$, $x=1$; P_k и P_k^* — угловые пограничные функции, служащие для описания погранслоя в окрестностях вершин $(0, 0)$ и $(1, 0)$ прямоугольника Ω .

Подставим ряд (17) в уравнение (13) и заменим правую часть $f(\bar{u} + \Pi + Q + Q^* + P + P^*, x, t, \varepsilon)$ выражением типа (17):

$$\bar{f} + \Pi f + Q f + Q^* f + P f + P^* f, \quad (18)$$

где $\bar{f} = f(\bar{u}, x, t, \varepsilon)$, $\Pi f = [f(\bar{u} + \Pi, x, t, \varepsilon) - f(\bar{u}, x, t, \varepsilon)]|_{t=\varepsilon^2\tau}$, $Q f = [f(\bar{u} + Q, x, t, \varepsilon) - f(\bar{u}, x, t, \varepsilon)]|_{x=\varepsilon\xi}$, $P f = [f(\bar{u} + \Pi + Q + P, x, t, \varepsilon) - \Pi f - Q f - \bar{f}]|_{x=\varepsilon\xi}$, $Q^* f$ и $P^* f$ аналогичны $Q f$ и

Pf. Теперь можно отделить уравнения для регулярного ряда и различных пограничных рядов и, раскладывая слагаемые в (18) в ряды по степеням ε , получить уравнения для членов искомого разложения (17). Дополнительные условия получаются подстановкой (17) в (14) и (15), откуда имеем:

$$\bar{u}(x, 0, \varepsilon) + \Pi(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad (19)$$

$$Q(\xi, 0, \varepsilon) + P(\xi, 0, \varepsilon) = 0, \quad Q^*(\xi_*, 0, \varepsilon) + P^*(\xi_*, 0, \varepsilon) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(1, t, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q^*}{\partial \xi_*}(0, t, \varepsilon) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P}{\partial \xi}(0, \tau, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x}(1, \tau, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial P^*}{\partial \xi_*}(0, \tau, \varepsilon) = 0. \quad (22)$$

4. Для $\bar{u}_0(x, t)$ получаем уравнение

$$\bar{f}_0 \equiv f(\bar{u}_0, x, t, 0) = 0,$$

совпадающее с вырожденным. Отсюда $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(x, t)$. Для $\bar{u}_k(x, t)$ ($k \geq 1$) имеем линейные уравнения вида

$$\bar{f}_u(x, t) \bar{u}_k = f_k(x, t)$$

($f_k(x, t)$ рекуррентно выражаются через $\bar{u}_i(x, t)$ с номерами $i < k$), откуда $\bar{u}_k = \bar{f}_u^{-1}(x, t) f_k(x, t)$. Заметим, что $\bar{f}_u^{-1}(x, t)$ существует в силу условия III.

5. Для $\Pi_0(x, \tau)$ получается уравнение

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = \Pi_0 f \equiv f(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \tau \geq 0,$$

с начальным условием

$$\Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0).$$

Это условие следует из равенства (19). Задача для $\Pi_0(x, \tau)$, очевидно, совпадает с задачей (16) из требования IV. В силу III и IV для $\Pi_0(x, \tau)$ справедлива оценка

$$\|\Pi_0(x, \tau)\| \leq c \exp(-\kappa \tau). \quad (23)$$

Следующие $\Pi_k(x, \tau)$ ($k \geq 1$) определяются как решения линейных начальных задач

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} = f_u(x, \tau) \Pi_k + \pi_k(x, \tau),$$

$$\Pi_k(x, 0) = -\bar{u}_k(x, 0), \quad (24)$$

где

$$f_u(x, \tau) = f_u(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0(x, \tau), x, 0, 0), \quad (25)$$

а $\pi_k(x, \tau)$ рекуррентно выражаются через $\Pi_i(x, \tau)$, $i < k$. Обозначим через $\Phi(x, \tau)$ фундаментальную матрицу соответствующего однородного уравнения ($\Phi(x, 0) = E$). В силу требования III имеет место оценка

$$\|\Phi(x, \tau)\Phi^{-1}(x, \tau_0)\| \leq c \exp(-\kappa(\tau - \tau_0)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \tau_0 \leq \tau. \quad (26)$$

Используя эту оценку и явное выражение для $\Pi_k(x, \tau)$, имеющее вид

$$\Pi_k(x, \tau) = -\Phi(x, \tau)\bar{u}_k(x, 0) + \int_0^\tau \Phi(x, \tau)\Phi^{-1}(x, \tau_0)\pi_k(x, \tau_0)d\tau_0,$$

нетрудно доказать по индукции, что все Π -функции имеют экспоненциальную оценку типа (23).

6. Для $Q_0(\xi, t)$ получается уравнение (t играет роль параметра, $0 \leq t \leq T$)

$$-a(0, t)\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = Q_0 f \equiv f(\bar{u}_0(0, t) + Q_0, 0, t, 0), \quad \xi \geq 0,$$

с граничным условием

$$\frac{\partial Q_0}{\partial \xi}(0, t) = 0.$$

Это условие следует из первого равенства в (21). Второе граничное условие зададим в виде

$$Q_0(\infty, t) = 0.$$

Тогда $Q_0(\xi, t) = 0$, а для $Q_k(\xi, t)$ ($k \geq 1$) получаются линейные краевые задачи вида

$$-a(0, t)\frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = \bar{f}_u(0, t)Q_k + q_k(\xi, t), \quad (27)$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \xi}(0, t) = -\frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial x}(0, t), \quad Q_k(\infty, t) = 0, \quad (28)$$

где $q_k(\xi, t)$ выражаются рекуррентно через $Q_i(\xi, t)$, $i < k$. Корни характеристического уравнения для (27) равны $\pm \sqrt{-\lambda_i(0, t)/a(0, t)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, где $\lambda_i(x, t)$ — собственные значения матрицы $\bar{f}_u(x, t)$. В силу III m корней имеют отрицательную и m — положительную вещественную часть. Поэтому однородное уравнение, соответствующее (27), имеет m экспоненциально убывающих и m экспоненциально растущих при $\xi \rightarrow \infty$ решений. Это обеспечивает однозначную разрешимость задач (27),

(28). Сами решения можно найти последовательно в явном виде до любого номера с помощью приведения матрицы $\bar{f}_u(0, t)$ к жордановой форме. Все они имеют экспоненциальную оценку

$$\|Q_k(\xi, t)\| \leq c \exp(-\alpha \xi).$$

Функции $Q_k^*(\xi_*, t)$ определяются аналогично Q -функциям и имеют аналогичную оценку.

7. Как и в случае эллиптических уравнений, угловые пограничные функции $P_k(\xi, \tau)$ и $P_k^*(\xi_*, \tau)$ служат для того, чтобы устранить невязки, внесенные Π -функциями в граничные условия при $x=0$ и $x=1$, а также Q - и Q^* -функциями — в начальное условие при $t=0$. Равенства (20) и (22) отражают это назначение угловых погранфункций. Из этих равенств находим начальные и граничные условия для P_k и P_k^* . Кроме того, потребуем, чтобы P -функции стремились к нулю при стремлении каждой погранслошной переменной к бесконечности.

Для $P_0(\xi, \tau)$ получается следующая задача ($a=a(0, 0)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} &= P_0 f \equiv f(\bar{u}_0(0, 0) + \Pi_0(0, \tau) + P_0(0, 0, 0) - \\ &- f(\bar{u}_0(0, 0) + \Pi_0(0, \tau), 0, 0, 0), \quad \xi > 0, \tau > 0, \\ P_0(\xi, 0) &= -Q_0(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial P_0}{\partial \xi}(0, \tau) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $P_0(\xi, \tau) = 0$, а для $P_k(\xi, \tau)$ ($k \geq 1$) имеем линейные краевые задачи вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_k}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - f_u(0, \tau) P_k &= p_k(\xi, \tau), \\ P_k(\xi, 0) &= -Q_k(\xi, 0), \quad \frac{\partial P_k}{\partial \xi}(0, \tau) = -\frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial x}(0, \tau), \end{aligned} \quad (29)$$

где $f_u(0, \tau)$ определяется формулой (25), а $p_k(\xi, \tau)$ выражаются рекуррентно через Π_i, Q_i ($i \leq k$) и P_i ($i < k$). Отметим, что начальное и граничное условия для $P_k(\xi, \tau)$ согласованы в угловой точке $(0, 0)$, т. е. $\frac{\partial Q_k}{\partial \xi}(0, 0) = \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial x}(0, 0)$. Это следует из

равенств $\frac{\partial Q_k}{\partial \xi}(0, 0) = -\frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial x}(0, 0)$ (см. (28)) и $\Pi_{k-1}(x, 0) = -\bar{u}_{k-1}(x, 0)$ (см. (24)), а при $k=1$ нужно также учесть условие $\varphi'(0) = 0$.

Функции $P_k(\xi, \tau)$ находятся в явном виде:

$$P_k(\xi, \tau) = g_k(\xi, \tau) + \int_0^\tau \int_0^\infty G(\xi, \tau, \xi_0, \tau_0) h_k(\xi_0, \tau_0) d\xi_0 d\tau_0,$$

где $g_k(\xi, \tau)$ — произвольная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условиям (29), например

$$g_k(\xi, \tau) = -Q_k(\xi, 0) \exp(-\kappa\tau) + \left[\frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial x}(0, \tau) - \frac{\partial \Pi_{k-1}}{\partial x}(0, 0) \exp(-\kappa\tau) \right] \frac{1}{\kappa} \exp(-\kappa\xi);$$

$$h_k(\xi, \tau) = p_k(\xi, \tau) - \frac{\partial g_k}{\partial \tau} + a \frac{\partial^2 g_k}{\partial \xi^2} + f_u(0, \tau) g_k; \quad G(\xi, \tau, \xi_0, \tau_0) -$$

матрица Грина, имеющая вид

$$G(\xi, \tau, \xi_0, \tau_0) = \Phi(0, \tau) \Phi^{-1}(0, \tau_0) \frac{1}{2 \sqrt{\pi a (\tau - \tau_0)}} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{4a(\tau - \tau_0)} \right] + \exp \left[-\frac{(\xi + \xi_0)^2}{4a(\tau - \tau_0)} \right] \right\};$$

$\Phi(0, \tau)$ — фундаментальная матрица, фигурирующая в (26). В силу (26) для матрицы Грина справедлива оценка

$$\|G(\xi, \tau, \xi_0, \tau_0)\| \leq \frac{c}{\sqrt{\tau - \tau_0}} \exp(-\kappa(|\xi - \xi_0| + \tau - \tau_0)).$$

Используя эту оценку, несложно доказать, что все P -функции имеют экспоненциальную оценку

$$\|P_k(\xi, \tau)\| \leq c \exp(-\kappa(\xi + \tau)).$$

Функции $P_k^*(\xi_*, \tau)$ определяются аналогично P -функциям и имеют аналогичную оценку.

Итак, разложение (17) построено.

8. Справедлива следующая теорема.

Теорема 9.2. Если выполнены условия I—IV, то при достаточно малых ε задача (13)—(15) имеет единственное решение $u(x, t, \varepsilon)$, а ряд (17) является асимптотическим рядом для этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ в прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Не останавливаясь подробно на всех деталях, укажем схему доказательства теоремы. Уравнение для остаточного члена $w = u - U$ ($U = U_n + \varepsilon^{n+1}(Q_{n+1} + Q_{n+1}^* + P_{n+1} + P_{n+1}^*)$, U_n — n -я частичная сумма ряда (17)) запишем в виде

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial w}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - f_u(x, t, \varepsilon) w = h(w, x, t, \varepsilon), \quad (30)$$

где $f_u(x, t, \varepsilon) = f_u(\bar{u}_0(x, t) + \Pi_0(x, t/\varepsilon), x, t, 0)$, $h(w, x, t, \varepsilon) = f(U + w, x, t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} - a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) - f_u(x, t, \varepsilon) w$. Нелинейная относительно w функция h обладает следующими двумя

свойствами, аналогичными свойствам функции g из п. 3.1:

$$1^0. h(0, x, t, \varepsilon) = f(U, x, t, \varepsilon) - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = O(\varepsilon^{n+1})$$

в Ω , что следует из самого способа построения U .

2⁰. Если $\|w_i(x, t, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon$, $i = 1, 2$, то существуют числа $c_2 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется неравенство

$$\sup_{\bar{\Omega}} \|h(w_2, x, t, \varepsilon) - h(w_1, x, t, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon \sup_{\bar{\Omega}} \|w_2 - w_1\|.$$

Используя матрицу Грина, перейдем от уравнения (30) с однородными условиями типа (14), (15) к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} w(x, t, \varepsilon) &= \int_0^t \int_0^t G(x, t, x_0, t_0, \varepsilon) h(w(x_0, t_0, \varepsilon), x_0, t_0, \varepsilon) dx_0 dt_0 \equiv \\ &\equiv \mathcal{L}(w, x, t, \varepsilon). \end{aligned} \quad (31)$$

В силу требования III для матрицы Грина справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|G(x, t, x_0, t_0, \varepsilon)\| &\leq \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \exp\left(-\kappa \frac{t-t_0}{\varepsilon^2}\right) \exp\left[-\kappa \frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}\right]. \end{aligned}$$

Из этой оценки и свойств 1⁰ и 2⁰ функции $h(w, x, t, \varepsilon)$ следует, что интегральный оператор $\mathcal{L}(w, x, t, \varepsilon)$ обладает двумя аналогичными свойствами.

Применив к уравнению (31) метод последовательных приближений

$$w_0 = 0, \quad w_{i+1} = \mathcal{L}(w_i, x, t, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots,$$

можно, как и в п. 3.1, доказать, используя отмеченные два свойства оператора \mathcal{L} , что решение $w(x, t, \varepsilon)$ уравнения (31) существует и единственно при достаточно малых ε и имеет оценку $\max \|w(x, t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1})$, откуда следует, что $\max_{\bar{\Omega}} |u - U_n| = O(\varepsilon^{n+1})$.

9. Аналогично можно построить асимптотику решения для системы (12), содержащей быстрые (функция u) и медленные (функция v) переменные. Однако добавление медленных переменных приводит к тому, что асимптотику вида (17) удастся построить только в нулевом и первом приближениях. Это связано с тем обстоятельством, что начальное и граничные условия для функции $\bar{v}_2(x, t)$ — коэффициента при ε^2 регулярного ряда функции $v(x, t, \varepsilon)$ — оказываются несогласованными в угловых точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$, в результате чего $\bar{v}_2(x, t)$ будет негладкой

в $\bar{\Omega}$ функцией. Производные $\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x^2}$ не ограничены в окрестности угловых точек — имеют особенность порядка $1/\sqrt{t}$. Это не позволяет провести далее первого шага итерационный процесс построения асимптотики, поскольку с каждым шагом порядок особенности возрастает.

10. Метод угловых пограничных функций развит также для уравнений гиперболического типа [14], для систем параболических уравнений [18], для уравнений с частными производными в многомерном случае [15], для разностных уравнений [13]. Он успешно работает во многих прикладных задачах (см. гл. 4).

§ 10. Процедура сглаживания негладких членов асимптотики

10.1. Постановка задачи и алгоритм построения асимптотики решения

1. Построение асимптотики решения во многих сингулярно возмущенных задачах с частными производными сталкивается с той трудностью, что те или иные члены асимптотики оказываются негладкими функциями. Мы уже отмечали случаи такого рода в п. 9.3 — там некоторые члены асимптотики определялись как решения параболических уравнений и имели неограниченные производные, что не давало возможности провести стандартный итерационный процесс построения асимптотического ряда далее первого шага.

В этом параграфе мы рассмотрим случай негладких членов асимптотики иного типа, а именно тот случай, когда какие-то члены асимптотики определяются как решения уравнений с частными производными первого порядка. В результате они оказываются негладкими или даже разрывными на характеристике, выходящей из угловой точки границы. Обычно в такой ситуации для построения асимптотики обращаются к методу сращивания асимптотических разложений [69]. Вместе с тем нулевое и первое приближения, которые обычно достаточны для практических целей, можно получить более простым способом, применяя процедуру сглаживания негладких членов асимптотики.

Рассмотрим одну из задач такого типа (u — скалярная функция, $\varepsilon > 0$ — малый параметр):

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2 a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u, x, t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Omega = (0 < x < 1) \times (0 < t < T),$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0. \quad (4)$$

Будем считать, что выполнено следующее условие:

I. Функции $a(x)$, $b(x)$, $\varphi(x)$, $f(u, x, t, \varepsilon)$ являются достаточно гладкими, причем $a(x) > 0$, $b(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Согласованность начальных и граничных условий не предполагается, в частности $\varphi'(0) \neq 0$. Другие требования будут наложены по ходу построения асимптотики.

2. Асимптотическое приближение с точностью порядка ε^2 для решения задачи (1) — (4) будет построено в виде

$$U(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i (\bar{u}_i(x, t) + \tilde{\Pi}_i(x, \tau, \xi) + S_i(\xi, \tau)). \quad (5)$$

Назначение и способ определения каждого члена, входящего в U , а также вид погранслойных переменных τ и ξ описаны ниже.

Главный член $\bar{u}_0(x, t)$ регулярной части асимптотики определяется как решение вырожденного уравнения

$$b(x) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} = f(\bar{u}_0, x, t, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (6)$$

с начальным условием $\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}(0, t) = 0$ (это условие следует из

(3)). Полагая $x=0$ в уравнении (6) и учитывая начальное условие, приходим к уравнению относительно $\bar{u}_0(0, t)$:

$$f(\bar{u}_0(0, t), 0, t, 0) = 0. \quad (7)$$

II. Пусть уравнение (7) имеет решение (корень) $\bar{u}_0(0, t) = \alpha(t)$, причем

$$f_u(\alpha(t), 0, t, 0) < 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Отметим, что в силу нелинейности уравнение (7) может иметь несколько таких корней, поэтому и задача для $\bar{u}_0(x, t)$ может иметь несколько решений. Выбор нужного корня $\alpha(t)$ произведем следующим образом.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{dz}{d\tau} = f(z, 0, 0, 0), \quad \tau \geq 0; \quad z(0) = \varphi(0), \quad (9)$$

где $\varphi(0)$ — значение функции $\varphi(x)$ из (2) при $x=0$. Точка $z = \alpha(0)$ в силу (8) является асимптотически устойчивой точкой покоя уравнения (9).

III. Пусть значение $\varphi(0)$ принадлежит области влияния точки покоя $z = a(0)$, т. е. решение $z(\tau)$ задачи (9) существует и $z(\tau) \rightarrow a(0)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Это и есть условие, позволяющее выбрать корень уравнения (7). Для нахождения функции $\bar{u}_0(x, t)$ нужно теперь решить уравнение (6) с начальным условием $\bar{u}_0(0, t) = a(t)$.

IV. Пусть уравнение (6) с начальным условием $\bar{u}_0(0, t) = a(t)$ имеет решение на отрезке $0 \leq x \leq 1$.

Функция $\bar{u}_1(x, t)$ определяется как решение линейного дифференциального уравнения

$$b(x) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} = \bar{f}_u(x, t) \bar{u}_1 + f_1(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (10)$$

с начальным условием $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0, t) = 0$. Здесь $\bar{f}_u(x, t) = f_u(\bar{u}_0(x, t),$

$x, t, 0)$, $f_1(x, t) = \bar{f}_e(x, t) - \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t}$ — известная функция. Полагая в

уравнении (10) $x = 0$ и учитывая начальное условие, находим начальное значение функции $\bar{u}_1(x, t)$: $\bar{u}_1(0, t) = -f_1(0, t) / \bar{f}_u(0, t)$. Решение уравнения (10) с этим начальным условием определяется однозначно.

3. Функции $\bar{u}_0(x, t)$ и $\bar{u}_1(x, t)$ вносят невязку в начальное условие (2). Для устранения этой невязки построим пограничные функции $\Pi_0(x, \tau)$ и $\Pi_1(x, \tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. Сразу же отметим, что входящие в асимптотику (5) функции $\tilde{\Pi}_i(x, \tau, \xi)$ — это сглаженные пограничные функции. Они будут введены лишь после того, как будут построены обычные пограничные функции Π_0 и Π_1 .

Для Π_0 стандартным способом получается уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} + b(x) \frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = \Pi_0 f \equiv f(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0) - f(\bar{u}_0(x, 0), x, 0, 0), \quad (11)$$

$$(x, \tau) \in D = (0 \leq x \leq 1) \times (0 \leq \tau < \infty)$$

с дополнительными условиями

$$\Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial x}(0, \tau) = 0. \quad (13)$$

Характеристика

$$\tau = B(x) = \int_0^x dx/b(x),$$

выходящая из угловой точки $(0, 0)$, разделяет область D на две части. При $\tau \leq B(x)$ решение определяется условием (12).

V. Пусть уравнение (11) с начальным условием (12) имеет решение $\Pi_0 = \Pi_0^{(1)}(x, \tau)$ в области $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq B(x)\}$.

Для построения решения при $\tau \geq B(x)$ найдем сначала $\Pi_0(0, \tau)$. Для этого в уравнении (11) положим $x=0$ и воспользуемся условием (13). Получим уравнение для $\Pi_0(0, \tau)$:

$$\frac{\partial \Pi_0(0, \tau)}{\partial \tau} = f(\bar{u}_0(0, 0) + \Pi_0(0, \tau), 0, 0, 0), \quad \tau \geq 0.$$

Из (12) имеем начальное условие $\Pi_0(0, 0) = \varphi(0) - \bar{u}_0(0, 0)$. Замена переменных $z = \Pi_0(0, \tau) + \bar{u}_0(0, 0) = \Pi_0(0, \tau) + \alpha(0)$ сводит задачу для $\Pi_0(0, \tau)$ к задаче (9) для z . В силу требования III решение $\Pi_0(0, \tau)$ существует при $\tau \geq 0$, причем $\Pi_0(0, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Обозначим это решение через $\beta(\tau)$. Условие (8) обеспечивает экспоненциальную оценку $\beta(\tau) : |\beta(\tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau)$. Для нахождения $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq B(x)$ нужно решить теперь уравнение (11) с дополнительным условием $\Pi_0(0, \tau) = \beta(\tau)$. Обозначим $\Pi_0(x, \tau)$ при $\tau \geq B(x)$ через $\Pi_0^{(2)}(x, \tau)$. В силу экспоненциальной оценки для $\beta(\tau)$ функция $\Pi_0^{(2)}(x, \tau)$ имеет такую же оценку:

$$|\Pi_0^{(2)}(x, \tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \tau \geq B(x). \quad (14)$$

Ясно, что такую же оценку имеет и вся функция $\Pi_0(x, \tau)$.

Функция $\Pi_1(x, \tau)$ определяется как решение линейной задачи

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} + b(x) \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \Pi_1 f = f_u(x, \tau) \Pi_1 + \pi_1(x, \tau), \quad (x, \tau) \in D, \quad (15)$$

$$\Pi_1(x, 0) = -\bar{u}_1(x, 0), \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}(0, \tau) = 0, \quad (16)$$

где $f_u(x, \tau) = f_u(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0(x, \tau), x, 0, 0)$, $\pi_1(x, \tau)$ — известная функция, которую нетрудно выписать в явном виде и которая имеет оценку типа (14). Функция $\Pi_1(x, \tau)$ (подобно $\Pi_0(x, \tau)$) при $\tau \leq B(x)$ определяется с помощью первого из условий (16), а при $\tau \geq B(x)$ — с помощью второго из условий (16). Введем обозначения: $\Pi_1 = \Pi_1^{(1)}(x, \tau)$ при $\tau \leq B(x)$, $\Pi_1 = \Pi_1^{(2)}(x, \tau)$ при $\tau \geq B(x)$. Для $\Pi_1^{(2)}(x, \tau)$ (а значит, и для всей функции $\Pi_1(x, \tau)$) справедлива оценка типа (14).

4. Заметим теперь, что Π_0 и Π_1 являются непрерывными функциями в области D , но их производные разрывны на характеристике $\tau = B(x)$. Это не позволяет вести дальше итерационный процесс построения Π -функций. Более того, найденные функции Π_0 и Π_1 не удовлетворяют уравнениям (11) и (15) на характе-

ристике $\tau = B(x)$, а потому недостаточны для построения асимптотического приближения решения с точностью $O(\varepsilon^2)$.

Произведем сглаживание П-функций. Для этого продолжим гладким образом $\overset{(1)}{\Pi}_i(x, \tau)$ в область $\tau > B(x)$, а $\overset{(2)}{\Pi}_i(x, \tau)$ в область $\tau < B(x)$. Гладкое продолжение $\overset{(1)}{\Pi}_0(x, \tau)$ в область $\tau > B(x)$ можно построить, например, так: продолжаем гладким образом функции $b(x)$ $f(u, x, 0, 0)$, $\varphi(x)$ и $\bar{u}_0(x, 0)$ в область $x < 0$ с сохранением знака $b(x)$, а затем решаем уравнение (11) в области $\{x \leq 1, \tau \geq 0\}$ с начальным условием (12). Полученное гладкое решение совпадает с $\overset{(1)}{\Pi}_0(x, \tau)$ в области $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \tau \leq B(x)\}$. Аналогично можно построить гладкие продолжения остальных функций $\overset{(k)}{\Pi}_i$.

Введем теперь новую переменную $\xi = (B(x) - \tau)/\varepsilon$ и новые (сглаженные) П-функции:

$$\tilde{\Pi}_i(x, \tau, \xi) = \overset{(1)}{\Pi}_i(x, \tau) g(\xi) + \overset{(2)}{\Pi}_i(x, \tau) g(-\xi),$$

где

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp(-s^2) ds.$$

Функции $\tilde{\Pi}_i$, как и продолженные $\overset{(1)}{\Pi}_i, \overset{(2)}{\Pi}_i$, являются гладкими во всей области D , и при этом (так как $g(-\infty) = 0, g(\infty) = 1$) $\tilde{\Pi}_i$ стлчаются от $\overset{(1)}{\Pi}_i(x, \tau)$ сколь угодно мало вне малой окрестности характеристики $\tau = B(x)$. Более точно, при $|\tau - B(x)| \geq \geq A\varepsilon |\ln \varepsilon|$ разность $\tilde{\Pi}_i - \overset{(1)}{\Pi}_i$ является величиной порядка ε^N , причем N сколь угодно велико при достаточно больших A . Однако вблизи характеристики $\tau = B(x)$ функция $\tilde{\Pi}_i$ отличается от $\overset{(1)}{\Pi}_i$ на величину порядка ε . Поэтому замена негладких функций $\overset{(1)}{\Pi}_i$ на гладкие $\tilde{\Pi}_i$ вносит в уравнение (1) и условия (2), (3) невязки порядка ε .

Несложный, но достаточно громоздкий расчет показывает, что невязка, вносимая функцией $\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}_0 + \varepsilon \tilde{\Pi}_1$ в уравнение, имеет вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon \tilde{\Pi} - \tilde{\Pi} f = \varepsilon q(\tau) (\xi^2 - 1) \exp(-\xi^2) + O(\varepsilon^2), \text{ где } \tilde{\Pi} f = f(\bar{u} + \tilde{\Pi}, x, t, \varepsilon) - f(\bar{u}, x, t, \varepsilon),$$

$$q(\tau) = \frac{2b(0)}{\sqrt{\pi}} \varphi'(0) \alpha(\tau) \exp \left\{ \int_0^{B^{-1}(\tau)} [f_u(s)/b(s)] ds \right\},$$

$\alpha(\tau) = a(B^{-1}(\tau))/b^2(B^{-1}(\tau))$, $B^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к $\tau = B(x)$, $f_u(s) = f_u(\bar{u}_0(s, 0) + \Pi_0(s, B(s)), s, 0, 0)$.

Вычисление невязок, внесенных в условия (2), (3), приводит к следующему результату:

при $t=0, x \geq 0$ (или, что то же самое, при $\tau=0, \xi \geq 0$) имеем $\bar{u}(x, 0) + \bar{\Pi}(x, 0, \varepsilon) - \varphi(x) = -\varepsilon b(0) \varphi'(0) \xi g(-\xi) + O(\varepsilon^2)$;

при $x=0, t \geq 0$ (или, что то же самое, при $\tau = -\varepsilon \xi, \xi \leq 0$) получаем

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varphi'(0) (\xi g(\xi))' + O(\varepsilon) h(\xi),$$

где $h(\xi) = O(\xi (\xi g(\xi))')$.

5. Для устранения главных частей этих невязок строим функцию $S = S_0(\xi, \tau) + \varepsilon S_1(\xi, \tau)$. В соответствии с назначением она должна удовлетворять с точностью порядка ε^2 уравнению

$$\mathcal{L}_\varepsilon S - S f = -\varepsilon q(\tau) (\xi^2 - 1) \exp(-\xi^2),$$

где $S f = f(\bar{u} + \bar{\Pi} + S, x, t, \varepsilon) - f(\bar{u} + \bar{\Pi}, x, t, \varepsilon)$, и дополнительным условиям

$$S \Big|_{\substack{\tau=0 \\ \xi > 0}} = \varepsilon b(0) \varphi'(0) \xi g(-\xi), \quad \frac{\partial S}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\tau = -\varepsilon \xi \\ \xi < 0}} = -\varepsilon b(0) \varphi'(0) (\xi g(\xi))'.$$

Так как правые части в уравнении и дополнительных условиях являются величинами порядка ε , то $S_0 = 0$, а для S_1 получаем задачу

$$\frac{\partial S_1}{\partial \tau} - \alpha(\tau) \frac{\partial^2 S_1}{\partial \xi^2} - f_u(B^{-1}(\tau)) S_1 = -q(\tau) (\xi^2 - 1) \exp(-\xi^2), \quad (17)$$

$$S_1(\xi, 0) \Big|_{\xi > 0} = b(0) \varphi'(0) \xi g(-\xi), \quad (18)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi} \Big|_{\substack{\tau = -\varepsilon \xi \\ \xi < 0}} = -b(0) \varphi'(0) (\xi g(\xi))'. \quad (19)$$

Отметим, что оператор $\mathcal{L}_0 = \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha(\tau) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ является главной частью оператора \mathcal{L}_ε , записанного в переменных ξ, τ : $\mathcal{L}_\varepsilon = \mathcal{L}_0 + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \dots$.

Неудобство граничного условия (19) состоит в том, что оно задается на полупрямой $\tau = -\varepsilon \xi, \xi \leq 0$. Заменим его условием на полуоси $\tau = 0, \xi \leq 0$:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \xi}(\xi, 0) \Big|_{\xi < 0} = -b(0) \varphi'(0) (\xi g(\xi))'.$$

Интегрируя по ξ с учетом того, что $S_1(0, 0) = 0$ в силу (18), получаем

$$S_1(\xi, 0) \Big|_{\xi < 0} = -b(0) \varphi'(0) \xi g(\xi).$$

Таким образом, функция $S_1(\xi, \tau)$ определяется как решение уравнения (17) с начальным условием

$$S_1(\xi, 0) = \begin{cases} b(0)\varphi'(0)\xi g(-\xi), & \xi \geq 0, \\ -b(0)\varphi'(0)\xi g(\xi), & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи находится в явном виде:

$$S_1(\xi, \tau) = v(\xi, \tau') \exp \left\{ \int_0^{B^{-1}(\tau')} [f_u(s)/b(s)] ds \right\}, \quad (20)$$

$$\text{где } v(\xi, \tau') = -\frac{b(0)\varphi'(0)}{\sqrt{\pi}} \left(\xi \int_{\xi/2\sqrt{\tau'}}^{\xi} \exp(-s^2) ds - \sqrt{\tau'} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau'}\right) \right),$$

$$\tau' = \int_0^{\tau} a(s) ds.$$

Отсюда нетрудно получить оценку

$$|S_1(\xi, \tau)| \leq c \exp\left(-\frac{\kappa t}{\varepsilon}\right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Итак, все члены асимптотики, входящие в (5), определены.

Отметим, что построение членов асимптотики более высокого порядка указанным способом наталкивается на ряд принципиальных трудностей, связанных, в частности, с невязками, возникающими из-за переноса условия (19) на полуось $\tau=0$, $\xi \leq 0$.

10.2. Оценка остаточного члена

Теорема 10.1. *Если выполнены условия I—V, то при достаточно малых ε задача (1)—(4) имеет единственное решение $u(x, t, \varepsilon)$ и справедлива оценка*

$$\max_{\bar{\Omega}} |u(x, t, \varepsilon) - U(x, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^2).$$

Не останавливаясь на деталях, укажем схему доказательства теоремы. Прежде всего отметим, что построенная функция $U(x, t, \varepsilon)$ не удовлетворяет граничному условию (4). Чтобы устранить невязку в этом граничном условии, следует добавить пограничные функции вблизи стороны $x=1$. Обозначим их $R_i(\zeta, t)$, $\zeta = (1-x)/\varepsilon^2$. Они определяются стандартным образом с помощью погранслоного оператора $a(1) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + b(1) \frac{\partial}{\partial \zeta}$ и являются

экспоненциально убывающими при $\zeta \rightarrow \infty$, причем главный член этой погранслоной части имеет порядок ε^2 , т. е. $R_0 = R_1 = 0$. Поэтому в окончаттельную асимптотику $U(x, t, \varepsilon)$ с остаточным членом порядка ε^2 эти функции можно не включать, но при доказательстве оценки остаточного члена полезно добавить их к

$U(x, t, \varepsilon)$. Чтобы невязка, вносимая этими функциями в уравнение, имела порядок ε^2 , следует определить $R = \varepsilon^2 R_2 + \varepsilon^3 R_3$.

Введем обозначения $V(x, t, \varepsilon) = U + R$, $v(x, t, \varepsilon) = u - V$. Подставляя $u = V + v$ в уравнение (1), получаем для v уравнение

$$\mathcal{L}_\varepsilon v - f_u(x, t, \varepsilon)v = h(v, x, t, \varepsilon), \quad (21)$$

где $f_u(x, t, \varepsilon) = f_u(V(x, t, \varepsilon), x, t, \varepsilon)$, $h = f(V + v, x, t, \varepsilon) - f_u(x, t, \varepsilon)v - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \varepsilon^2 a(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b(x) \frac{\partial V}{\partial x}$. Функция h обладает двумя свойствами, аналогичными свойствам 1⁰ и 2⁰ функции h из п. 9.3.

Начальное и граничные условия для v имеют вид

$$v(x, 0, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad (22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{\kappa t}{\varepsilon^3}\right) + \varepsilon \exp\left(-\frac{\kappa t}{\varepsilon^2}\right)\right), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2).$$

Далее область $\bar{\Omega}$ разбивается на две подобласти: $\omega = (0 \leq x \leq 1) (0 \leq t \leq A\varepsilon)$ и $\bar{\Omega} - \omega$, где A — достаточно большое число для того, чтобы при $t \geq A\varepsilon$ и достаточно малых ε выполнялось неравенство $f_u(0, t, \varepsilon) \leq -\kappa < 0$. Такой выбор A возможен в силу требования (8) и оценки (14) для $\Pi_0(x, \tau)$. В каждой из подобластей для нахождения решения задачи (21), (22) применяется метод последовательных приближений, а для оценки последовательных приближений используются принцип максимума и метод барьерных функций. В результате удается доказать существование и единственность решения и оценку $\max_{\bar{\Omega}} |v(x, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^2)$, что и доказывает теорему. Подробное доказательство содержится в [22].

10.3. Применение процедуры сглаживания в других задачах

Процедура сглаживания успешно используется во многих других сингулярно возмущенных задачах. Отметим некоторые из них.

1. В краевой задаче для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2 a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u, x, t, \varepsilon), \quad (23)$$

$$(x, t) \in \Omega = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$$

негладкими на характеристике $t = B(x) = \int_0^x dx/b(x)$ вырожден-

ного уравнения оказываются регулярные члены асимптотики $\bar{u}_0(x, t)$ и $\bar{u}(x, t)$. Процедура их сглаживания аналогична описанной в п. 10.1. В асимптотике решения появляется функция

$\varepsilon S_1(\xi, t)$, $\xi = (B(x) - t)/\varepsilon$, определяемая как решение параболического уравнения (аналогично S -функции из п. 10.1). Отметим, что решение $u(x, t, \varepsilon)$ исходного уравнения (23) является всюду гладкой функцией в отличие от решения $\bar{u}_0(x, t)$ вырожденного уравнения. Негладкость предельного решения $\bar{u}_0(x, t)$ на характеристике означает, что в окрестности этой характеристики существует внутренний слой, имеющий величину порядка ε . Этот внутренний слой и описывается как раз функцией $\varepsilon S_1(\xi, t)$, поэтому ее можно назвать *функцией внутреннего слоя*. Процедура сглаживания позволяет построить равномерную в $\bar{\Omega}$ асимптотику решения с остаточным членом порядка ε^2 .

Отметим также, что если начальное условие $u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x)$ не согласовано с краевым условием $u(0, t, \varepsilon) = \psi(t)$, т. е. $\varphi(0) \neq \psi(0)$, то решение $\bar{u}_0(x, t)$ вырожденной задачи является разрывным на характеристике $t = B(x)$ (в то время как решение исходной задачи по-прежнему гладкое) и S -функция, описывающая внутренний слой, появляется уже в нулевом приближении.

К уравнениям типа (23) сводятся задачи конвективной диффузии при плановой фильтрации в пористой среде в случае преобладания процессов конвективного массопереноса над диффузионными. В [12] с помощью процедуры сглаживания построены асимптотические решения типичных двумерных задач неустановившейся конвективной диффузии, которые возникают при исследовании процессов загрязнения подземных вод.

2. В первой краевой задаче для параболического уравнения [23]

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon b(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon^2 a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u, x, t, \varepsilon),$$

$$(x, t) \in \Omega = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$$

негладкими оказываются угловые пограничные функции $P_i(\xi, \tau)$, служащие для описания пограничного слоя в окрестности вершины $(0, 0)$ прямоугольника Ω . Функция $P_0(\xi, \tau)$ при условии $b(0) > 0$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial P_0}{\partial \tau} + b(0) \frac{\partial P_0}{\partial \xi} = P_0 f \equiv f(\bar{u}_0(0, 0) + \Pi_0(0, \tau) + Q_0(\xi, 0) +$$

$$+ P_0, 0, 0, 0) - f(\bar{u}_0(0, 0) + \Pi_0(0, \tau), 0, 0, 0) - \\ - f(\bar{u}_0(0, 0) + Q_0(\xi, 0), 0, 0, 0) + f(\bar{u}_0(0, 0), 0, 0, 0),$$

$$(\xi > 0, \tau > 0),$$

$$P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau),$$

где $\Pi_0(x, \tau)$ и $Q_0(\xi, t)$ — пограничные функции, описывающие погранслои в окрестностях соответственно сторон $t=0$ и $x=0$ пря-

моугольника Ω (они определяются стандартным способом). Решение $P_0(\xi, \tau)$ этой задачи не является гладким (имеет разрыв производных) на характеристике $\xi = b(0)\tau$, а угловая пограничная функция $P_1(\xi, \tau)$ в следующем приближении оказывается разрывной на этой характеристике. С помощью описанной процедуры проводится сглаживание функций $P_i(\xi, \tau)$, что дает возможность построить равномерную в $\bar{\Omega}$ асимптотику решения с остаточным членом порядка ε^2 .

3. Процедура сглаживания применима не только к сингулярно возмущенным параболическим уравнениям, но также и к уравнениям эллиптического и гиперболического типов. Различные задачи для таких уравнений с применением процедуры сглаживания рассмотрены в [24—26]. Интересно отметить, что во всех этих задачах функция внутреннего слоя (S -функция) определяется как решение параболического уравнения и имеет вид, аналогичный (20).

§ 11. Системы уравнений в критических случаях

11.1. Постановка типичной задачи

Как уже отмечалось в п. 7.1, мы называем критическим такой случай, когда вырожденная задача имеет семейство решений. Алгоритм построения асимптотики решения для сингулярно возмущенной системы уравнений с частными производными в критическом случае во многом сходен с алгоритмом для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим его на примере первой краевой задачи для системы уравнений эллиптического типа [21]:

$$\varepsilon^2 \Delta u = A(x, y)u + \varepsilon^2 f(u, x, y, \varepsilon), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y). \quad (2)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, u — m -мерная вектор-функция, $A(x, y)$ — $(m \times m)$ -матрица, Ω — ограниченная область на плоскости с границей $\partial\Omega$.

Пусть выполнены следующие условия:

I. Матрица A , функции f , φ и граница $\partial\Omega$ являются достаточно гладкими.

II. Собственные значения $\lambda_i(x, y)$ матрицы $A(x, y)$ при $(x, y) \in \bar{\Omega}$ удовлетворяют условиям:

а) $\lambda_i(x, y) = 0, \quad i = 1, \dots, k < m;$

б) $\lambda_i(x, y) \neq -a^2 < 0, \quad i = k + 1, \dots, m.$

Из условия а) следует, что имеет место критический случай: $\text{Det } A(x, y) = 0$, и потому вырожденное уравнение $A(x, y)\bar{u} = 0$ имеет семейство решений. Условие б) означает, что $\lambda_i(x, y)$

($i=k+1, \dots, m$) не принимает вещественных отрицательных значений ни в одной точке $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

III. Собственному значению $\lambda=0$ в каждой точке $(x, y) \in \bar{\Omega}$ соответствуют k линейно независимых собственных векторов $e_i(x, y)$, $i=1, \dots, k$.

Кратность остальных собственных значений и число отвечающих им собственных векторов несущественны и могут быть различными для разных точек $(x, y) \in \bar{\Omega}$.

Чтобы сформулировать следующее требование, введем матрицу $T(x, y)$, приводящую $A(x, y)$ к блочно-диагональному виду:

$$T^{-1}(x, y) A(x, y) T(x, y) = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & B(x, y) \end{pmatrix}.$$

Здесь $B(x, y) - ((m-k) \times (m-k))$ -матрица, собственные значения которой равны собственным значениям $\lambda_i(x, y)$ ($i=k+1, \dots, m$) матрицы $A(x, y)$, Θ — нулевая матрица в силу требований IIа и III.

IV. Краевая задача

$$\varepsilon^2 \Delta v = B(x, y) v, \quad (x, y) \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3)$$

имеет при малых ε только тривиальное решение.

Остальные требования будут сформулированы в ходе построения асимптотики.

З а м е ч а н и я. 1) Достаточным условием для выполнения требований IIб и IV является условие: симметричная матрица $(B(x, y) + B^*(x, y))$ в каждой точке $(x, y) \in \bar{\Omega}$ является положительно определенной (B^* — транспонированная матрица по отношению к B).

2) Первые k столбцов матрицы $T(x, y)$, как известно, являются собственными векторами $e_i(x, y)$ ($i=1, \dots, k$) матрицы $A(x, y)$, а первые k строк матрицы $T^{-1}(x, y)$ — собственными векторами $g_j(x, y)$ ($j=1, \dots, k$) матрицы $A^*(x, y)$, соответствующими нулевому собственному значению. Обозначим $(m \times k)$ -матрицу со столбцами $e_i(x, y)$ ($i=1, \dots, k$) через $e(x, y)$, а $(k \times m)$ -матрицу со строками $g_j(x, y)$ ($j=1, \dots, k$) — через $g(x, y)$. Из равенства $T^{-1}T = E_m$ следует, что $g(x, y)e(x, y) = E_k$ — единичная матрица.

11.2. Построение асимптотического разложения решения

1. Асимптотическое разложение решения $u(x, y, \varepsilon)$ задачи (1), (2) будем строить в виде

$$u(x, y, \varepsilon) = \bar{u} + \Pi = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l (\bar{u}_l(x, y) + \Pi_l(\rho, l)), \quad (4)$$

где \bar{u} — регулярная, Π — погранслоная часть асимптотики, $\rho = r/\varepsilon$ — погранслоная переменная, (r, l) — такие же локальные

координаты в окрестности $\partial\Omega$, как и в п. 8.1. Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta - A(x, y)$ в переменных (ρ, l) имеет вид

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - A(l) \right) + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2 + \dots,$$

где $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$ — линейные дифференциальные операторы, содержащие операции дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial l}, \frac{\partial}{\partial l^2}$; $A(l) = A(x, y)|_{\partial\Omega}$, и такой же смысл имеют используемые ниже обозначения $\varphi(l), \bar{u}_0(l), e(l), \dots$.

Стандартным способом, подставляя ряд (4) в (1) и (2) и представляя $f(\bar{u} + \Pi, x, y, \varepsilon)$ в виде $f = \bar{f} + \Pi f$, получаем уравнение для функций \bar{u}_i и Π_i .

2. Для $\bar{u}_0(x, y)$ имеем уравнение

$$A(x, y) \bar{u}_0 = 0.$$

В силу условия III общее решение этого уравнения имеет вид

$$\bar{u}_0(x, y) = \sum_{i=1}^k \alpha_{i0}(x, y) e_i(x, y) = e(x, y) \alpha_0(x, y),$$

где $\alpha_{i0}(x, y)$ — произвольные скалярные функции, $e_i(x, y)$ — собственные векторы матрицы $A(x, y)$, соответствующие $\lambda = 0$, $\alpha_0(x, y)$ — k -мерная вектор-функция с элементами $\alpha_{i0}(x, y)$. Аналогично находим

$$\bar{u}_1(x, y) = e(x, y) \alpha_1(x, y),$$

где $\alpha_1(x, y)$ — произвольная k -мерная вектор-функция.

3. Для $\Pi_0(\rho, l)$ получается уравнение

$$\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \rho^2} = A(l) \Pi_0, \quad \rho \geq 0$$

(l входит как параметр).

Из (2) следует граничное условие при $\rho = 0$:

$$\Pi_0(0, l) = \varphi(l) - \bar{u}_0(l) = \varphi(l) - e(l) \alpha_0(l).$$

Кроме того, потребуем, как обычно, чтобы Π -функции стремились к нулю при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\Pi_i(\infty, l) = 0.$$

Произведем замену переменных $\Pi_0(\rho, l) = T(l) P(\rho, l) = T(l) \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$, где $T(l) = T(x, y)|_{\partial\Omega}$ — матрица, приводящая $A(l)$ к блочно-диагональному виду, P_1 имеет k , а P_2 имеет $m-k$ эле-

ментов. Для P_1, P_2 получим уравнения

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial \rho^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 P_2}{\partial \rho^2} = B(l) P_2 \quad (5)$$

и граничные условия

$$P(0, l) = T^{-1}(l) (\varphi(l) - e(l) \alpha_0(l)), \quad (6)$$

$$P(\infty, l) = 0.$$

Из первого уравнения (5) с учетом условия на бесконечности получаем $P_1(\rho, l) = 0$. Рассматривая теперь первые k равенств в векторном уравнении (6) и учитывая структуру матрицы $T^{-1}(l)$ (см. замечание 2 в п. 11.1), находим

$$\alpha_0(l) = g(l) \varphi(l).$$

Таким образом, для не известной пока функции $\alpha_0(x, y)$ найдено граничное условие

$$\alpha_0|_{\partial \Omega} = g(l) \varphi(l). \quad (7)$$

Далее решаем второе уравнение (5) с граничным условием (6) (нужно взять последние $m-k$ компонент этих условий) и находим $P_2(\rho, l)$. В силу требования IIб функция $P_2(\rho, l)$ определяется однозначно и имеет экспоненциальную оценку $\|P_2(\rho, l)\| \leq c \exp(-\kappa \rho)$. Очевидно, такую же оценку имеет и функция $\Pi_0(\rho, l)$:

$$\|\Pi_0(\rho, l)\| \leq c \exp(-\kappa \rho). \quad (8)$$

4. Уравнение для $\alpha_0(x, y)$ получается из условия разрешимости уравнения для $\bar{u}_2(x, y)$:

$$A(x, y) \bar{u}_2 = \Delta \bar{u}_0 - f(\bar{u}_0, x, y, 0), \quad (9)$$

Для разрешимости этой линейной алгебраической системы уравнений с равным нулю определителем ($\det A(x, y) = 0$) необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогональна собственным векторам $g_j(x, y)$ ($j = 1, \dots, k$) матрицы $A^*(x, y)$. Это условие можно записать так:

$$g(x, y) (\Delta (e(x, y) \alpha_0(x, y)) - f(e(x, y) \alpha_0(x, y), x, y, 0)) = 0.$$

Раскрывая скобки и учитывая равенство $ge = E_k$, приходим к следующему полулинейному эллиптическому уравнению для $\alpha_0(x, y)$:

$$\mathcal{L} \alpha_0 + F(\alpha_0, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{L} = \Delta + 2 \left(g \frac{\partial e}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + 2 \left(g \frac{\partial e}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} + g \Delta e, \quad F = -g f(e \alpha_0, x, y, 0).$$

V. Пусть уравнение (10) с граничным условием (7) имеет решение.

Итак, функция $\bar{u}_0(x, y)$ полностью определена, а решение уравнения (9) можно записать в виде

$$\bar{u}_2(x, y) = e(x, y) \alpha_2(x, y) + \tilde{u}_2(x, y),$$

где $\alpha_2(x, y)$ — произвольная k -мерная вектор-функция, $\tilde{u}_2(x, y)$ — частное решение уравнения (9) (известная функция).

5. Уравнение для $\bar{u}_3(x, y)$ имеет вид

$$A(x, y) \bar{u}_3 = \Delta \bar{u}_1 - \bar{f}_u(x, y) \bar{u}_1 - \bar{f}_e(x, y),$$

где матрица \bar{f}_u и функция \bar{f}_e вычисляются в точке $(\bar{u}_0(x, y), x, y, 0)$. Условие разрешимости этого уравнения дает уравнение для функции $\alpha_1(x, y)$, входящей в выражение для \bar{u}_1 :

$$\mathcal{L}_0 \alpha_1 = g \bar{f}_e(x, y), \quad (11)$$

где $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} - \bar{f}_u(x, y)$. Граничное значение $\alpha_1(x, y)$ определяется аналогично $\alpha_0(l)$ при рассмотрении задачи для пограничной функции $\Pi_1(\rho, l)$:

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \rho^2} = A(l) \Pi_1 + \pi_1(\rho, l),$$

$$\Pi_1(0, l) = -\bar{u}_1(l) = -e(l) \alpha_1(l), \quad \Pi_1(\infty, l) = 0,$$

где $\pi_1(\rho, l) = -\mathcal{L}_1 \Pi_0$ имеет экспоненциальную оценку типа (8).

Замена переменных $\Pi_1 = T(l) \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ приводит к уравнениям

$$\frac{\partial^2 Q_1}{\partial \rho^2} = q_1(\rho, l), \quad \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \rho^2} = B(l) Q_2 + q_2(\rho, l) \quad (12)$$

и граничным условиям

$$Q_1(0, l) = -\alpha_1(l), \quad (13)$$

$$Q_2(0, l) = -(T^{-1}(l))_2 e(l) \alpha_1(l) = 0, \quad (14)$$

$$Q_i(\infty, l) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

Здесь $q_i(\rho, l) = (T^{-1}(l))_i \pi_1(\rho, l)$, индекс i означает, что при $i=1$ берутся первые k , а при $i=2$ — последние $m-k$ строк матрицы $T^{-1}(l)$, равенство нулю в (14) следует из того, что $T^{-1}T = E_m$, и из структуры матрицы T (см. замечание 2 в п. 11.1).

Из первого уравнения (12) с учетом условия (15) находим

$$Q_1(\rho, l) = \int_{-\infty}^{\rho} d\rho_0 \int_{-\infty}^{\rho_0} q_1(\rho_1, l) d\rho_1.$$

Это дает возможность определить из (13) $\alpha_1(l)$ — граничное значение функции $\alpha_1(x, y)$:

$$\alpha_1|_{\partial\Omega} = \int_0^{\infty} d\rho_0 \int_{-\infty}^{\rho_0} q_1(\rho_1, l) d\rho_1. \quad (16)$$

Далее решаем второе уравнение (12) с граничными условиями (14), (15) и находим $Q_2(\rho, l)$. Обе функции Q_1 и Q_2 , а значит, и $\Pi_1(\rho, l)$ имеют оценку типа (8). Для нахождения $\alpha_1(x, y)$ нужно решить теперь линейное эллиптическое уравнение (11) с граничным условием (16).

VI. Пусть задача (11), (16) имеет единственное решение.

Иными словами, это означает, что оператор \mathcal{L}_0 с краевыми условиями первого рода не имеет нулевого собственного значения.

Итак, определены члены первого приближения. Следующие члены \bar{u}_i и Π_i ($i \geq 2$) ряда (4) определяются аналогично \bar{u}_1 и Π_1 . Все Π -функции имеют оценку (8).

11.3. Оценка остаточного члена

Введем многообразие S , являющееся объединением двух многообразий:

$$S_1 = \{u, x, y : u = \bar{u}_0(x, y); (x, y) \in \Omega\},$$

$$S_2 = \{u, x, y : u = u_0(l) + \Pi_0(\rho, l), \rho \geq 0; (x, y) \in \partial\Omega\},$$

$$S = S_1 \cup S_2.$$

Теорема 11.1. Если выполнены условия I—VI, то существует число $\delta > 0$ такое, что при достаточно малых ε задача (1), (2) имеет единственное решение $u(x, y, \varepsilon)$ в δ -окрестности многообразия S , причем ряд (4) является асимптотическим рядом для $u(x, y, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области $\bar{\Omega}$, т. е. справедлива оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} \|u(x, y, \varepsilon) - U_n(x, y, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $U_n(x, y, \varepsilon)$ — n -я частичная сумма ряда (4).

Схема доказательства этой теоремы такая же, как теоремы 9.2: уравнения для остаточного члена сводятся к эквивалентной системе интегральных уравнений. При этом естественно используются условие IV и оценка матрицы Грина краевой задачи (3), доказанная в [33]. Подробное доказательство теоремы 11.1 содержится в [21].

11.4. О других системах уравнений в критических случаях

1. Если в правой части уравнения (1) заменить малый множитель ε^2 перед $f(u, x, t, \varepsilon)$ на меньшую степень ε , например на ε , сохранив множитель ε^2 перед Δu в левой части уравнения, то асимптотика решения задачи примет иной вид, а именно: наряду

с регулярными членами $\bar{u}_i(x, y)$ и пограничными функциями $\Pi_i(\rho, l)$ в асимптотическом разложении решения появляются пограничные функции иного типа, зависящие от погранслошной переменной $\tau = \frac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}$ и от l , как от параметра. При этом само

разложение строится по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Подробное исследование этой задачи проведено в [34], где наряду с первой краевой задачей рассмотрены вторая и третья.

2. Если задача (1), (2) рассматривается в области с угловыми точками границы, например в прямоугольнике, то в асимптотике решения появляются угловые пограничные функции. При этом из-за негладкости границы удается построить равномерную в $\bar{\Omega}$ асимптотику только нулевого порядка (с остаточным членом порядка ε , см. [31]).

3. В [19] исследовалась краевая задача для системы уравнений параболического типа в критическом случае (u — m -мерная вектор-функция)

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = A(x, t) u + \varepsilon^2 f(u, x, t, \varepsilon), \quad (17)$$

$$(x, t) \in \Omega = (0 < x < l) \times (0 < t \leq T).$$

На собственные значения матрицы $A(x, t)$ накладывалось условие

$$\lambda_i(x, t) = 0, \quad i = 1, \dots, k < m; \quad \operatorname{Re} \lambda_i(x, t) < 0, \quad i = k + 1, \dots, m.$$

Построена и обоснована равномерная в $\bar{\Omega}$ асимптотика нулевого порядка, содержащая регулярный член (одно из решений вырожденного уравнения $A(x, t)\bar{u} = 0$), обыкновенные пограничные функции, описывающие пограничный слой в окрестностях сторон $t=0$, $x=0$ и $x=l$ прямоугольника Ω , и угловые пограничные функции, описывающие пограничный слой в окрестностях угловых точек $(0, 0)$ и $(l, 0)$.

Если малый множитель ε^2 в правой части уравнения (17) заменить на ε , то в асимптотике решения появятся обыкновенные и угловые пограничные функции двух типов: зависящие от погранслошных переменных $\tau_1 = t/\varepsilon^2$, $\xi_1 = x/\varepsilon$, $\xi_{1*} = (l-x)/\varepsilon$ (как и для уравнения (17)) и зависящие от погранслошных переменных $\tau_2 = t/\varepsilon$, $\xi_2 = x/\sqrt{\varepsilon}$, $\xi_{2*} = (l-x)/\sqrt{\varepsilon}$. Удастся построить асимптотическое приближение решения первой краевой задачи с точностью порядка ε .

§ 12. Периодические решения

12.1. Периодические решения уравнений параболического типа

1. При исследовании распределенных кинетических систем, описываемых уравнениями параболического типа, представляет

интерес задача о периодических во времени решениях. В такой системе каждая пространственная точка является генератором колебаний, а связь между этими генераторами осуществляется с помощью диффузии. Нас будут интересовать случаи малой диффузии.

Рассмотрим вопрос о нахождении 2π -периодического по времени решения первой краевой задачи для скалярного параболического уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + s(x, t)u + \varepsilon F(u, x, t, \varepsilon) + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t) = u(x, t + 2\pi). \quad (3)$$

Функции $s(x, t)$, $f(x, t)$, $F(u, x, t, \varepsilon)$ будем считать 2π -периодическими по t достаточно гладкими при $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|u| \leq H = \text{const}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Будем строить асимптотическое разложение решения задачи (1)–(3) в виде

$$u = \bar{u}(x, t, \varepsilon) + Q(\xi, t, \varepsilon) + Q^*(\xi_*, t, \varepsilon), \quad (4)$$

где

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t) + \dots$$

— регулярный ряд,

$$Q(\xi, t, \varepsilon) = Q_0(\xi, t) + \varepsilon Q_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^k Q_k(\xi, t) + \dots$$

— пограничный ряд в окрестности $x=0$ ($\xi = x/\varepsilon$),

$$Q^*(\xi_*, t, \varepsilon) = Q_0^*(\xi_*, t) + \varepsilon Q_1^*(\xi_*, t) + \dots + \varepsilon^k Q_k^*(\xi_*, t) + \dots$$

— пограничный ряд в окрестности $x=l$ ($\xi_* = (x-l)/\varepsilon$).

Подставляя (4) в (1)–(3), стандартным способом получаем задачу для определения членов ряда (4).

2. Для членов регулярного ряда имеем уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + s(x, t) \bar{u}_0 + f(x, t) = 0, \quad (5_0)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial t} + s(x, t) \bar{u}_k + F_k(x, t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5_k)$$

где $F_1 = F(\bar{u}_0, x, t, 0)$, F_k рекуррентно выражаются через \bar{u}_i , $i < k$. Уравнения (5_k) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями — x играет роль параметра. Поэтому для определения их решений из (2), (3) остается лишь условие периодичности (3).

Пусть

$$a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(x, t) dt > 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l. \quad (6)$$

Рассмотрим уравнение (5₀). Его общее решение имеет вид

$$\bar{u}_0 = c \exp\left(-\int_0^t s(x, t') dt'\right) - \int_0^t \exp\left(-\int_{\tau}^t s(x, t') dt'\right) f(x, \tau) d\tau.$$

Отсюда, используя требование периодичности $\bar{u}_0(x, 0) = \bar{u}_0(x, 2\pi)$ и условие (6), находим

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 = & \frac{\exp\left(-\int_0^t s(x, t') dt'\right)}{\exp(-2\pi a(x)) - 1} \int_0^{2\pi} \exp\left(-\int_{\tau}^{2\pi} s(x, t') dt'\right) f(x, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \exp\left(-\int_{\tau}^t s(x, t') dt'\right) \cdot f(x, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

В силу периодичности s и f функция $\bar{u}_0(x, t)$ является 2π -периодическим решением уравнения (5₀).

Аналогично строятся периодические решения остальных уравнений (5_k).

З а м е ч а н и е. Если $s = s(x)$, то периодическое решение уравнения (5₀) удобно представить в виде ряда Фурье

$$\bar{u}_0(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{0k}(x) \exp(ikt),$$

где $\alpha_{0k}(x) = -\frac{f_k(x)}{s(x) + ik}$, $f_k(x)$ — соответствующий коэффициент Фурье функции $f(x, t)$. В общем случае $s = s(x, t)$ замена переменных

$$\bar{u}_0 = v \exp\left(\int_0^t b(x, t') dt'\right), \text{ где } b(x, t) = a(x) - s(x, t), \text{ приводит}$$

к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a(x)v + f(x, t) \exp\left(-\int_0^t b(x, t') dt'\right) = 0,$$

решение которого уже удобно искать в виде ряда Фурье.

3. Пограничные функции Q_k определяются из следующих уравнений и условий:

$$\frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = \frac{\partial Q_k}{\partial t} + s(0, t) Q_k + q_k(\xi, t), \quad (7_k)$$

$$Q_k(0, t) = -\bar{u}_k(0, t), \quad Q_k(\xi, t) = Q_k(\xi, t + 2\pi), \quad (8_k)$$

$$Q_k(\infty, t) = 0,$$

где q_k рекуррентно выражаются через Q_i , $i < k$, в частности $q_0 = 0$.
При $k=0$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial Q_0}{\partial t} + s(0, t) Q_0$$

с дополнительными условиями (8₀). Произведем замену переменных, аналогичную указанной в замечании:

$$Q_0 = v_0 \exp\left(\int_0^t b(0, t') dt'\right),$$

где $b(0, t) = a(0) - s(0, t)$. Тогда для v_0 получим задачу

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial v_0}{\partial t} + a(0) v_0,$$

$$v_0(0, t) = -\bar{u}_0(0, t) \exp\left(-\int_0^t b(0, t') dt'\right) \equiv -\bar{v}_0(t), \quad (9)$$

$$v_0(\xi, t) = v_0(\xi, t + 2\pi), \quad v_0(\infty, t) = 0.$$

Решение этой задачи будем искать в виде ряда Фурье

$$v_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_{0k}(\xi) \exp(ikt). \quad (10)$$

Для $\beta_{0k}(\xi)$ получим краевую задачу

$$\beta_{0k}'' = (a(0) + ik) \beta_{0k}, \quad \beta_{0k}(0) = -\bar{v}_{0k}, \quad \beta_{0k}(\infty) = 0, \quad (11)$$

\bar{v}_{0k} — коэффициент Фурье функции $\bar{v}_0(t)$. Уравнение (11) представляет собой уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет два корня $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a(0) + ik}$. В силу (6) при любом k один из корней (пусть это λ_2) имеет отрицательную, а другой — положительную действительную часть. Поэтому решение задачи (11) определяется однозначно и имеет вид

$$\beta_{0k}(\xi) = -\bar{v}_{0k} \exp(\lambda_2(k) \xi).$$

Достаточная гладкость s и f обеспечивает такую гладкость $\bar{u}_0(0, t)$, а также $\bar{v}_0(t)$, которая гарантирует любой нужный по-

рядок убывания коэффициентов Фурье \bar{v}_{0k} . Пусть $|\bar{v}_{0k}| \leq \frac{c}{k^3}$.

Тогда ряд (10) равномерно сходится и его можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по ξ . Таким образом, ряд (10) будет в самом деле решением задачи (9), а так как $\operatorname{Re} \lambda_2(k)$ имеет равномерную относительно k оценку $\operatorname{Re} \lambda_2(k) \leq -\sqrt{a(0)} = -\kappa$, то для v_0 , а значит, и для Q_0 справедлива экспоненциальная оценка

$$|Q_0(\xi, t)| \leq c \exp(-\kappa \xi). \quad (12)$$

Заметим для дальнейшего, что если повысить степень гладкости s и f , то аналогичная (12) оценка будет иметь место для производных по t от Q_0 .

Уравнение (7₁) в отличие от (7₀) является неоднородным, причем

$$q_1 = F(\bar{u}_0(0, t) + Q_0(\xi, t), 0, t, 0) - F(\bar{u}_0(0, t), 0, t, 0) - \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) \xi \cdot Q_0(\xi, t) = Q_0 F - \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) \xi Q_0(\xi, t).$$

После замены $Q_1 = v_1 \exp\left(\int_0^t b(0, t') dt'\right)$ получим задачу

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + a(0)v_1 + \tilde{q}_1(\xi, t),$$

$$v_1(0, t) = -\bar{u}_1(0, t) \exp\left(-\int_0^t b(0, t') dt'\right) = -\bar{v}_1(t),$$

$$v_1(\xi, t) = v_1(\xi, t + 2\pi), \quad v_1(\infty, t) = 0,$$

где $\tilde{q}_1 = q \exp\left(-\int_0^t b(0, t') dt'\right)$. Решение этой задачи также

ищется в виде ряда Фурье типа (10) (индекс 0 заменяется на 1). Уравнение для β_{1k} также является неоднородным:

$$\beta_{1k}^* = (a(0) + ik)\beta_{1k} + \tilde{q}_{1k}(\xi), \quad \beta_{1k}(0) = -\bar{v}_{1k}, \quad \beta_{1k}(\infty) = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\beta_{1k}(\xi) = -\bar{v}_{1k} \exp(\lambda_2(k)\xi) + \int_0^\infty G_k(\xi, \xi_0) \tilde{q}_{1k}(\xi_0) d\xi_0,$$

где G_k — соответствующая функция Грина, которая, как нетрудно получить непосредственным вычислением, имеет оценку

$$|G_k(\xi, \xi_0)| \leq c \exp(-\sqrt{a(0)}|\xi - \xi_0|).$$

Для $\beta_{1k}(\xi)$ (как и выше для $\beta_{0k}(\xi)$) нужно получить оценку $|\beta_{1k}(\xi)| \leq \frac{c}{k^3} \exp(-\kappa\xi)$. Для этого достаточно иметь неравенства $|\bar{v}_{1k}| \leq \frac{c}{k^3}$ и $|\tilde{q}_{1k}(\xi)| \leq \frac{c}{k^3} \exp(-\kappa\xi)$. Первое из этих неравенств следует из достаточной гладкости s , f и F . Докажем оценку для $\tilde{q}_{1k}(\xi)$. Имеем

$$\tilde{q}_{1k}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\xi, t) \exp(-ikt) dt = -\frac{i}{2\pi k^3} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \tilde{q}_1}{\partial t^3} \exp(-ikt) dt.$$

Отсюда видно, что для доказательства нужной оценки для $\tilde{q}_{1k}(\xi)$ достаточно установить неравенство

$$\left| \frac{\partial^3 \tilde{q}_1}{\partial t^3} \right| \leq c \exp(-\kappa\xi). \quad (13)$$

Получим сначала такое неравенство для $\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial t}$. Так как

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \left(Q_0 F - \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) \xi Q_0(\xi, t) \right) \exp\left(-\int_0^t b(0, t') dt'\right), \text{ то} \\ \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial t} &= \left\{ \left[\frac{\partial Q_0 F}{\partial t} - \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t}(0, t) \xi Q_0(\xi, t) - \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) \xi \frac{\partial Q_0(\xi, t)}{\partial t} \right] - \right. \\ &\quad \left. - b(0, t) \left[Q_0 F - \frac{\partial s}{\partial x}(0, t) \xi Q_0(\xi, t) \right] \right\} \exp\left(-\int_0^t b(0, t') dt'\right). \quad (14) \end{aligned}$$

Представим $Q_0 F$ в виде $Q_0 F = Q_0(\xi, t) \int_0^1 F_u(\bar{u}_0(0, t) + \theta Q_0, 0, t, 0) d\theta$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0 F}{\partial t} &= \frac{\partial Q_0(\xi, t)}{\partial t} \int_0^1 F_u d\theta + \\ &+ Q_0(\xi, t) \int_0^1 \left(F_{uu} \left(\frac{\partial \bar{u}_0(0, t)}{\partial t} + \theta \frac{\partial Q_0(\xi, t)}{\partial t} \right) + F_{ut} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Пользуясь оценкой (12), а также аналогичной оценкой для $\frac{\partial Q_0(\xi, t)}{\partial t}$, имеющей место при достаточной гладкости s и f , получим, что

$\left| \frac{\partial Q_0 F}{\partial t} \right| \leq c \exp(-\kappa\xi)$, а отсюда и из (14) следует, что $\left| \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial t} \right| \leq c \exp(-\kappa\xi)$. При достаточной гладкости s , f и F можно

получить для $\frac{\partial^2 \tilde{q}_1}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^3 \tilde{q}_1}{\partial t^3}$ выражения типа (14), откуда для этих производных, в частности для $\frac{\partial^3 \tilde{q}_1}{\partial t^3}$, следует нужное неравенство (13).

Таким образом, ряд Фурье для v_1 будет сходиться равномерно и его можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по ξ . Кроме того, для v_1 , а значит, и для Q_1 будет справедлива экспоненциальная оценка типа (12): $|Q_1(\xi, t)| \leq c \exp(-\kappa \xi)$.

Задачи (7_k), (8_k) для $k \geq 2$ исследуются аналогично. Экспоненциальная оценка функций q_k , нужная для получения экспоненциальной оценки Q_k , легко доказывается по индукции при условии достаточной гладкости s, f и F . Аналогично строятся пограничные функции Q_k^* .

4. Справедлива следующая теорема.

Теорема 12.1. При достаточно малых ε существует единственное решение и (x, t, ε) задачи (1) — (3), а ряд (4) является асимптотическим рядом для $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. справедлива оценка

$$\max_{\substack{0 \leq x < l \\ 0 \leq t < 2\pi}} |u(x, t, \varepsilon) - U_n(x, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad (15)$$

где $U_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k + Q_k + Q_k^*)$ — n -я частичная сумма ряда (4).

Доказательство теоремы проводится по обычной схеме (см., например, теорему 9.2), но с определенным отличием в деталях. Рассмотрим основные моменты доказательства (подробное доказательство содержится в [41, 45—47]).

Для остаточного члена $w = u - U_n$ имеем задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + s(x, t)w + g(w, x, t, \varepsilon),$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad w(x, t) = w(x, t + 2\pi),$$

где функция g обладает такими же двумя свойствами, как и функция h в доказательстве теоремы 9.2. Произведем замену

переменных $w = v \exp\left(\int_0^t b(x, t') dt'\right)$. Тогда для v получим задачу

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + a(x)v + \varepsilon^2 d(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} - h(v, x, t, \varepsilon), \quad (16)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad v(x, t) = v(x, t + 2\pi), \quad (17)$$

где h обладает такими же двумя свойствами, как и g , а d определенным образом выражается через s .

Эта задача эквивалентна системе интегральных уравнений

$$v(x, t) = \int_0^l G(x, x_0, t, 0) \varphi(x_0) dx_0 + \int_0^t dt_0 \int_0^l G(x, x_0, t, t_0) h(v, x_0, t_0, \varepsilon) dx_0, \quad (18)$$

$$\varphi(x) = \int_0^l G(x, x_0, 2\pi, 0) \varphi(x_0) dx_0 + \int_0^{2\pi} dt_0 \int_0^l G(x, x_0, 2\pi, t_0) h(v, x_0, t_0, \varepsilon) dx, \quad (19)$$

где $\varphi(x) = v(x, 0)$, G — функция Грина начальной задачи с краевыми условиями $v(0, t) = v(l, t) = 0$. Уравнение (19) выражает требование, обеспечивающее периодичность $v(x, t)$. Неизвестными в системе уравнений (18), (19) являются $v(x, t)$ и $\varphi(x)$.

Запишем уравнения (18), (19) в более кратких обозначениях, введя соответствующие операторы K_t и N_t :

$$v(x, t) = K_t[\varphi] + N_t[h(v)], \quad (20)$$

$$\varphi(x) = K_{2\pi}[\varphi] + N_{2\pi}[h(v)]. \quad (21)$$

При заданном h (21) является линейным неоднородным уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром относительно $\varphi(x)$. Соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение. В самом деле, это утверждение эквивалентно утверждению об отсутствии нетривиальных решений задачи (16), (17) при $h=0$, а это последнее утверждение является следствием принципа максимума, который имеет место в силу условия $a(x) > 0$. Поэтому из (21) имеем

$$\varphi(x) = RN_{2\pi}[h(v)],$$

где R — линейный ограниченный оператор. Подставляя это выражение для $\varphi(x)$ в уравнение (20), получим

$$v(x, t) = K_t RN_{2\pi}[h(v)] + N_t[h(v)] \equiv \mathcal{L}(v, x, t, \varepsilon).$$

К этому уравнению уже можно применить метод последовательных приближений, как и при доказательстве теоремы 9.2, и получить существование и единственность решения и оценку $\max_{\substack{0 < x < l \\ 0 < t < 2\pi}} |v(x, t)| = O(\varepsilon^{n+1})$, а тем самым и оценку (15).

5. Рассмотрим некоторые модификации и обобщения исследованной задачи.

1) Для задач химической и биологической кинетики характерны краевые условия второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (22)$$

Описанный алгоритм построения асимптотики и метод доказательства оценки остаточного члена применимы и в этом случае. Асимптотика в определенном смысле упрощается, так как Q_0 и Q_0^* обращаются в нуль (так же, как в п. 9.3).

При краевых условиях (22) алгоритм можно распространить на более общее уравнение, в котором нелинейность не является малой:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + F(u, x, t, \varepsilon).$$

Вместо (5₀) и (5₁) будем иметь уравнения

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + F(\bar{u}_0, x, t, 0) = 0, \quad (23_0)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + F_u(\bar{u}_0, x, t, 0) \bar{u}_1 + F_\varepsilon(\bar{u}_0, x, t, 0) = 0. \quad (23_1)$$

Будем предполагать, что уравнение (23₀) имеет периодическое решение $\bar{u}_0(x, t)$ и что соответствующее уравнение в вариациях, т. е. однородное уравнение, получающееся из (23₁) при $F_\varepsilon = 0$, не имеет нетривиальных периодических решений. Тогда в окрестности $\bar{u}_0(x, t)$ нет других периодических решений уравнения (23₀), а уравнение (23₁) имеет единственное периодическое решение $\bar{u}_1(x, t)$. По той же причине будут однозначно разрешимы задачи для $\bar{u}_k(x, t)$ при $k > 1$.

Погранфункция $Q_0(\xi, t)$ определяется как решение задачи

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial Q_0}{\partial t} + F(\bar{u}_0(0, t) + Q_0, 0, t, 0) - F(\bar{u}_0(0, t), 0, t, 0), \quad (24)$$

$$\frac{\partial Q_0}{\partial \xi}(0, t) = 0, \quad Q_0(\infty, t) = 0, \quad Q_0(\xi, t) = Q_0(\xi, t + 2\pi).$$

Очевидно, $Q_0 = 0$ является решением этой задачи. Потребуем, чтобы соответствующее уравнение в вариациях

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + F_u(\bar{u}_0(0, t), 0, t, 0) v$$

не имело нетривиальных периодических решений, удовлетворяющих условиям $\frac{\partial v}{\partial \xi}(0, t) = 0, v(\infty, t) = 0$. Тогда в окрестности

$Q_0 = 0$ не существует других, отличных от нуля, решений задачи (24) и задачи для Q_i при $i > 0$ однозначно разрешимы.

Из результатов, полученных в п. 2, 3, следует, что сформулированные требования на уравнения в вариациях будут выполнены, если (ср. с (6))

$$\int_0^{2\pi} F_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) dt > 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

2) Все сказанное в п. 2—4 без принципиальных трудностей распространяется на случай нескольких пространственных переменных, когда в (1) вместо $\frac{d^2u}{dx^2}$ входит оператор Лапласа Δu .

Если при этом область изменения пространственных переменных имеет границу с угловыми точками (например, прямоугольник), то в разложении будут содержаться пограничные функции в окрестности каждой из сторон прямоугольника, а также угловые погранфункции.

3) Пусть u является вектором, а $s(x, t)$ — матрицей. Известно преобразование Ляпунова, приводящее систему уравнений с периодическими коэффициентами к системе уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [118]). Если произвести такое преобразование в данном случае, то оно приведет к системе с матрицей $A(x)$ (в этом преобразовании x играет роль параметра), имеющей жорданову форму, в простейшем случае — диагональную. Переходя от уравнения для w к уравнению (16), мы фактически произвели ляпуновское преобразование для скалярного случая. Если с самого начала $s = s(x)$, то диагональными элементами $A(x)$ являются характеристические числа матрицы $s(x)$. Таким образом, преобразованная система распадается на уравнения типа (16), связанные между собой через малые нелинейные члены. Отсюда следует, что построения, проведенные выше для одного уравнения, можно провести и для системы.

12.2. Критические случаи

Мы определили выше критический случай как такой случай, когда вырожденное уравнение имеет семейство решений.

1. Рассмотрим уравнение, которое получается из (1), если положить $s = 0$, а перед F взять множитель ε^2 :

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon^2 F(u, x, t, \varepsilon) + f(x, t). \quad (25)$$

Сохраним условия (2), (3). Вырожденное уравнение

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + f(x, t) = 0 \quad (26)$$

имеет семейство решений

$$\bar{u} = - \int_0^t f(x, t') dt' + A(x),$$

где $A(x)$ — произвольная функция. Чтобы это решение было 2π -периодическим по времени, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} f(x, t) dt = 0, \quad (27)$$

Пусть условие (27) выполнено. Будем строить асимптотическое разложение решения задачи (25), (2) (3) в виде (4). Главный член $\bar{u}_0(x, t)$ регулярного ряда удовлетворяет уравнению (26) и условию периодичности, откуда получаем

$$\bar{u}_0 = A_0(x) - \int_0^t f(x, t') dt', \quad (28)$$

где $A_0(x)$ — пока произвольная функция. Для $\bar{u}_1(x, t)$ имеем уравнение $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = 0$ и, следовательно, $\bar{u}_1 = A_1(x)$, где $A_1(x)$ также произвольная функция. Для $\bar{u}_2(x, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + F(\bar{u}_0, x, t, 0) = \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = f_2(x, t),$$

где

$$f_2(x, t) = A_0''(x) - \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t') dt' - F(A_0(x) - \int_0^t f(x, t') dt', x, t, 0). \quad (29)$$

Отсюда находим

$$\bar{u}_2 = A_2(x) + \int_0^t f_2(x, t') dt',$$

где $A_2(x)$ — произвольная функция. В силу требования периодичности $f_2(x, t)$ должна удовлетворять условию типа (27)

$$\int_0^{2\pi} f_2(x, t) dt = 0,$$

которое после подстановки выражения (29) дает уравнение относительно $A_0(x)$:

$$A_0'' + \Phi(A_0, x) = 0, \quad (30)$$

где

$$\Phi(A_0, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[F \left(A_0 - \int_0^t f(x, t') dt', x, t, 0 \right) + \right.$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t') dt' \Big] dt.$$

Чтобы из уравнения (30) определить $A_0(x)$, нужны дополнительные условия. Они получаются при построении погранфункций Q_0 и Q_0^* . Для $Q_0(\xi, t)$ имеем задачу

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = \frac{\partial Q_0}{\partial t}, \quad (31)$$

$$Q_0(0, t) = -\bar{u}_0(0, t), \quad Q_0(\infty, t) = 0, \quad Q_0(\xi, t) = Q_0(\xi, t + 2\pi).$$

Как и в п. 12.1, представляем Q_0 в виде ряда Фурье

$$Q_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_{0k}(\xi) \exp(ikt),$$

где $\beta_{0k}(\xi) = -\bar{u}_{0k} \exp(\lambda_2(k)\xi)$, $\lambda_2(k) = \sqrt{ik}$, $\operatorname{Re} \lambda_2(k) < 0$. Очевидно, $\beta_{0k}(\infty) = 0$ при $k > 0$, но $\beta_{00}(\xi) = -\bar{u}_{00} \exp(\lambda_2(0)\xi) = -\bar{u}_{00}$ и поэтому для выполнения условия $Q_0(\infty, t) = 0$ необходимо потребовать, чтобы выполнялось равенство $\bar{u}_{00} = 0$, т. е.

$\int_0^{2\pi} \bar{u}_0(0, t) dt = 0$. Подставляя сюда выражение (28) для \bar{u}_0 , получим краевое условие для $A_0(x)$ при $x=0$:

$$A_0(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^t f(0, t') dt' \equiv A_0^0. \quad (32)$$

Точно так же при построении $Q_0^*(\xi, t)$ получаем краевое условие для $A_0(x)$ при $x=l$:

$$A_0(l) = A_0^l. \quad (33)$$

Будем считать, что *краевая задача* (30), (32), (33) *разрешима*. Таким образом, главные члены ряда (4) полностью определены.

Построение можно продолжить. Для \bar{u}_3 имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} + F_u(\bar{u}_0, x, t, 0) \bar{u}_1 + F_x(\bar{u}_0, x, t, 0) &= \\ = \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} &= f_3(x, t), \end{aligned}$$

где $f_3(x, t) = A_1^r(x) - F_u(\bar{u}_0, x, t, 0) A_1(x) - F_x(\bar{u}_0, x, t, 0)$. Отсюда получаем

$$\bar{u}_3 = A_3(x) + \int_0^t f_3(x, t') dt'.$$

Требование периодичности приводит к условию $\int_0^{2\pi} f_3(x, t) dt = 0$, которое в развернутом виде дает уравнение относительно $A_1(x)$:

$$A_1' - \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_u \left(A_0(x) - \int_0^t f(x, t') dt', x, t, 0 \right) dt \right] A_1 = h_1(x), \quad (34)$$

где

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\varepsilon(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) dt.$$

Запишем уравнение в вариациях, отвечающее (30):

$$A'' + \frac{\partial \Phi}{\partial A_0}(A_0, x) A = 0. \quad (35)$$

Если учесть выражение для Φ , то нетрудно видеть, что однородное уравнение, соответствующее (34), представляет собой как раз уравнение в вариациях (35).

Будем предполагать, что *уравнение в вариациях (35) с нулевыми краевыми условиями $A(0) = A(l) = 0$ имеет только тривиальное решение.*

Краевые условия для A_1 получаются при построении Q_1 и Q_1^* . Уравнение для Q_1 такое же, как для Q_0 (см. (31)), а краевые условия при $\xi = 0$ имеют вид $Q_1(0, t) = -\bar{u}_0(0, t) = -A_1(0)$. Аналогично равенству (32) получаем $A_1(0) = 0$. Точно так же при построении Q_1^* находим $A_1(l) = 0$. В результате сказывается, что $Q_1 = Q_1^* = 0$, а для $A_1(x)$ имеем уравнение (34) с нулевыми краевыми условиями. В силу требования на уравнение в вариациях (35) краевая задача для $A_1(x)$ имеет единственное решение.

Аналогично определяются все дальнейшие члены разложения (4). Для любого k начиная с $k=2$ имеем

$$\bar{u}_k = A_k(x) + \int_0^t f_k(x, t') dt',$$

где $f_k(x, t)$ выражаются определенным образом через $A_{k-2}(x)$.

Условие периодичности $\int_0^{2\pi} f_k(x, t) dt = 0$ дает дифференциальное

уравнение для $A_{k-2}(x)$, а при построении пограничных функций Q_{k-2} и Q_{k-2}^* определяются краевые значения $A_{k-2}(0)$ и $A_{k-2}(l)$.

В результате для каждой функции $A_k(x)$ при $k \geq 1$ имеем краевую задачу

$$A_k'' + \frac{\partial \Phi}{\partial A_0}(A_0, x) \cdot A_k = h_k(x), \quad (36)$$

$$A_k(0) = A_k^0, \quad A_k(l) = A_k^l,$$

где $h_k(x)$ — известная функция, A_k^0 и A_k^l — известные числа. В силу требования на уравнение (35) эта краевая задача однозначно разрешима.

Для Q_k и Q_k^* при $k \geq 2$ получаются уравнения типа (31), но с добавлением неоднородности. Их решения строятся в виде рядов Фурье и имеют экспоненциальную оценку $|Q_k| \leq c \exp(-\kappa \xi)$.

2. Уравнение (30) само по себе достаточно сложно. Поэтому естественно ввести в уравнение (25) еще один малый параметр μ , наличие которого облегчило бы исследование задачи (30), (32), (33), а также задач (36).

Если ввести дополнительный множитель μ^2 перед $\varepsilon^2 F(u, x, t, \varepsilon)$, то задача (30), (32), (33) оказывается регулярно возмущенной:

$$A_0'' + \mu^2 \Phi(A_0, x) = 0, \quad A_0(0) = A_0^0, \quad A_0(l) = A_0^l. \quad (37)$$

При $\mu = 0$ получается задача $\bar{A}_0'' = 0$, $\bar{A}_0(0) = A_0^0$, $\bar{A}_0(l) = A_0^l$, имеющая единственное решение, в окрестности которого, как нетрудно доказать, существует единственное решение задачи (37) при достаточно малых $\mu \neq 0$. Для этого решения легко построить асимптотическое разложение по степеням μ^2 . При наличии множителя μ^2 все задачи (36) также будут разрешимы при достаточно малых μ .

Если же μ^2 ввести в (25) как множитель при $\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, то задача (30), (32), (33) оказывается сингулярно возмущенной:

$$\mu^2 A_0'' + \Phi(A_0, x) = 0, \quad A_0(0) = A_0^0, \quad A_0(l) = A_0^l.$$

О таких краевых задачах шла речь в § 5. Здесь могут быть решения с погранслоями вблизи концов $x=0$ и $x=l$, а также решения с внутренними переходными слоями. Задача в вариациях (36) с множителем μ^2 при A_k'' в этих случаях также оказывается разрешимой.

Таким образом, для членов ряда (4) известными методами может быть построена асимптотика еще и по параметру μ . Что касается существования решения задачи (25), (2), (3), то его удается доказать лишь при некоторых дополнительных предположениях.

3. Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае, когда u — двумерный вектор, т. е. уравнение (1) представляет собой систему двух уравнений, а матрица s имеет специальный вид: $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Компоненты вектора u обозначим через u и v , вектора F — через F и G , вектора f — через f и g . Тогда задача (1) — (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} - v + \varepsilon^2 F(u, v, x, t, \varepsilon) + f(x, t), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u + \varepsilon^2 G(u, v, x, t, \varepsilon) + g(x, t), \\ u(0, t) &= v(0, t) = u(l, t) = v(l, t) = 0, \\ u(x, t) &= u(x, t + 2\pi), \quad v(x, t) = v(x, t + 2\pi). \end{aligned} \quad (38)$$

Вырожденная система

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \bar{v} = -f(x, t), \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} = -g(x, t) \quad (39)$$

с условиями периодичности \bar{u} и \bar{v} по времени имеет семейство решений

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B(x) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x, t) \\ q(x, t) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — произвольные функции, а $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ — некоторое частное периодическое решение системы (39), которое существует, если выполнены условия

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(x, t) \cos t - g(x, t) \sin t) dt &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (f(x, t) \sin t + g(x, t) \cos t) dt &= 0, \end{aligned} \quad (41)$$

представляющие собой условия ортогональности правой части $\begin{pmatrix} -f \\ -g \end{pmatrix}$ и двух линейно независимых периодических решений $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ соответствующей однородной системы.

Будем считать, что условия (41) выполнены. Таким образом, рассматриваемая задача (38) относится к критическим случаям — вырожденная задача имеет семейство решений, зависящее от двух произвольных функций: $A(x)$ и $B(x)$.

Функции p и q удобно представить в виде рядов Фурье:

$$p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(x) \exp(ikt), \quad q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k(x) \exp(ikt).$$
 Подставляя в (39) и разлагая f и g в такие же ряды Фурье, получим для p_k и q_k уравнения

$$ikp_k - q_k = -f_k, \quad ikq_k + p_k = -g_k.$$

При $k \neq \pm 1$ отсюда находим

$$p_k = \frac{g_k + ikf_k}{1 - k^2}, \quad q_k = \frac{ikg_k - f_k}{1 - k^2}.$$

Если же $k=1$ или $k=-1$, то уравнения эквивалентны и вместо двух уравнений имеем одно. В самом деле, рассмотрим, например, случай $k=1$. Запишем уравнения в виде (второе уравнение умножим на i)

$$ip_1 - q_1 = -f_1, \quad ip_1 - q_1 = -ig_1. \quad (42)$$

Так как

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t) \exp(-it) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \cos t - if \sin t) dt,$$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g \cos t - ig \sin t) dt,$$

то в силу (41) справедливо равенство $f_1 = ig_1$. Таким образом, уравнения (42) совпадают. Поскольку нас интересует частное решение, можно положить $q_1 = f_1, p_1 = 0$ и точно так же для $k = -1$ можно взять $q_{-1} = f_{-1}, p_{-1} = 0$. Любое другое решение системы (42) будет отличаться от найденного на величины, которые можно отнести к первым двум слагаемым (40).

Алгоритм построения асимптотики решения системы (38) такой же, как и для скалярного уравнения. Будем искать асимптотическое разложение решения в виде (4). Тогда \bar{u}_0, \bar{v}_0 выражаются формулой (40):

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} = A_0(x) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B_0(x) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x, t) \\ q(x, t) \end{pmatrix},$$

а для \bar{u}_2, \bar{v}_2 получается система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \bar{v}_2 &= \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial x^2} - F(\bar{u}_0, \bar{v}_0, x, t, 0), \\ \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial t} + \bar{u}_2 &= \frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial x^2} - G(\bar{u}_0, \bar{v}_0, x, t, 0). \end{aligned} \quad (43)$$

Условие на правую часть системы (43), аналогичное (41), приводит к системе уравнений для $A_0(x)$, $B_0(x)$, которая имеет вид

$$A_0^* + \Phi(A_0, B_0, x) = 0, \quad B_0^* + \Psi(A_0, B_0, x) = 0.$$

Краевые условия для A_0 и B_0 получаются при построении пограничных функций. Построение ряда (4) можно продолжить, и оно принципиально не отличается от описанного в п. 2. В следующих приближениях получаются уравнения для $A_k(x)$, $B_k(x)$ (от которых зависят \bar{u}_k , \bar{v}_k), представляющие собой линейные неоднородные уравнения вида

$$A_k^* + \frac{\partial \Phi}{\partial A_0} A_k + \frac{\partial \Phi}{\partial B_0} B_k = \varphi_k(x), \quad B_k^* + \frac{\partial \Psi}{\partial A_0} A_k + \frac{\partial \Psi}{\partial B_0} B_k = \psi_k(x).$$

4. Алгоритм построения асимптотики периодического решения существенно изменяется в так называемом автономном случае, когда правые части системы (38) не зависят от t . Запишем такую систему в виде (положим $f=g=0$)

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} - v + \varepsilon^2 F(u, v, x, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u + \varepsilon^2 G(u, v, x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (44)$$

Краевые условия при $x=0$ и $x=l$ оставим те же самые:

$$u(0, t) = u(l, t) = v(0, t) = v(l, t) = 0. \quad (45)$$

Как и для автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, в такой задаче период решения заранее не известен. Вырожденная система (39) при $f=g=0$ имеет семейство 2π -периодических решений (40), где $p=q=0$, а период решения исходной системы (44) будем искать в виде разложения по степеням ε^2 .

Воспользовавшись методом Пуанкаре, введем новую независимую переменную τ : $t = (1 + \varepsilon^2 g_1 + \varepsilon^4 g_2 + \dots)\tau$. В переменных x , τ в отличие от системы (38) асимптотическое разложение решения системы (44) строим в виде только регулярного ряда по степеням ε^2 :

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, \tau) + \varepsilon^2 u_1(x, \tau) + \varepsilon^4 u_2(x, \tau) + \dots, \quad v = \\ &= v_0(x, \tau) + \varepsilon^2 v_1(x, \tau) + \varepsilon^4 v_2(x, \tau) + \dots \end{aligned}$$

Для u_0 , v_0 имеем уравнения $\frac{\partial u_0}{\partial \tau} - v_0 = 0$, $\frac{\partial v_0}{\partial \tau} + u_0 = 0$, откуда

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A_0(x) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ -\sin \tau \end{pmatrix} + B_0(x) \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix},$$

где $A_0(x)$ и $B_0(x)$ — произвольные функции. Уравнения для u_1, v_1 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - v_1 &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + v_0 g_1 - F(u_0, v_0, x, 0), \\ \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + u_1 &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - u_0 g_1 - G(u_0, v_0, x, 0). \end{aligned} \quad (46)$$

Условия ортогональности, аналогичные (41), приводят к следующим уравнениям относительно A_0 и B_0 :

$$A_0'' + g_1 B_0 = \Phi(A_0, B_0, x), \quad B_0'' - g_1 A_0 = \Psi(A_0, B_0, x), \quad (47)$$

а из (45) получаем граничные условия

$$A_0(0) = A_0(l) = B_0(0) = B_0(l) = 0. \quad (48)$$

Так как в (47) входит неизвестное g_1 , то дополнительно к (45) нужно задать еще одно условие, например

$$v(x_0, 0) = 0, \quad (49)$$

где x_0 — некоторая точка интервала $(0, l)$. Это приводит к требованию

$$B_0(x_0) = 0. \quad (50)$$

Будем считать, что из системы (47) с условиями (48), (50) определяются $A_0(x)$, $B_0(x)$ и g_1 . Тогда из (46) находим

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = A_1(x) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ -\sin \tau \end{pmatrix} + B_1(x) \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1(x)$ и $B_1(x)$ — произвольные функции, \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 — частное решение (46) (известные функции).

Уравнения для определения $A_1(x)$, $B_1(x)$ и g_2 получаются в следующем приближении из условия ортогональности в системе уравнений относительно u_2, v_2 . Они представляют собой уравнения в вариациях для (47) по переменным A_0, B_0 и g_1 :

$$\begin{aligned} A_1'' + g_1 B_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial B_0} B_1 - g_2 B_0 + \varphi_1(x), \\ B_1'' - g_1 A_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial A_0} A_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial B_0} B_1 + g_2 A_0 + \psi_1(x). \end{aligned} \quad (51)$$

Более подробно мы на этом останавливаться не будем, но ниже рассмотрим интересный для приложений частный случай системы (44).

5. В монографии [102], посвященной математическим моделям в биофизике, в частности математическому описанию био-

химических реакций, приведена система уравнений

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - v, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + u - \varepsilon^2 (1 - u^2) v, \quad (52)$$

являющаяся частным случаем системы (44). При отсутствии диффузии (членов со вторыми производными по x) система (52) сводится к обыкновенному уравнению Ван дер Поля (см., например, [84])

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -u + \varepsilon^2 (1 - u^2) \frac{du}{dt}, \quad (53)$$

хорошо известному в теории нелинейных колебаний.

Поставим дополнительные условия (45), (49) и будем действовать по схеме, описанной в п. 4. Система (47) в данном случае имеет вид

$$A_0^* + g_1 B_0 = \frac{A_0}{8} (A_0^2 + B_0^2 - 4), \quad B_0^* + g_1 A_0 = \frac{B_0}{8} (A_0^2 + B_0^2 - 4). \quad (54)$$

Умножая первое из этих уравнений на B_0 , а второе на A_0 , вычитая и интегрируя от 0 до l с учетом (45), получим

$$g_1 \int_0^l (A_0^2(x) + B_0^2(x)) dx = 0.$$

Отсюда $g_1 = 0$. При $g_1 = 0$ из (54) следует $\frac{A_0^*}{A_0} = \frac{B_0^*}{B_0}$, откуда

$$\int_0^x (A_0^* B_0 - B_0^* A_0) dx = c = \text{const}, \quad \text{т. е. } (A_0^* B_0 - B_0^* A_0)|_0^x - \\ - \int_0^x (A_0^* B_0' - B_0^* A_0') dx = A_0^*(x) B_0(x) - A_0(x) B_0^*(x) = c,$$

причем из условия при $x=l$ получаем $c=0$. Поэтому $A_0^*(x) B_0(x) - A_0(x) B_0^*(x) = 0$, откуда $B_0(x) = p A_0(x)$, где $p = \text{const}$. Условие (50) дает $p=0$ и, следовательно, $B_0(x) = 0$, а $A_0(x)$ является решением краевой задачи

$$A_0^* = \frac{A_0}{8} (A_0^2 - 4), \quad A_0(0) = 0, \quad A_0(l) = 0. \quad (55)$$

На фазовой плоскости уравнения (55) имеется ячейка, заполненная замкнутыми кривыми (рис. 17). Краевые условия при заданном l определяют, вообще говоря, бесконечно много решений типа изображенных на рис. 18. На этом рисунке изображены решения, не имеющие нулей в интервале $(0, l)$ (рис.

18, а, б), и решение, имеющее один нуль (рис. 18, в). Но могут быть решения и с большим числом нулей, которые не представлены на рисунке. Решению типа а) отвечает на фазовой плоскости (рис. 17) траектория 1 в виде незамкнутой жирной линии, решению типа в) — траектория в виде замкнутой жирной линии 2. Таким образом, решение в целом не единственно, однако в достаточно малой окрестности каждого решения (при фиксированном l) нет других решений задачи (55) и поэтому соответствующее однородное уравнение в вариациях имеет только тривиальное решение.

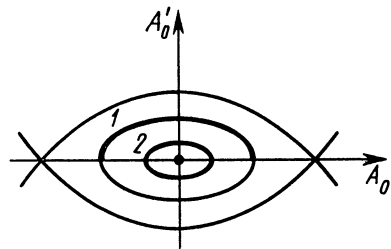


Рис. 17

Возьмем одно из решений задачи (55), например соответствующее рис. 18, а. Тогда u_0, v_0 полностью определены:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A_0(x) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ -\sin \tau \end{pmatrix},$$

а система (46) разрешима и ее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = A_1(x) \begin{pmatrix} \cos \tau \\ -\sin \tau \end{pmatrix} + B_1(x) \begin{pmatrix} \sin \tau \\ \cos \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix},$$

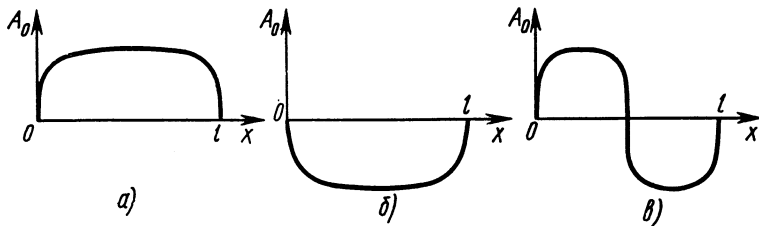


Рис. 18

где $A_1(x)$ и $B_1(x)$ — произвольные функции, а \tilde{u}_1, \tilde{v}_1 — некоторое частное решение системы (46), которое строится элементарно, поскольку в данном случае правая часть (46) есть

$$\begin{pmatrix} A_0''(x) \cos \tau \\ -A_0''(x) \sin \tau + A_0(x) \sin \tau (1 - A_0^2(x) \cos^2 \tau) \end{pmatrix}.$$

Это выражение в силу (55) обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$. Поэтому и $\tilde{u}_1(0, \tau) = \tilde{v}_1(0, \tau) = \tilde{u}_1(l, \tau) = \tilde{v}_1(l, \tau) = 0$.

Далее, система (51) имеет вид

$$A_1^* = \frac{A_1}{8} (3A_0^2 - 4),$$

$$B_1^* = \frac{B_1}{8} (A_0^2 - 4) + g_2 A_0 + \frac{1}{2} (A_0^{(4)} + A_0'') - \frac{3}{8} A_0^2 A_0^* - \frac{A_0^5}{256}, \quad (56)$$

и ее решение должно удовлетворять условиям

$$A_1(0) = A_1(l) = B_1(0) = B_1(l) = B_1(x_0) + \tilde{v}_1(x_0, 0) = 0. \quad (57)$$

Из первого уравнения (56) имеем $A_1 = 0$, так как это уравнение представляет собой уравнение в вариациях для (55), которое в силу сказанного выше имеет только тривиальное решение. Что касается второго уравнения (56), то соответствующее однородное уравнение с условиями $B_1(0) = B_1(l) = 0$, очевидно, имеет нетривиальное решение $B_1 = A_0(x)$. Поэтому для разрешимости задачи (56), (57) для B_1 требуется условие ортогональности правой части и A_0 . Из этого условия определяется g_2 . После этого для B_1 имеем $B_1 = \lambda A_0 + \tilde{B}_1$, где $\tilde{B}_1(x)$ — частное решение второго уравнения (56), а λ — произвольный множитель. Его можно определить из последнего условия (57). Процесс построения членов ряда можно продолжить [63].

Введение дополнительного параметра μ , как в п. 2, дает возможность написать асимптотику решения задачи (55) по параметру μ . Например, для решения, изображенного на рис. 18, а, асимптотика имеет два пограничных слоя (в окрестности $x=0$ и в окрестности $x=l$):

$$A_0(x, \mu) = \bar{A}_0(x) + Q_0 + Q_0^* = 2 - \frac{4}{1 + \exp(x/\mu)} - \frac{4}{1 + \exp((l-x)/\mu)} + O(\mu).$$

Во второе уравнение (56) параметр μ^2 войдет при B_1'' и при A_0'' , а при $A_0^{(4)}$ будет множитель μ^4 . Это дает возможность построить асимптотику B_1 по параметру μ . Можно построить асимптотику по μ и для дальнейших приближений по ϵ .

Естественно ожидать, что если в коэффициентах разложения решения по ϵ оставить лишь регулярную часть разложения по μ , то это приведет к асимптотике по ϵ решения обыкновенного уравнения Ван дер Поля (53). Имеем $\bar{A}_0 = 2$, $\bar{B}_0 = 0$ и далее из второго уравнения (56) в силу того, что $\bar{A}_0^* = \bar{A}_0^{(4)} = 0$,

находим $g_2 = \frac{1}{16}$, а $\bar{B}_1 = 0$. В результате, взяв два члена разложения по ϵ , которые содержат лишь регулярную часть разло-

жения по μ , получим

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos\left(1 - \frac{\varepsilon^4}{16}\right)t \\ \sin\left(1 - \frac{\varepsilon^4}{16}\right)t \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon^2}{4} \begin{pmatrix} \sin 3\left(1 - \frac{\varepsilon^4}{16}\right)t \\ 3 \cos 3\left(1 - \frac{\varepsilon^4}{16}\right)t \end{pmatrix},$$

что совпадает с выражением, приведенным в [84].

В заключение отметим, что аналогичными методами можно исследовать асимптотики периодических решений эллиптических [40] и гиперболических [51] уравнений. Имеется ряд работ, посвященных исследованию устойчивости различных периодических режимов в сингулярно возмущенных задачах (см., например, [49]).

§ 13. Гиперболические системы

В настоящем параграфе будут исследованы некоторые классы гиперболических систем с двумя независимыми переменными. Особенностью рассматриваемых задач является наличие линий (*характеристик*), делящих область изменения независимых переменных на части, в каждой из которых асимптотика решения строится методом пограничных функций. Типичным примером такого рода системы является система телеграфных уравнений [108]. С точки зрения теории сингулярных возмущений телеграфные уравнения будут рассмотрены в п. 13.4.

13.1. Скалярное уравнение с частными производными первого порядка

1. Рассмотрим уравнение ($\varepsilon > 0$ — малый параметр)

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a(x, t)u + f(x, t), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2)$$

Пусть $\Lambda(x, t)$, $a(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$ — достаточно гладкие функции в прямоугольнике $\bar{\Omega} = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)$ и, кроме того, $\Lambda(x, t) > 0$, $a(x, t) < 0$ в $\bar{\Omega}$.

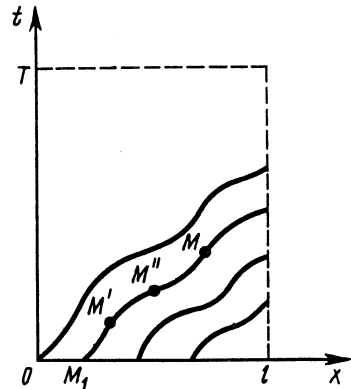


Рис. 19

Семейство линий, определяемых уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(x, t), \quad (3)$$

назовем *характеристиками* *) уравнения (1). При $\Lambda(x, t) > 0$ характеристики, выпущенные из точек отрезка $0 \leq x \leq l$, расположены при $t > 0$ выше оси x (рис. 19). Будем считать, что треугольная область Ω_1 , ограниченная характеристикой, проходящей через точку $(0, 0)$, осью x и прямой $x=l$, принадлежит $\bar{\Omega}$.

Решение задачи (1), (2) можно построить в явной форме, пользуясь методом первых интегралов [107]. Сопоставим (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(x, t), \quad \varepsilon \frac{du}{dt} = a(x, t)u + f(x, t). \quad (4)$$

Из первого уравнения находим один из первых интегралов $\Phi(x, t) = c_1$, откуда можно получить общее решение уравнения (3) $x = X(t, c_1)$ (при этом $X(t, \Phi(x, t)) \equiv x$), описывающее вышеупомянутое семейство характеристик. Затем из второго уравнения (4) найдем

$$u = c_2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(X(t', c_1), t') dt'\right) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t'}^t a(X(t'', c_1), t'') dt''\right) f(X(t', c_1), t') dt'.$$

Начальное условие (2) запишем в форме $x = \xi, t = 0, u = \varphi(\xi)$. Тогда получим $X(0, c_1) = \xi, c_2 = \varphi(\xi)$ и, следовательно, $c_2 = \varphi(X(0, c_1))$. Поэтому решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(X(0, \Phi(x, t))) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(X(t', \Phi(x, t)), t') dt'\right) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t'}^t a(X(t'', \Phi(x, t)), t'') dt''\right) f(X(t', \Phi(x, t)), t') dt'. \quad (5)$$

Обратим внимание на геометрический смысл этого представления. Оно показывает, что для получения решения в точке $M(x, t)$ надо интегрировать от точки на оси x вдоль характеристики, проходящей через точку $M(x, t)$. Для дальнейшего удобна сле-

*) Точнее, линии, определяемые уравнением (3), представляют собой проекции характеристик на плоскость (x, t) ; сами же характеристики являются линиями в пространстве (u, x, t) и определяются системой (4).

дующая запись выражения для u , геометрически более прозрачная (точки M, M_1, M', M'' указаны на рис. 19):

$$u(M) = u(M_1) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_M} a(M') dt_{M'}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{t_M} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{M'}}^{t_M} a(M'') dt_{M''}\right) f(M') dt_{M'}. \quad (6)$$

Формула (5) или (6) определяет решение задачи (1), (2) в треугольной области Ω_1 .

Непосредственно из формулы (5) можно получить асимптотическое разложение решения задачи (1), (2), имеющее пограничный характер. Однако мы поступим иначе, имея в виду возможность обобщения метода на более сложные случаи, когда решение задачи уже не представимо в явной форме.

Будем строить асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) в виде

$$u = \bar{u}(x, t, \varepsilon) + \Pi(x, \tau, \varepsilon), \quad (7)$$

где

$$\bar{u}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, t) + \dots + \varepsilon^k \bar{u}_k(x, t) + \dots$$

— регулярный ряд, а

$$\Pi(x, \tau, \varepsilon) = \Pi_0(x, \tau) + \varepsilon \Pi_1(x, \tau) + \dots + \varepsilon^k \Pi_k(x, \tau) + \dots$$

— пограничный ряд в окрестности $t=0$ ($\tau=t/\varepsilon$). Подставляя (7) в (1), (2), получим для \bar{u}_0, Π_0 уравнения

$$a(x, t) \bar{u}_0 + f(x, t) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = a(x, 0) \Pi_0, \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0),$$

а для \bar{u}_1, Π_1 — уравнения

$$a(x, t) \bar{u}_1 = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} = a(x, 0) \Pi_1 + \frac{\partial a}{\partial t}(x, 0) \tau \Pi_0 - \Lambda(x, 0) \frac{\partial \Pi_0}{\partial x},$$

$$\Pi_1(x, 0) = -\bar{u}_1(x, 0),$$

т. е. члены разложения (7) находятся по обычному алгоритму. Для пограничных функций имеем обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие x как параметр. В силу условия $a(x, t) < 0$ погранфункции экспоненциально убывают при

$\tau \rightarrow \infty$. Построение членов более высокого порядка в разложении (7) проводится таким же образом.

Положим $U_n(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k + \Pi_k)$, $w = u - U_n$ (w — остаточный член асимптотики). Функция w удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda(x, t) w \right) = a(x, t) w + R, \quad (8)$$

где $R = O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно в Ω_1 , и начальному условию $w(x, 0, \varepsilon) = 0$.

Пользуясь теперь формулой (6) применительно к задаче для w и учитывая, что $a(x, t) < 0$, легко получить оценку

$$\max_{\Omega_1} |w(x, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}). \quad (9)$$

2. Рассмотрим теперь уравнение более общее, чем (1), в котором правая часть нелинейна по u :

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(u, x, t, \varepsilon). \quad (10)$$

Пусть $\Lambda(x, t)$ и $F(u, x, t, \varepsilon)$ — достаточно гладкие функции в области $\bar{\Omega} \times \{|u| \leq H\}$, $H = \text{const} > 0$.

Асимптотическое разложение решения задачи (10), (2) будем также строить в виде ряда (7). Для \bar{u}_0, Π_0 имеем уравнения

$$F(\bar{u}_0, x, t, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = F(\bar{u}_0(x, 0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0). \quad (11)$$

Из уравнения для \bar{u}_0 находим $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(x, t)$ (предполагаем, что $\bar{u}_0(x, t)$ — изолированный корень уравнения) и в уравнении для Π_0 величина $\bar{u}_0(x, 0)$, таким образом, известна.

Пусть выполнено условие устойчивости $F_u(\bar{u}_0(x, t), x, t, 0) < 0$ в Ω_1 , а начальное значение $\varphi(x) - \bar{u}_0(x, 0)$ принадлежит области влияния асимптотически устойчивой точки покоя $\Pi_0 = 0$ уравнения (11).

Тогда $\Pi_0(x, \tau)$ экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \infty$.

Для \bar{u}_1, Π_1 получаются уравнения

$$F_u(\bar{u}_0, x, t, 0) \bar{u}_1 = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} = F_u(x, \tau) \Pi_1 + (F_u(x, \tau) - \bar{F}_u(x, 0)) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial t}(x, 0) \tau + \bar{u}_1(x, 0) \right) + (F_t(x, \tau) - \bar{F}_t(x, 0)) \tau - \\ - \Lambda(x, 0) \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}, \quad \Pi_1(x, 0) = -\bar{u}_1(x, 0).$$

Здесь употребляются такие же обозначения, что и в п. 4.2. Из этих уравнений однозначно определяются \bar{u}_1 и Π_1 . Дальнейшие члены разложения (7) также строятся в соответствии с алгоритмом, описанным в п. 4.2.

Для остаточного члена $w = u - U_n$ получим задачу

$$\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) = F_u(\bar{u}_0 + \Pi_0, x, t, 0) w + g(w, x, t, \varepsilon), \\ w(x, 0, \varepsilon) = 0, \quad (12)$$

где функция g обладает такими же двумя свойствами, как в п. 3.1.

Решение задачи (12) уже не может быть представлено в явном виде, но формула (6) дает интегральное уравнение относительно w :

$$w(M) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t'}^t F_u(\bar{u}_0(M'') + \Pi_0(M''), M'', 0) dt'' \right) \times \\ \times g(w(M'), M', \varepsilon) dt_{M'}.$$

К этому уравнению можно применить метод последовательных приближений (как это было сделано в п. 3.1) и, используя условие устойчивости и свойства функции g , доказать существование и единственность решения задачи (12) и оценку (9).

3. Аналогичный результат можно получить для еще более общего уравнения (Λ зависит от u):

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(u, x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad (13)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x). \quad (14)$$

В этом случае асимптотическое разложение решения снова ищется в виде ряда (7), члены которого определяются по обычному алгоритму.

Обратим внимание на то обстоятельство, что вместо распадающейся системы (4) теперь будем иметь систему

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda(u, x, t), \quad \varepsilon \frac{du}{dt} = F(u, x, t, \varepsilon). \quad (15)$$

Эта система определяет характеристики квазилинейного уравнения (13). Областью определения решения служит треуголь-

ник, ограниченный осью x , прямой $x=l$ и проекцией на плоскость (x, t) той характеристики, которая удовлетворяет начальному условию $x|_{t=0}=0, u|_{t=0}=\varphi(0)$. В рассмотренных выше случаях характеристиками назывались именно проекции. Они определялись как решения уравнения (3) и не пересекались. Однако для системы (15) расположенные в пространстве характеристики не пересекаются, а их проекции могут пересекаться, что приводит к непродолжаемости классического решения (см. [107]). Оказывается, наличие малого параметра ε в уравнении (13) препятствует этому явлению пересечения, поскольку проекции характеристик при достаточно малом ε описываются выродившимся уравнением $\frac{dx}{dt} = \Lambda(\bar{u}(x, t), x, t)$ ($\bar{u}(x, t)$ — корень уравнения $F(\bar{u}, x, t, 0) = 0$), решения которого образуют однопараметрическое семейство непересекающихся кривых.

Покажем, не производя точных оценок, как можно получить главный член асимптотики решения задачи (13), (14), используя систему (15). Построим семейство характеристик, или, что то же самое, найдем два первых интеграла системы (15), взяв в качестве c_1 и c_2 значения x и u при $t=0$. Решение системы (15) с начальными условиями $x|_{t=0}=c_1, u|_{t=0}=c_2$ имеет (с точностью $O(\varepsilon)$) представление (см. п. 4.2)

$$x = \bar{x}_0(t, c_1), u = \bar{u}(\bar{x}_0(t, c_1), t) + \Pi_0(\tau, c_1, c_2),$$

где \bar{x}_0, Π_0 — решения задач

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_0}{dt} &= \Lambda(\bar{u}(\bar{x}_0, t), \bar{x}_0, t), \bar{x}_0|_{t=0}=c_1, \\ \frac{d\Pi_0}{d\tau} &= F(\bar{u}(c_1, 0) + \Pi_0, c_1, 0, 0), \Pi_0|_{\tau=0}=c_2 - \bar{u}(c_1, 0). \end{aligned} \quad (16)$$

Из начального условия имеем $c_2 = \varphi(c_1)$ и поэтому с точностью $O(\varepsilon)$

$$u = \bar{u}(\bar{x}_0(t, c_1), t) + \Pi_0(\tau, c_1, \varphi(c_1)),$$

где $c_1 = \Phi(x, t)$ определяется уравнением $x = \bar{x}_0(t, c_1)$ (заметим, что $\bar{x}_0(t, \Phi(x, t)) \equiv x$). Окончательно с точностью $O(\varepsilon)$ найдем

$$u = \bar{u}(x, t) + \Pi_0(\tau, \Phi(x, t), \varphi(\Phi(x, t))). \quad (17)$$

Отметим, что если к задаче (13), (14) применить стандартный алгоритм построения асимптотики в виде (7), то в нулевом приближении получим

$$u = \bar{u}(x, t) + \Pi_0(\tau, x, \varphi(x)). \quad (18)$$

Здесь $\Pi_0(\tau, x, \varphi(x))$ есть решение задачи (16), где положено $c_1=x, c_2=\varphi(x)$. В выражении (17) Π_0 является решением той же задачи, но при $c_1=\Phi(x, t), c_2=\varphi(\Phi(x, t))$ (x и t считаются параметрами). Так как $\Phi(x, 0)=x$, то вторые и третьи аргументы у функций Π_0 в (17) и (18) отличаются на величину порядка t . Можно показать, что сами функции Π_0 при этом отличаются на величину порядка ε , так что обе формулы (17) и (18) дают решение задачи (13), (14) с точностью $O(\varepsilon)$.

4. Для уравнения (1) можно поставить смешанную задачу $u(x, 0, \varepsilon)=\varphi(x), 0 \leq x \leq l; u(0, t, \varepsilon)=\psi(t), 0 \leq t \leq T$. (19)

В этом случае решение будет определено во всем прямоугольнике $\bar{\Omega} = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)$. Фактически можно решать две отдельные задачи: одну из них мы уже рассмотрели в п. 1 — ее решение дается формулой (6) и определено в области Ω_1 (рис. 20), а другая задача отличается от первой только тем, что x и t меняются ролями — ее решение определено в области Ω_2 . Чтобы такое «составное» решение было классическим во всем прямоугольнике $\bar{\Omega}$, т. е. непрерывным вместе с производными первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия согласования.

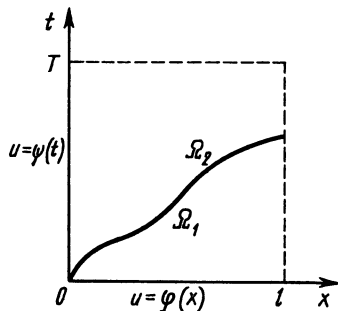


Рис. 20

Для непрерывности u вдоль угловой характеристики необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\varphi(0) = \psi(0). \quad (20)$$

Чтобы убедиться в этом, нужно написать для решения в области Ω_2 формулу, аналогичную (6), и сравнить ее с (6). Равенство (20) называется *условием согласования нулевого порядка*. Чтобы получить условие непрерывности первых производных от u , надо продифференцировать уравнение (1) по соответствующей переменной и выписать условие типа (20). Например, для

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \text{ имеем}$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) = av + \frac{\partial a}{\partial t} u + \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$v(0, t, \varepsilon) = \dot{\psi}(t),$$

$$v(x, 0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (a(x, 0) \varphi(x) + f(x, 0)) - \Lambda(x, 0) \varphi'(x)$$

(последнее соотношение получается непосредственно из (1)). Роль $\varphi(x)$ играет для v функция

$\frac{1}{\varepsilon}(a(x, 0)\varphi(x) + f(x, 0)) - \Lambda(x, 0)\varphi'(x)$, а роль $\psi(t)$ — функция $\psi'(t)$. Приравнявая их при $x=0, t=0$, получим

$$\varepsilon(\psi'(0) + \Lambda(0, 0)\varphi'(0)) = a(0, 0)\varphi(0) + f(0, 0).$$

Обратим внимание на структуру этого соотношения. Оно имеет вид уравнения (1), в которое вместо u и его производных подставлены начальная и краевая функции $\varphi(x)$ и $\psi(t)$ и их производные при $x=0, t=0$. Чтобы это соотношение было справедливо при любом ε , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\psi'(0) + \Lambda(0, 0)\varphi'(0) = 0, \quad a(0, 0)\varphi(0) + f(0, 0) = 0. \quad (21)$$

Условие непрерывности производной $\frac{\partial u}{\partial x}$, как нетрудно проверить, приводит к тем же соотношениям (21). Условия (21) означают, в частности, что $\varphi(0)$ и равное ему значение $\psi(0)$ не могут быть заданы произвольно, а должны быть равны $-f(0, 0)/a(0, 0)$.

Итак, равенства (20) и (21), называемые *условиями согласования первого порядка*, обеспечивают существование классического решения задачи (1), (19) в прямоугольнике $\bar{\Omega}$. Что касается асимптотики, то в области Ω_1 она уже построена в виде разложения (7), а в области Ω_2 может быть получена аналогичным образом в виде

$$u = \bar{u}(x, t, \varepsilon) + Q(\xi, t, \varepsilon), \quad (22)$$

где Q — пограничный ряд в окрестности $x=0$ ($\xi = x/\varepsilon$).

13.2. Система двух уравнений первого порядка

1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= a_{11}u + a_{12}v + f, \\ \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= a_{21}u + a_{22}v + g, \end{aligned} \quad (23)$$

где $a_{ik} = a_{ik}(x, t)$, $\Lambda_i = \Lambda_i(x, t)$, $f(x, t)$ и $g(x, t)$ — достаточно гладкие функции. Пусть, кроме того, $\Lambda_1 < \Lambda_2$ в $\bar{\Omega} = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)$. Зададим начальные условия

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi_1(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = \varphi_2(x). \quad (24)$$

При $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$ решение задачи определено в треугольнике G , изображенном на рис. 21, а; при $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 > 0$ — в треугольнике G , изображенном на рис. 21, б. На этих рисунках оба

треугольника покрыты двумя семействами характеристик, определяемых уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda_1(x, t) \text{ и } \frac{dx}{dt} = \Lambda_2(x, t).$$

Пусть собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ удовлетворяют условиям $\text{Re } \lambda_i < 0$ в G .

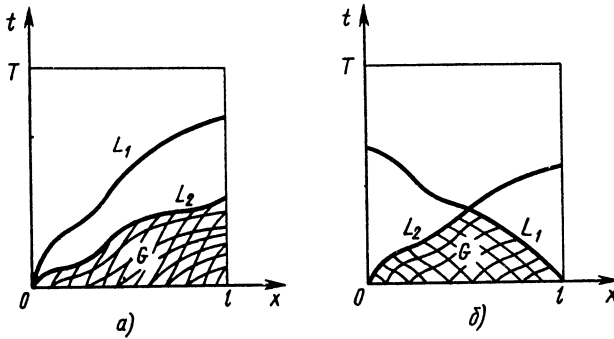


Рис. 21

Тогда асимптотика решения строится стандартным способом в виде рядов типа (7). В нулевом приближении имеем задачу

$$a_{11}\bar{u}_0 + a_{12}\bar{v}_0 + f = 0, \quad a_{21}\bar{u}_0 + a_{22}\bar{v}_0 + g = 0, \quad (25)$$

$$\frac{d\Pi_0 u}{d\tau} = a_{11}(x, 0)\Pi_0 u + a_{12}(x, 0)\Pi_0 v,$$

$$\frac{d\Pi_0 v}{d\tau} = a_{21}(x, 0)\Pi_0 u + a_{22}(x, 0)\Pi_0 v,$$

$$\Pi_0 u(x, 0) = \varphi_1(x) - \bar{u}_0(x, 0), \quad \Pi_0 v(x) = \varphi_2(x) - \bar{v}_0(x, 0),$$

откуда однозначно определяются \bar{u}_0 , \bar{v}_0 , $\Pi_0 u$, $\Pi_0 v$. В силу условия $\text{Re } \lambda_i < 0$ пограничные функции $\Pi_0 u$, $\Pi_0 v$ экспоненциально стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Дальнейшие приближения также строятся по стандартному способу.

Для остаточного члена $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - U_n \\ v - V_n \end{pmatrix}$ получается система уравнений, которая записывается так же, как (8), только теперь Λ является диагональной матрицей: $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$.

При оценке остаточного члена из векторной системы (8) возникают определенные трудности, так как для векторного случая

нет формулы обращения, аналогичной (6). Сравнительно просто удастся получить оценку для ω , если сделать дополнительное предположение: $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, а a_{12} и a_{21} достаточно малы по модулю.

Продемонстрируем получение оценки при этом условии для случая $a_{ik} = \text{const}$. Положим $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$. Применяя формулу (6) к каждому из двух уравнений (8) в отдельности, получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1(M) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{M_1, M} \exp\left(\frac{a_{11}}{\varepsilon}(t_M - t_{M'})\right) (a_{12}\omega_2(M') + R_1(M')) dt_{M'}, \\ \omega_2(M) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{M_2, M} \exp\left(\frac{a_{22}}{\varepsilon}(t_M - t_{M''})\right) (a_{21}\omega_1(M'') + R_2(M'')) dt_{M''}. \end{aligned} \quad (26)$$

Эта запись имеет следующий геометрический смысл: в первом уравнении интегрирование ведется вдоль характеристики L_1 от точки M_1 до точки $M(x, t)$, а во втором уравнении — от точки M_2 до точки $M(x, t)$ вдоль характеристики L_2 (рис. 22).

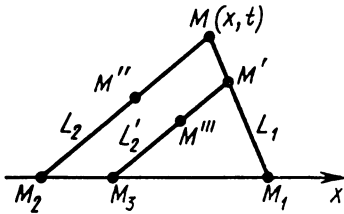


Рис. 22

От (26) перейдем к одному интегральному уравнению для ω_1 , подставляя ω_2 из второго уравнения (26) в первое. При этом, чтобы получить ω_2 в точке M' на L_1 , надо

проинтегрировать вдоль характеристики L_2' (точки ее обозначим M''') от точки M_3 до точки M' (рис. 22). В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} \omega_1(M) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{M_1, M} \exp\left(\frac{a_{11}}{\varepsilon}(t_M - t_{M'})\right) \times \\ &\times \left[a_{12} \frac{1}{\varepsilon} \int_{M_3, M'} \exp\left(\frac{a_{22}}{\varepsilon}(t_{M'} - t_{M''})\right) a_{21} \omega_1(M''') dt_{M''} \right] dt_{M'} + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned} \quad (27)$$

Член $O(\varepsilon^{n+1})$ в этом уравнении дают слагаемые, содержащие R_1 и R_2 .

Из уравнения (27) получаем

$$\max_G |\omega_1| \leq \frac{\delta^2}{\kappa^2} \max_G |\omega_1| + O(\varepsilon^{n+1}),$$

где $\delta = \max(|a_{12}|, |a_{21}|)$, $\kappa = \min(|a_{11}|, |a_{22}|)$. При достаточно малом δ , а именно при $\delta < \kappa$, отсюда следует, что $\max_G |\omega_1| = O(\varepsilon^{n+1})$. Аналогичная оценка справедлива и для ω_2 .

З а м е ч а н и я. 1) Описанный алгоритм, а также способ доказательства распространяется на случай, когда система типа (23) состоит из N уравнений ($N > 2$), u есть N -мерная вектор-функция, а правая часть нелинейна по u :

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(u, x, t, \varepsilon), \quad u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x).$$

Здесь $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$, $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_N$. Решение этой задачи определено в треугольной области, ограниченной сверху двумя характеристиками L_1 и L_N , отвечающими Λ_1 и Λ_N , если они имеют разные знаки, или одной характеристикой, отвечающей либо Λ_N , если $\Lambda_1 > 0$, либо Λ_1 , если $\Lambda_N < 0$.

2) Для двумерной системы (23) с постоянными коэффициентами можно воспользоваться еще одним способом оценки остаточного члена. Этот способ применялся, например, в [42] в связи с исследованием критического случая, о котором будет идти речь ниже, в п. 13.3. Он состоит в переходе от системы к одному дифференциальному уравнению второго порядка с последующим использованием формулы Римана. Этот способ позволяет избавиться от требования малости a_{12} и a_{21} , но по-прежнему использует условие $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$.

2. Рассмотрим теперь для системы (23) смешанную задачу

$$u(x, 0, \varepsilon) = \varphi_1(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = \varphi_2(x),$$

$$u(0, t, \varepsilon) = \psi_1(t), \quad v(0, t, \varepsilon) = \psi_2(t). \quad (23)$$

Пусть $\Lambda_2 > \Lambda_1 > 0$ (рис. 21, а), а матрица a по-прежнему удовлетворяет условиям $\text{Re } \lambda_i < 0$.

Для того чтобы в прямоугольнике $\bar{\Omega}$ существовало классическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия согласования, аналогичные (20), (21):

$$\varphi_i(0) = \psi_i(0) \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

$$\psi_1'(0) + \Lambda_1(0, 0) \varphi_1'(0) = 0, \quad \psi_2'(0) + \Lambda_2(0, 0) \varphi_2'(0) = 0,$$

$$a_{11}(0, 0) \varphi_1(0) + a_{12}(0, 0) \varphi_2(0) + f(0, 0) = 0, \quad (29)$$

$$a_{21}(0, 0) \varphi_1(0) + a_{22}(0, 0) \varphi_2(0) + g(0, 0) = 0.$$

В области Ω_1 (рис. 23) асимптотика строится, как в п. 1, т. е. в виде ряда (7). В области $\bar{\Omega}_2$ асимптотика строится аналогично, только меняются роли x и t (см. (22)). Таким образом, можно получить на характеристиках L_1 и L_2 решение с любой степенью точности. Выделим сколь угодно малую, но фиксированную при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестность точки $(0, 0)$ и будем рассматривать область $\tilde{\Omega}_3$, лежащую между характеристиками L_1 и L_2 и не содержащую этой окрестности. В области $\tilde{\Omega}_3$ построим асимптотику решения в виде одного регулярного ряда $y = \tilde{y}(x,$

t, ε), $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, члены которого в нулевом приближении определяются системой (25), а в следующих приближениях — рекуррентными алгебраическими системами, такими же, как в Ω_1 и Ω_2 . Введем в $\tilde{\Omega}_3$ остаточный член w по формуле

$$w = y(x, t, \varepsilon) - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \bar{y}_k(x, t).$$

На линиях \tilde{L}_1 и \tilde{L}_2 (это части характеристик L_1 и L_2 , лежащие вне выделенной окрестности точки $(0, 0)$) имеем, согласно результатам п. 1, $\max_{\tilde{L}_i} \|w\| = O(\varepsilon^{n+1})$.

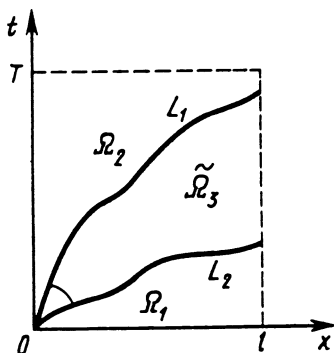


Рис. 23

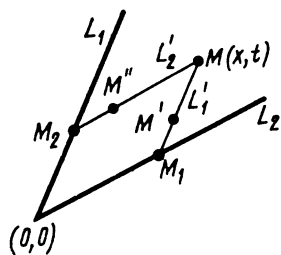


Рис. 24

Напишем в $\tilde{\Omega}_3$ уравнения для $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, аналогичные (26) (снова будем считать коэффициенты постоянными в целях простоты записи). В отличие от (26) они будут содержать еще внеинтегральные члены (рис. 24):

$$\begin{aligned} w_1(M) &= w_1(M_1) \exp\left(\frac{a_{11}}{\varepsilon}(t_M - t_{M_1})\right) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{M_1 M} \exp\left(\frac{a_{11}}{\varepsilon}(t_M - t_{M'})\right) [a_{12}w_2(M') + R_1(M')] dt_{M'}, \\ w_2(M) &= w_2(M_2) \exp\left(\frac{a_{22}}{\varepsilon}(t_M - t_{M_2})\right) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{M_2 M} \exp\left(\frac{\tilde{a}_{22}}{\varepsilon}(t_M - t_{M'})\right) [a_{21}w_1(M') + R_2(M')] dt_{M'}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $\max_{\tilde{L}_i} |w_i(M_i)| = O(\varepsilon^{n+1})$, $\max_{\tilde{\Omega}_3} |R_i| = O(\varepsilon^{n+1})$, то из (30)

получается уравнение вида (27), из которого находим $\max_{\tilde{\Omega}_3} |w_1| = O(\varepsilon^{n+1})$ и, следовательно, $\max_{\tilde{\Omega}_3} |w_2| = O(\varepsilon^{n+1})$ и $\max_{\tilde{\Omega}_3} \|w\| = O(\varepsilon^{n+1})$.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 13.1. Для решения $y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ задачи (23), (28) имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\text{в области } \Omega_1 \quad y = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k(x, t) + \Pi_k y(x, \tau)) + O(\varepsilon^{n+1});$$

$$\text{в области } \tilde{\Omega}_3 \quad y = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k(x, t) + O(\varepsilon^{n+1}));$$

$$\text{в области } \Omega_2 \quad y = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k(x, t) + Q_k y(\xi, t)) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

3. Пусть $\Lambda_1 < 0$, $\Lambda_2 > 0$ (рис. 21, б), а матрица a удовлетворяет прежнему требованию $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

Дополнительные условия для системы (23) зададим в виде

$$\begin{aligned} u(x, 0, \varepsilon) &= \varphi_1(x), & v(x, 0, \varepsilon) &= \varphi_2(x), \\ v(0, t, \varepsilon) &= \psi_1(t), & u(l, t, \varepsilon) &= \psi_2(t). \end{aligned} \quad (31)$$

Потребуем выполнения следующих условий согласования:

$$\begin{aligned} \varphi_2(0) &= \psi_1(0), & \varphi_1(l) &= \psi_2(0), \\ \psi_2'(0) + \Lambda_1(l, 0) \varphi_1'(l) &= 0, & \psi_1'(0) + \Lambda_2(0, 0) \varphi_2'(0) &= 0, \\ a_{11}(l, 0) \varphi_1(l) + a_{12}(l, 0) \varphi_2(l) + f(l, 0) &= 0, \\ a_{21}(0, 0) \varphi_1(0) + a_{22}(0, 0) \varphi_2(0) + g(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$, $a_{12}a_{21} < a_{11}a_{22}$.

Эти условия обеспечивают отрицательность действительных частей собственных значений матрицы a и, кроме того, при этих условиях матрица $b(x, t) = \begin{pmatrix} a_{11}/\Lambda_1 & a_{12}/\Lambda_1 \\ a_{21}/\Lambda_2 & a_{22}/\Lambda_2 \end{pmatrix}$ имеет действительные собственные значения разных знаков.

В области Ω_1 (рис. 25) асимптотика решения задачи (23), (31) строится, как и в п. 1, в виде (7). Рассмотрим область Ω_2 . Регулярный ряд здесь такой же, как в Ω_1 , а погранфункции нулевого приближения $Q_0 y(\xi, t) = \begin{pmatrix} Q_0 u \\ Q_0 v \end{pmatrix}$ в окрестности $x=0$ удовлетворяют следующей системе уравнений ($\xi = x/\varepsilon$):

$$\begin{aligned} \Lambda_1(0, t) \frac{\partial Q_0 u}{\partial \xi} &= a_{11}(0, t) Q_0 u + a_{12}(0, z) Q_0 v, \\ \Lambda_2(0, t) \frac{\partial Q_0 v}{\partial \xi} &= a_{21}(0, t) Q_0 u + a_{22}(0, t) Q_0 v. \end{aligned} \quad (32)$$

Дополнительное условие для этой системы — только одно:

$$Q_0 v(0, t) = \psi_1(t) - \bar{v}_0(0, t), \quad (33)$$

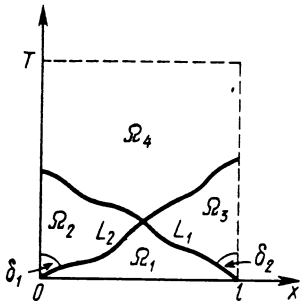


Рис. 25

так как $u(0, t, \varepsilon)$ не задано. Однако если принять во внимание, что матрица системы (32) совпадает с введенной выше матрицей b , имеющей собственные значения разных знаков, то становится ясно, что условие (33) вместе с условием $Q_0 y(\infty, t) = 0$ однозначно определяет решение системы (32), причем $Q_0 y$ экспоненциально стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Таким образом, мы здесь имеем аналог условно устойчивого случая. Подобным же образом определяются Q -функции более высоких порядков.

В области Ω_3 асимптотика строится, как в Ω_2 , но появляются пограничные функции $Q^* y(\xi_*, t)$ ($\xi_* = \frac{l-x}{\varepsilon}$) в окрестности прямой $x=l$, которые определяются из условно устойчивых систем, аналогичных (32).

Итак, в области Ω_2 асимптотика решения имеет вид

$$y = \bar{y}(x, t, \varepsilon) + Qy(\xi, t, \varepsilon),$$

а в области Ω_3 — вид

$$y = \bar{y}(x, t, \varepsilon) + Q^* y(\xi_*, t, \varepsilon).$$

Оценку остаточного члена $w = y - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k + Q_k y)$ проведем

в области $\tilde{\Omega}_2$ (это область Ω_2 с удаленной из нее сколь угодно малой, но фиксированной при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестностью δ_1 точки $(0, 0)$; см. рис. 25). Вектор-функция $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ по-прежнему удовлетворяет системе уравнений (8) и дополнительным условиям

$$w_2|_{x=0} = 0, \quad \max_{\tilde{L}_2} |w_1| = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (34)$$

(\tilde{L}_2 — это характеристика L_2 с выброшенным из нее участком, принадлежащим выделенной выше окрестности точки $(0, 0)$).

Второе из условий (34) получается следующим образом. Используя представление для решения в Ω_1 , которое получено в п. 1, на L_2 имеем $\left| u - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k + \Pi_k u) \right| = O(\varepsilon^{n+1})$. Следовательно,

$$\text{но, } \left| u - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \bar{u}_k \right| = O(\varepsilon^{n+1}), \text{ а тогда}$$

$$|\omega_1| = \left| u - \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{u}_k + Q_k u) \right| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Далее можно написать для ω_1, ω_2 интегральные уравнения, которые в случае постоянных коэффициентов a_{ij} имеют такой же вид, как (30), с тем упрощением, что $\omega_2(M_2) = 0$ (расположение точек M, M_1, M_2 см. на рис. 26). После этого, как и для (30), получается оценка

$$\max_{\bar{\Omega}_2} \|\omega\| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Аналогично доказывается оценка остаточного члена в области $\bar{\Omega}_3$. В результате получается, что в $\bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3$ справедливо асимптотическое разложение $y = \bar{y} + Qy + Q^*y$. Тем же методом интегральных уравнений можно доказать справедливость этого разложения в области Ω_4 (см. рис. 25). Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 13.2. Для решения задачи (23), (31) имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\text{в области } \bar{\Omega}_1 \quad y = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k + \Pi_k y) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

$$\text{в области } \{\bar{\Omega} / (\Omega_1 \cup \delta_1 \cup \delta_2)\} \quad y = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k (\bar{y}_k + Q_k y + Q_k^* y) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Сделаем несколько заключительных замечаний по п. 13.2.

1) Результаты можно обобщить на случай, когда правые части (23) нелинейно зависят от u и v .

2) Задачи, подобные рассмотренным в п. 13.2, изучались рядом авторов [50, 53, 70, 82, 83, 103, 114, 117]. В некоторых из этих работ получены оценки остаточных членов в интегральных

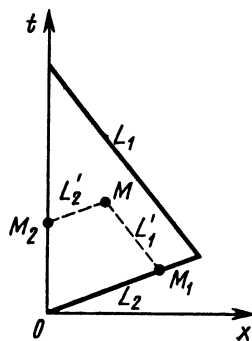


Рис. 26

нормах. Здесь были изложены результаты, полученные в [50, 53, 70].

13.3. Критический случай

1. В настоящем пункте мы продемонстрируем явление внутреннего переходного слоя, которое наблюдается в системе (23), когда матрица a вырожденная.

Рассмотрим систему уравнений с постоянными коэффициентами

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -au + bv, \quad \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \gamma(au - bv) \quad (35)$$

при условиях (28). Пусть $\Lambda_2 > \Lambda_1 > 0$, $a > 0$, $\gamma b > 0$. Тогда матрица $\begin{pmatrix} -a & b \\ \gamma a & -\gamma b \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -a - \gamma b < 0$. Таким образом, налицо критический случай — вырожденная система имеет семейство решений. Решение задачи (35) будем рассматривать в прямоугольнике $\bar{\Omega} = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)$. Заданные функции $\varphi_i(x)$, $\psi_i(t)$ ($i=1, 2$) предполагаются непрерывными вместе с производными до второго порядка включительно (поскольку будут построены только главные члены асимптотики). Предполагается также, что выполнены условия согласования (29).

Построение асимптотики решения проводится по тому же алгоритму, как и в других задачах в критических случаях. Система уравнений для главных членов регулярной части асимптотики

$$-a\bar{u}_0 + b\bar{v}_0 = 0, \quad \gamma(a\bar{u}_0 - b\bar{v}_0) = 0$$

имеет семейство решений

$$\bar{u}_0 = \alpha_0, \quad \bar{v}_0 = \frac{a}{b} \alpha_0, \quad (36)$$

где $\alpha_0 = \alpha_0(x, t)$ — пока произвольная функция. Уравнение для нее получается в следующем приближении из условия разрешимости системы уравнений для \bar{u}_1, \bar{v}_1 :

$$-a\bar{u}_1 + b\bar{v}_1 = \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \Lambda_1 \frac{\partial \alpha_0}{\partial x}, \quad \gamma(a\bar{u}_1 - b\bar{v}_1) = \frac{a}{b} \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \Lambda_2 \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} \right).$$

Умножая первое уравнение на γ и складывая со вторым, получим условие разрешимости этой системы:

$$(a + \gamma b) \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + (a\Lambda_2 + \gamma b\Lambda_1) \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} = 0. \quad (37)$$

Это и есть уравнение для функции $\alpha_0(x, t)$. Отсюда получаем

$$\alpha_0 = \Phi((a + \gamma b)x - (a\Lambda_2 + \gamma b\Lambda_1)t), \quad (38)$$

где Φ — пока не известная функция.

Проходящая через точку $(0, 0)$ характеристика уравнения (37) (рис. 27, линия L_3), т. е. прямая $x = \Lambda_3 t$, где $\Lambda_3 = \frac{(a\Lambda_2 + \gamma b\Lambda_1)}{(a + \gamma b)}$,

в силу наложенных выше условий на коэффициенты уравнений (35) лежит между прямыми L_1 и L_2 , уравнения которых $x = \Lambda_1 t$ и $x = \Lambda_2 t$ соответственно. Ниже прямой L_3 функция Φ определяется при построении $\Pi_0 u(x, \tau)$ и $\Pi_0 v(x, \tau)$ — пограничных функций в окрестности $t=0$ ($\tau = t/\varepsilon$). Для них получается система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \tau} &= -a \Pi_0 u + b \Pi_0 v, \\ \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \tau} &= \gamma (a \Pi_0 u - b \Pi_0 v) \end{aligned} \quad (39)$$

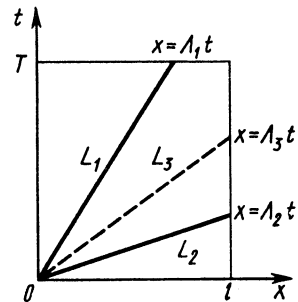


Рис. 27

с начальными условиями

$$\Pi_0 u(x, 0) = \varphi_1(x) - \bar{u}_0(x, 0), \quad \Pi_0 v(x, 0) = \varphi_2(x) - \bar{v}_0(x, 0). \quad (40)$$

Решая систему (39) и учитывая условие стремления Π -функций к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, находим семейство решений, зависящее от произвольной функции $A(x)$:

$$\Pi_0 u = A(x) \exp(\lambda_2 \tau), \quad \Pi_0 v = -\gamma A(x) \exp(\lambda_2 \tau).$$

Подставляя эти выражения в (40) и используя (36), (38), получим систему двух уравнений для определения $A(x)$ и $\Phi((a + \gamma b)x)$:

$$\Phi((a + \gamma b)x) + A(x) = \varphi_1(x), \quad \frac{a}{b} \Phi((a + \gamma b)x) - \gamma A(x) = \varphi_2(x).$$

Выразив отсюда Φ и A , найдем окончательно \bar{u}_0 и \bar{v}_0 ниже прямой L_3 , а также $\Pi_0 u$ и $\Pi_0 v$:

$$\bar{u}_0 = -\frac{b}{\lambda_2} (\gamma \varphi_1(x - \Lambda_3 t) + \varphi_2(x - \Lambda_3 t)) \equiv \bar{u}_0^{(H)}, \quad \bar{v}_0 = \frac{a}{b} \bar{u}_0^{(H)} \equiv \bar{v}_0^{(H)}, \quad (41)$$

индекс (H) означает, что функция определена в области, лежащей ниже прямой L_3 ,

$$\Pi_0 u = -\frac{a}{\lambda_2} \left(\varphi_1(x) - \frac{b}{a} \varphi_2(x) \right) \exp(\lambda_2 \tau), \quad \Pi_0 v = -\gamma \Pi_0 u.$$

Аналогично, построив $Q_0 u(\xi, t)$ и $Q_0 v(\xi, t)$ — пограничные функции в окрестности $x=0$ ($\xi = x/\varepsilon$), найдем выражения для \bar{u}_0 и \bar{v}_0 выше прямой L_3 :

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= -\frac{b}{\Lambda_1 \lambda_3} \left(\gamma \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \psi_1 \left(t - \frac{x}{\Lambda_3} \right) + \psi_2 \left(t - \frac{x}{\Lambda_3} \right) \right) \equiv \bar{u}_0^{(B)}, \\ \bar{v}_0 &= \frac{a}{b} \bar{u}_0^{(B)} \equiv \bar{v}_0^{(B)}, \end{aligned} \quad (42)$$

а для $Q_0 u$ и $Q_0 v$ получаются выражения

$$Q_0 u = -\frac{\Lambda_2 a}{\lambda_2 \Lambda_3} \left(\psi_1(t) - \frac{b}{a} \psi_2(t) \right) \exp(\lambda_3 t), \quad Q_0 v = -\gamma \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} Q_0 u.$$

Здесь $\lambda_3 = -(a\Lambda_2 + \gamma b\Lambda_1) / (\Lambda_1 \Lambda_2) < 0$, а индекс (B) означает, что функция определена в области, лежащей выше L_3 .

Анализируя (41) и (42), можно сделать вывод, что главный член регулярной части асимптотики имеет разрыв на прямой L_3 , в частности для u -компоненты решения справедливо равенство

$$\Delta \bar{u}_0 = (\bar{u}_0^{(B)} - \bar{u}_0^{(H)})|_{x=\Delta, t} = \varphi_1(0) \frac{\gamma b}{\lambda_2} \left(1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3} \right) + \varphi_2(0) \frac{b}{\lambda_2} \left(1 - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \right). \quad (43)$$

Оказывается, решение задачи (35), (28) действительно при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к разрывной функции, в частности, функция u

стремится к $\bar{u}_0 = \begin{cases} \bar{u}_0^{(B)} & \text{выше } L_3 \\ \bar{u}_0^{(H)} & \text{ниже } L_3 \end{cases}$. Таким образом, наряду с по-

граничными слоями в окрестностях $t=0$ и $x=0$ появляется внутренний переходный слой в окрестности L_3 . Справедлива следующая теорема.

Теорема 13.3. Для решения $u(x, t, \varepsilon)$, $v(x, t, \varepsilon)$ задачи (35), (28) имеют место следующие соотношения при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$u - (\bar{u}_0^{(H)} + \Pi_0 u) \rightarrow 0, \quad v - (\bar{v}_0^{(H)} + \Pi_0 v) \rightarrow 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{x}{\Lambda_2};$$

$$u = \bar{u}_0^{(H)} \rightarrow 0, \quad v = \bar{v}_0^{(H)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \frac{x}{\Lambda_2} < t < \frac{x}{\Lambda_3};$$

$$u = \bar{u}_0^{(B)} \rightarrow 0, \quad v = \bar{v}_0^{(B)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \Lambda_1 t < x < \Lambda_3 t;$$

$$u - (\bar{u}_0^{(B)} + Q_0 u) \rightarrow 0, \quad v - (\bar{v}_0^{(B)} + Q_0 v) \rightarrow 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq \Lambda_1 t.$$

Теорема утверждает лишь существование внутреннего переходного слоя в окрестности L_3 , но его аналитического описания не дает. В [90] показано, что этот внутренний слой может быть описан некоторым уравнением параболического типа.

Для доказательства теоремы нужно в уравнениях (35) перейти к новым независимым переменным $\alpha = x - \Lambda_1 t$, $\beta = \Lambda_2 t - x$, превратив характеристики L_1 , L_2 в координатные оси, а затем свести систему уравнений к одному уравнению второго порядка (например, для u), которое имеет вид

$$\varepsilon (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \gamma b \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

Решение этого уравнения выражается через функцию Римана [108]. Для получения асимптотики можно воспользоваться методом стационарной фазы. Ввиду громоздкости доказательства мы не будем приводить его здесь; оно имеется в [42].

2. Приведем пример, который допускает получение точного решения и позволяет продемонстрировать сформулированную теорему:

$$\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = v, \quad \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -v. \quad (44)$$

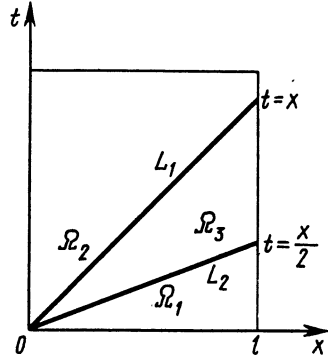


Рис. 28

Эта система распадается, и можно последовательно решить сначала второе, а потом первое уравнение.

В данном примере $a=0$, $b=\gamma=1$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\Lambda_1=1$, $\Lambda_2=2$, $\Lambda_3=1$, $\lambda_3=-\frac{1}{2}$. В силу равенства $\Lambda_1=\Lambda_3$ характеристики L_1 и L_3 совпадают и тем самым разрыв предельного решения будет иметь место на L_1 . Величина его для функции u , согласно формуле (43), равна

$$\Delta \bar{u}_0 = \varphi_2(0). \quad (45)$$

Теперь получим точное решение задачи (44), (28). Рассмотрим сначала второе уравнение (44). В области Ω_1 (рис. 28) функция v полностью определяется условием $v(x, 0, \varepsilon) = \varphi_2(x)$. Решая это уравнение методом первых интегралов, находим $x - 2t = c_1$, $v = c_2 \exp(-t/\varepsilon)$. При $t=0$ имеем $x = c_1$, $\varphi_2(x) = c_2$, т. е. $c_2 = \varphi_2(c_1)$, и, следовательно, в Ω_1 получим

$$v = \varphi_2(x - 2t) \exp(-t/\varepsilon).$$

Точно так же в области $\Omega_2 \cup \Omega_3$ функция v определяется условием $v(0, t, \varepsilon) = \psi_2(t)$ и имеет вид

$$v = \psi_2 \left(t - \frac{1}{2} x \right) \exp \left(-\frac{x}{2\varepsilon} \right).$$

Перейдем к первому уравнению (44) и будем его решать также методом первых интегралов. В области Ω_1 имеем

$$\begin{aligned} x-t=c_1, \quad u=c_2+\int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2(c_1-t') \exp\left(-\frac{t'}{\varepsilon}\right) dt' = \\ = c_2 - \varphi_2(c_1-t) \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varphi_2(c_1) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

При $t=0$ получаем $x=c_1$, $\varphi_1(x)=c_2$, т. е. $c_2=\varphi(c_1)$, и, следовательно, в Ω_1

$$u = \varphi_1(x-t) - \varphi_2(x-2t) \exp(-t/\varepsilon) + \varphi_2(x-t) + O(\varepsilon).$$

В области Ω_3 функцию u будем искать тем же методом, учитывая непрерывность на L_2 . Находим: $x-t=c_1$, $u=c_2+$

$$\begin{aligned} + \int_0^x \frac{1}{\varepsilon} \psi_2\left(\frac{x'}{2}-c_1\right) \exp\left(-\frac{x'}{2\varepsilon}\right) dx' = c_2 - 2\psi_2\left(\frac{x}{2}-c_1\right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{x}{2\varepsilon}\right) + 2\psi_2(-c_1) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{При } x=2t \text{ (на } L_2) \text{ имеем: } t=c_1, \quad u=c_2 - 2\psi_2(0) \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + \\ + 2\psi_2(-t) + O(\varepsilon) = \varphi_1(t) - \varphi_2(0) \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + \varphi_2(t) + O(\varepsilon), \quad \text{т. е.} \\ c_2 = \varphi_1(c_1) - \varphi_2(0) \exp\left(-\frac{c_1}{\varepsilon}\right) + \varphi_2(c_1) + 2\psi_2(0) \exp\left(-\frac{c_1}{\varepsilon}\right) - 2\psi_2(-c_1) + \\ + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условие согласования $\varphi_2(0)=\psi_2(0)$, находим u в области Ω_3 :

$$\begin{aligned} u = \varphi_1(x-t) + \varphi_2(0) \exp\left(-\frac{x-t}{\varepsilon}\right) + \varphi_2(x-t) - \\ - 2\psi_2\left(t-\frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Имея в виду, что в Ω_3 справедливо неравенство $t < x$ и, значит, $t - \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, можно в предпоследнем слагаемом аргумент $t - \frac{x}{2}$ заменить нулем (тогда это слагаемое изменится на величину $O(\varepsilon)$) и тем самым окончательно в Ω_3 имеем

$$\begin{aligned} u = \varphi_1(x-t) + \varphi_2(x-t) + \varphi_2(0) \exp\left(-\frac{x-t}{\varepsilon}\right) - \\ - 2\varphi_2(0) \exp\left(-\frac{x}{2\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{46}$$

В области Ω_2 функция u определяется условием при $x=0$ и строится так же, как в Ω_1 . В результате в Ω_2 получаем

$$u = \psi_1(t-x) + 2\psi_2(t-x) - 2\psi_2\left(t - \frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2\varepsilon}\right) + O(\varepsilon). \quad (47)$$

Из формул (46), (47) видно, что при приближении к L_1 (В) сверху u имеет пределом функцию $\bar{u} = \psi_1(t-x) + 2\psi_2(t-x)$, а (Н)

при приближении к L_1 снизу — функцию $\bar{u} = \psi_1(x-t) + \psi_2(x-t)$. Эти предельные функции на прямой $L_1(x=t)$ не равны, и их разность (с учетом условий согласования) равна $\Delta\bar{u} = \psi_2(0)$, что совпадает с (45).

13.4. Некоторые физические задачи, приводящие к гиперболическим системам

1. Телеграфные уравнения

Телеграфные уравнения имеют вид

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = C \frac{\partial V}{\partial t} + GV, \quad -\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial I}{\partial t} + RI \quad (48)$$

и описывают распространение электрических импульсов в проводах (см., например, [108]). Здесь I , V — ток и напряжение между проводом и землей, а C , L , G , R — физические параметры: емкость, индуктивность, утечка и сопротивление.

Система (48) имеет форму, отличную от (23). Произведем преобразование переменных $I = \sqrt{C}(p+q)$, $V = \sqrt{L}(-p+q)$. Тогда система примет форму (23) (пока без малого параметра), а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{GL+RC}{2LC} p + \frac{GL-RC}{2LC} q, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{GL-RC}{2LC} p - \frac{GL+RC}{2LC} q. \end{aligned} \quad (49)$$

Допустим, что сопротивление и утечка велики: $R = \frac{r}{\varepsilon}$, $G = \frac{g}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Тогда система (49) окончательно принимает вид (23), где имеется малый параметр ε , а матрица a , равная $\frac{1}{2LC} \begin{pmatrix} -(gL+rC) & gL-rC \\ gL-rC & -(gL+rC) \end{pmatrix}$, имеет собственные значения λ_1 и λ_2 с отрицательными действительными частями: $\lambda_{1,2} = -(gL+rC) \pm i(gL-rC)$. Отметим, что $\Lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$ и $\Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ имеют разные знаки.

Пусть для системы (48) заданы условия $I(x, 0) = \varphi_1(x)$, $V(x, 0) = \varphi_2(x)$ и $V(0, t) = V(l, t) = V^0$ (концы провода находятся под напряжением V^0). Тогда для p и q получаем

$$p(x, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{LC}} - \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{L}} \right), \quad q(x, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{LC}} + \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{L}} \right), \quad (50)$$

$$-p(0, t) + q(0, t) = V^0/\sqrt{L}, \quad -p(l, t) + q(l, t) = V^0/\sqrt{L}. \quad (51)$$

Асимптотика решения этой задачи строится согласно теореме 13.2. Регулярная часть равна нулю, а функции Π_k находятся, как описано в п. 13.2. Что касается Q_k и Q_k^* , то они строятся несколько иначе, так как условия (51) отличны от (31). Однако это отличие не принципиально. Например, для Q_0 -функций имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_0 p}{\partial \xi} &= \frac{gL + rC}{2\sqrt{LC}} Q_0 p - \frac{gL - rC}{2\sqrt{LC}} Q_0 q, \\ \frac{\partial Q_0 q}{\partial \xi} &= \frac{gL - rC}{2\sqrt{LC}} Q_0 p - \frac{gL + rC}{2\sqrt{LC}} Q_0 q, \end{aligned} \quad (52)$$

$$-Q_0 p(0, t) + Q_0 q(0, t) = V^0/L,$$

$$Q_0 p(\infty, t) = Q_0 q(\infty, t) = 0. \quad (53)$$

Собственные значения матрицы системы (52) равны $\pm\sqrt{gr}$.

Решение, отвечающее $\lambda = -\sqrt{gr}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} Q_0 p \\ Q_0 q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{gL + rC + 2\sqrt{grLC}}{gL - rC} \end{pmatrix} \exp(-\sqrt{gr}\xi),$$

где A определяется из (53):

$$A = \frac{V^0}{L} \cdot \frac{2(rC + \sqrt{grLC})}{gL - rC} = \frac{2\sqrt{rC}V^0}{L(\sqrt{gL} - \sqrt{rC})}$$

$$\left(\text{при } gL = rC \text{ имеем } Q_0 p = 0, Q_0 q = \frac{V^0}{L} \exp(-\sqrt{gr}\xi) \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда велика только утечка, т. е. $G = g/\epsilon$, или только сопротивление, т. е. $R = r/\epsilon$. Оба эти случая будут критическими. Рассмотрим более подробно случай большого R . Система (49) принимает вид

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= -\frac{r}{2L} p - \frac{r}{2L} q - \epsilon \frac{G}{2C} p + \epsilon \frac{G}{2C} q, \\ \epsilon \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\partial q}{\partial x} \right) &= -\frac{r}{2L} p - \frac{r}{2L} q + \epsilon \frac{G}{2C} p - \epsilon \frac{G}{2C} q. \end{aligned} \quad (54)$$

Пусть заданы условия (50), (51).

Система (54) отличается от (35) тем, что Λ_1 и Λ_2 имеют разные знаки и справа имеются члены порядка ε . Последнее не вносит принципиальных усложнений. Однако наличие разных знаков у Λ_1 и Λ_2 приводит к видоизменению алгоритма построения асимптотики. В нулевом приближении для регулярных членов получаем $\bar{p}_0 = \alpha_0$, $\bar{q}_0 = -\alpha_0$, где $\alpha_0 = \alpha_0(x, t)$ — произвольная функция. В следующем приближении для α_0 получается уравнение

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} = -\frac{G}{C} \alpha_0.$$

В отличие от случая, рассмотренного в п. 13.3, оно является обыкновенным дифференциальным уравнением, и потому характеристика L_3 совпадает с осью t ($\Lambda_3 = 0$). Решая уравнение для α_0 , находим $\alpha_0 = \Phi(x) \exp\left(-\frac{G}{C} t\right)$, где $\Phi(x)$ — пока не

известная функция. Пограничные функции $\Pi_0 p$, $\Pi_0 q$ в окрестности $t=0$ строятся, как прежде, и при этом определяется $\Phi(x)$, а значит, и \bar{p}_0 , \bar{q}_0 . Что касается погранслоя в окрестности $x=0$, а также в окрестности $x=l$, то он не может быть описан введением Q -функций, как для некритического случая, поскольку в данном случае матрица системы, аналогичной (52), имеет два нулевых собственных значения. Это погранслой более сложного типа — такой же, как описанный в п. 13.3 внутренний переходный слой в окрестности L_3 (в данном случае L_3 , как отмечено выше, совпадает с осью t).

Чтобы описать погранслой в окрестности $x=0$, приведем систему (48) к одному уравнению второго порядка (см. [108]). В случае $R=r/\varepsilon$ оно имеет вид

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (rC + \varepsilon LG) \frac{\partial V}{\partial t} + rGV.$$

Нетрудно установить, что погранслой в окрестности $x=0$ описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 QV}{\partial \xi^2} = rC \frac{\partial QV}{\partial t} + rGQV, \quad \xi = x/\sqrt{\varepsilon}.$$

Если же $R=r/\varepsilon$ и $G=g/\varepsilon$, то уравнение имеет вид

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon^2 LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \varepsilon(rC + gL) \frac{\partial V}{\partial t} + grV$$

и погранслой в окрестности $x=0$ описывается обыкновенным уравнением

$$\frac{\partial^2 QV}{\partial \xi^2} = grQV, \quad \xi = x/\varepsilon.$$

2. Задача сорбции при наличии переноса

Одна из задач сорбции приводит к следующей системе уравнений (см. [108]):

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = -a(x)u + b(x)v, \quad \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = a(x)u + b(x)v. \quad (55)$$

Здесь v — количество газа, движущегося по трубе, заполненной пористым поглотителем (сорбентом), приходящееся на единицу объема сорбента, u — концентрация поглощенного сорбентом газа, ε — обратная величина так называемого кинетического коэффициента, характеризующего скорость поглощения.

Система (55) снова является примером критического случая, рассмотренного в п. 13.3. Здесь $\Lambda_1=0$, $\Lambda_2=1$, $\Lambda_3=a/(a+b)$. В окрестности характеристики $x=\Lambda_3 t$ возникает внутренний переходный слой. Справедлива асимптотика, построенная в п. 13.3.

Именно для этой задачи в работе [90], о которой уже упоминалось в п. 13.3, исследована структура внутреннего переходного слоя — получено параболическое уравнение, описывающее этот слой, и построена равномерная асимптотика решения.

Глава 4

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 14. Математическая модель процесса горения в случае автокаталитической реакции

14.1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая процесс горения в случае автокаталитической реакции, имеет вид (см., например, [60])

$$\begin{aligned} c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T &= q(v_0 + v)(1-v)k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - D\Delta v &= (v_0 + v)(1-v)k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь T — абсолютная температура, v — глубина превращения горючей компоненты, характеризующая относительное количество сгоревшего вещества ($v=1-u$, где u — относительная концентрация горючей компоненты, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$), c , ρ , λ — физические характеристики среды: удельная теплоемкость, плотность, коэффициент теплопроводности, q — тепловой эффект реакции, v_0 — критерий автокаталитичности (отношение начальной скорости реакции к автокаталитической константе,

$0 < v_0 < 1$), k_0 — константа скорости реакции, E — энергия активации, R — универсальная постоянная, D — коэффициент диффузии горючей компоненты. Все эти величины, за исключением искомым функций T и v , считаем постоянными.

Величины v и $u = 1 - v$ являются безразмерными. Введем безразмерные температуру θ , время t' , координаты x' , y' , z' , постоянные β , ε , a_0 , b_0 по формулам

$$\theta = \frac{E}{RT_*^2} (T - T_*), \quad \beta = RT_*/E, \quad t' = tk_0 \exp(-1/\beta),$$

$$x' = \frac{x}{r}, \quad y' = \frac{y}{r},$$

$$z' = \frac{z}{r}, \quad \varepsilon = \frac{c\rho}{q} \cdot \frac{RT_*^2}{E},$$

$$a_0 = \frac{\lambda}{c\rho r^2 k_0 \exp(-1/\beta)}, \quad b_0 = \frac{D}{r^2 k_0 \exp(-1/\beta)},$$

где T_* — некоторая характерная температура, например температура окружающей среды, r — характерный размер области, в которой происходит реакция. В новых переменных уравнения (1) принимают вид (вместо t' , x' , y' , z' снова будем писать t , x , y , z)

$$\varepsilon \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - a_0 \Delta \theta \right) = (v_0 + v) (1 - v) \exp \left(\frac{\theta}{1 + \beta \theta} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b_0 \Delta v = (v_0 + v) (1 - v) \exp \left(\frac{\theta}{1 + \beta \theta} \right).$$

Для процессов горения характерна малость параметров ε и β . Так как зависимость от β регулярная, то для упрощения системы положим $\beta = 0$ (это мало отразится на характеристиках процесса горения). Кроме того, будем рассматривать одномерный случай — θ и v не зависят от переменных y и z , $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Наконец, будем считать, что безразмерные коэффициенты теплопроводности a_0 и диффузии b_0 велики: $a_0 \sim b_0 \sim 1/\varepsilon$. Физически это означает, что либо размерные коэффициенты теплопроводности и диффузии велики, либо процесс горения происходит в тонком слое — характерный размер r мал. Вводя обозначение $a_0 = a/\varepsilon$, $b_0 = b/\varepsilon$, приходим к сингулярно возмущенной системе уравнений

$$\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = (v_0 + v) (1 - v) e^\theta, \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} - b \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varepsilon (v_0 + v) (1 - v) e^\theta.$$

Будем рассматривать ее в прямоугольнике $\Omega = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T)$ при естественных дополнительных условиях

$$\theta|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, \quad \theta|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

Условия для θ означают, что в начальный момент времени $t=0$ и на границе области, где происходит реакция ($x=0$ и $x=1$), температура равна температуре окружающей среды: $\theta=0$, т. е. $T=T_*$. Начальное условие для v показывает, что при $t=0$ количество сгоревшего вещества равно нулю (реакция еще не началась), а граничные условия для v означают отсутствие потока горючей компоненты через границу (условие непроницаемости).

14.2. Построение асимптотики решения

1. Асимптотическое разложение решения задачи (3), (4) будем строить в виде суммы регулярной и погранслошной частей:

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta} + \Pi\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{\theta}_k(x, t) + \Pi_k \theta(x, \tau)), \\ \bar{v} &= \bar{v} + \Pi v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{v}_k(x, t) + \Pi_k v(x, \tau)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\tau = t/\varepsilon$. Подставляя ряды (5) в (3), (4) и представляя правую часть уравнений (3) в виде $f = \bar{f} + \Pi f$, стандартным способом получаем уравнения для членов асимптотики.

2. Для $\bar{v}_0, \bar{\theta}_0$ имеем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_0}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\theta}_0}{\partial x^2} = -\frac{1}{a} (v_0 + \bar{v}_0) (1 - \bar{v}_0) e^{\bar{\theta}_0}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \bar{\theta}_0(0, t) = \bar{\theta}_0(1, t) = 0. \quad (6)$$

Отсюда получаем

$$\bar{v}_0 = \alpha_0(t),$$

где $\alpha_0(t)$ — произвольная функция, а уравнение для $\bar{\theta}_0$ запишем в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_0}{\partial x^2} = -\delta(\alpha_0(t), a) e^{\bar{\theta}_0}, \quad (7)$$

где $\delta(\alpha_0, a) = \frac{1}{a} (v_0 + \alpha_0) (1 - \alpha_0)$. Такое уравнение рассматривалось в [62, 115]. Воспользуемся результатами работы [62], где

исследована краевая задача

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\delta e^\theta, \quad \theta(-1) = \theta(1) = 0. \quad (8)$$

В [62] показано, что при $\delta < \delta_{кр} \approx 0,878$ существуют два положительных решения этой задачи, наименьшее из которых устойчиво. Применяя этот результат к задаче для $\bar{\theta}_0$ (уравнению (7) с граничными условиями (6)), решение которой зависит от $\alpha_0(t)$ и a , как от параметров, получаем, что при

$$a > a_1 = \frac{\max_{\alpha_0} (v_0 + \alpha_0)(1 - \alpha_0)}{4\delta_{кр}} = \frac{(1 + v_0)^2}{16\delta_{кр}} \quad (9)$$

существует два положительных решения этой задачи. Возьмем наименьшее из них и обозначим его так: $\bar{\theta}_0 = \tilde{\theta}_0(x, \alpha_0(t), a)$. Известно, что решение задачи (8) при $\delta < \delta_{кр}$ является возрастающей функцией δ . Следовательно, $\tilde{\theta}_0$ убывает с ростом a , причем $\tilde{\theta}_0 \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. Отметим также, что $\max_{0 < x < 1} \tilde{\theta}_0(x, \alpha_0(t), a) = \tilde{\theta}_0\left(\frac{1}{2}, \alpha_0(t), a\right)$.

Итак, главные члены \bar{v}_0 и $\bar{\theta}_0$ регулярной части асимптотики зависят от неизвестной пока функции $\alpha_0(t)$. Таким образом, рассматриваемая задача (3), (4) относится к критическим случаям — вырожденная задача имеет семейство решений.

3. Перейдем к определению пограничных функций нулевого приближения. Задача для $\Pi_0 v$ имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 \Pi_0 v}{\partial x^2} = 0,$$

$$\Pi_0 v(x, 0) = -\bar{v}_0(x, 0) = -\alpha_0(0), \quad \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial x}(0, \tau) = \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial x}(1, \tau) = 0.$$

Отсюда получаем $\Pi_0 v(x, \tau) = -\alpha_0(0)$, а так как от Π -функций естественно потребовать стремления к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, то приходим к равенству $\alpha_0(0) = 0$. Таким образом, $\Pi_0 v(x, \tau) = 0$, а для неизвестной функции $\alpha_0(t)$ найдено начальное значение. Полностью эта функция определится на следующем шаге при рассмотрении уравнения для $\bar{v}_1(x, t)$.

Для $\Pi_0 \theta$ имеем задачу

$$\frac{\partial \Pi_0 \theta}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \Pi_0 \theta}{\partial x^2} = v_0 [\exp(\bar{\theta}_0(x, 0) + \Pi_0 \theta) - \exp(\bar{\theta}_0(x, 0))], \quad (10)$$

$$\Pi_0 \theta(x, 0) = -\bar{\theta}_0(x, 0), \quad \Pi_0 \theta(0, \tau) = \Pi_0 \theta(1, \tau) = 0.$$

Отметим, что начальное и граничные условия согласованы до непрерывности, так как $\bar{\theta}_0(0, 0) = \bar{\theta}_0(1, 0) = 0$. Заметим также,

что хотя функция $\bar{\theta}_0(x, t) = \bar{\theta}_0(x, \alpha_0(t), a)$ еще не определена, поскольку зависит от неизвестной функции $\alpha_0(t)$, но $\bar{\theta}_0(x, 0) = \bar{\theta}_0(x, \alpha_0(0), a) = \bar{\theta}_0(x, 0, a)$ — известная функция.

Произведем замену переменной $w(x, \tau) = \bar{\theta}_0(x, 0) + \Pi_0\theta(x, \tau)$. Для $w(x, \tau)$ получим задачу

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = v_0 e^w, \quad w(x, 0) = 0, \quad w(0, \tau) = w(1, \tau) = 0.$$

В [60] показано, что при условии (9) решение этой задачи существует, единственно и $w(x, \tau) \rightarrow \bar{\theta}_0(x, 0)$ монотонно при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, $\Pi_0\theta(x, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, $\Pi_0\theta \leq 0$.

Докажем, что при достаточно большом a функция $\Pi_0\theta(x, \tau)$ имеет экспоненциальную оценку. Положим $\tilde{\Pi} = -\Pi_0\theta$. Из (10) для $\tilde{\Pi}$ получаем задачу

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}}{\partial x^2} = v_0 \exp(\bar{\theta}_0(x, 0)) (1 - \exp(-\tilde{\Pi})),$$

$$\tilde{\Pi}(x, 0) = \bar{\theta}_0(x, 0), \quad \tilde{\Pi}(0, \tau) = \tilde{\Pi}(1, \tau) = 0.$$

Введем обозначение $k = v_0 \max_{0 \leq x < 1} \exp(\bar{\theta}_0(x, 0)) = v_0 \exp\left(\bar{\theta}_0\left(\frac{1}{2}, 0, a\right)\right)$

и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = kQ, \quad Q(x, 0) = \bar{\theta}_0(x, 0), \quad Q(0, \tau) = Q(1, \tau) = 0.$$

Используя теорему сравнения для параболических уравнений [74] и учитывая, что $\tilde{\Pi} > 0$, получаем

$$0 \leq \tilde{\Pi}(x, \tau) \leq Q(x, \tau).$$

Функцию $Q(x, \tau)$ представим в виде ряда Фурье:

$$Q(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \exp(-(a\lambda_n - k)\tau) \sin(\pi n x),$$

где $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $q_n = 2 \int_0^1 \bar{\theta}_0(x, 0) \sin(\pi n x) dx$. Отсюда следует,

что $Q(x, \tau) \leq c \exp(-(a\lambda_1 - k)\tau) \leq c \exp(-\kappa\tau)$, если

$$a > \frac{k}{\lambda_1} = \frac{v_0 \exp\left(\bar{\theta}_0\left(\frac{1}{2}, 0, a\right)\right)}{\pi^2}. \quad (11)$$

Так как $\bar{\theta}_0\left(\frac{1}{2}, 0, a\right) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, то существует число a_2 такое, что при $a > a_2$ неравенство (11) выполняется. С учетом

условия (9) требование к величине a можно записать так:

$$a > \max(a_1, a_2). \quad (12)$$

При таких a для $\tilde{\Pi}$, а значит, и для $\Pi_0\theta$ справедлива экспоненциальная оценка

$$|\Pi_0\theta(x, \tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \tau \geq 0. \quad (13)$$

4. Для $\bar{v}_1, \bar{\theta}_1$ имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{v}_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{b} [\alpha_0'(t) - (v_0 + \alpha_0(t))(1 - \alpha_0(t)) \exp(\tilde{\theta}_0(x, \alpha_0(t), a))] \equiv \\ &\equiv \psi_0(x, \alpha_0), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial x^2} &= \frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial \tilde{\theta}_0}{\partial t} - [(v_0 + \alpha_0(t))(1 - \alpha_0(t)) \bar{\theta}_1 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - v_0 - 2\alpha_0(t)) \bar{v}_1] \exp(\tilde{\theta}_0(x, \alpha_0(t), a)) \right\} \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}(1, t) = 0, \quad \bar{\theta}_1(0, t) = \bar{\theta}_1(1, t) = 0. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (14) с первым из условий (15), получаем

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}(x, t) = \int_0^x \psi_0(x_0, \alpha_0) dx_0. \quad (16)$$

Второе условие (15) выполняется только в том случае, если

$$\int_0^1 \psi_0(x_0, \alpha_0) dx_0 = 0. \quad (17)$$

Это и есть уравнение для неизвестной функции $\alpha_0(t)$. Учитывая вид $\psi_0(x, \alpha_0)$, его можно записать так:

$$\alpha_0' = (v_0 + \alpha_0)(1 - \alpha_0) g(\alpha_0), \quad (18)$$

где $g(\alpha_0) = \int_0^1 \exp(\tilde{\theta}_0(x_0, \alpha_0(t), a)) dx_0$. Ранее было найдено начальное условие $\alpha_0(0) = 0$. Так как $g(\alpha_0) > 0$, то решение уравнения (18) с этим начальным условием монотонно стремится к точке покоя $\alpha_0 = 1$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$0 \leq \alpha_0(t) < 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Отметим, что уравнение (18) интегрируется в квадратурах.

Итак, функция $\alpha_0(t)$ определена, а значит, полностью определены все члены нулевого приближения. Интегрируя уравне-

ние (16), найдем: $\bar{v}_1(x, t) = \alpha_1(t) + \tilde{v}_1(x, t)$, где $\tilde{v}_1(x, t) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} \psi_0(x_0, \alpha_0(t), a) dx_0$ — известная функция, $\alpha_1(t)$ — произвольная функция.

Уравнение для $\bar{\theta}_1$ перепишем в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}_1}{\partial x^2} + \beta(x, t) \bar{\theta}_1 = \gamma(x, t) \alpha_1(t) + g(x, t),$$

где $\beta(x, t) = \frac{1}{a} (v_0 + \alpha_0(t)) (1 - \alpha_0(t)) \exp(\tilde{\theta}_0(x, \alpha_0(t), a))$,

$$\gamma(x, t) = -\frac{1}{a} (1 - v_0 - 2\alpha_0(t)) \exp(\tilde{\theta}_0),$$

$$g(x, t) = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \tilde{\theta}_0}{\partial t} - (1 - v_0 - 2\alpha_0(t)) \tilde{v}_1 \exp(\tilde{\theta}_0) \right)$$

— известные функции.

Функцию $\bar{\theta}_1$ будем искать в виде

$$\bar{\theta}_1 = A(x, t) + B(x, t) \alpha_1(t). \quad (19)$$

Для A и B получаем линейные уравнения (t входит как параметр)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \beta(x, t) A = g(x, t), \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \beta(x, t) B = \gamma(x, t) \quad (20)$$

и граничные условия

$$A(0, t) = A_1(t) = 0, \quad B(0, t) = B(1, t) = 0.$$

Возникает вопрос о разрешимости этих краевых задач. Известно, что для существования единственного решения краевой задачи

$$u'' + d(x)u = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная задача имела только тривиальное решение. В свою очередь, чтобы однородная задача имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная функция $w(x)$ такая, что

$$w'' + d(x)w \leq 0 \quad \text{при } 0 < x < 1,$$

$$w(0) \geq 0, \quad w(1) \geq 0,$$

причем хотя бы одно из этих неравенств строгое (см. [101]). Для уравнений (20) при достаточно большом a такую функцию $w(x)$ легко подобрать. Положим $w(x) = \sin \pi x$. Тогда $w(x) \geq 0$

при $0 \leq x \leq 1$ и, кроме того,

$$w'' + \beta(x, t)w = (-\pi^2 + \beta(x, t)) \sin \pi x < 0 \text{ при } 0 < x < 1,$$

если $\beta(x, t) < \pi^2$. Вид функции $\beta(x, t)$ показывает, что существует число a_3 такое, что при $a > a_3$ неравенство $\beta < \pi^2$ будет выполнено. Тем самым требование (12) к величине a заменяется следующим:

$$a > \max(a_1, a_2, a_3). \quad (21)$$

При этом условии краевые задачи для A и B разрешимы и мы получаем функцию $\bar{\theta}_1$ в виде (19). Таким образом, \bar{v}_1 и $\bar{\theta}_1$ зависят линейно от не известной пока функции $\alpha_1(t)$.

5. Перейдем к определению пограничных функций первого приближения. Для $\Pi_1 v$ имеем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1 v}{\partial \tau} - b \frac{\partial^2 \Pi_1 v}{\partial x^2} &= v_0 (\exp(\bar{\theta}_0(x, 0) + \Pi_0 \theta(x, \tau)) - \exp(\bar{\theta}_0(x, 0))) \equiv \\ &\equiv h(x, \tau), \end{aligned}$$

$$\Pi_1 v(x, 0) = -\bar{v}_1(x, 0) = -\tilde{v}_1(x, 0) - \alpha_1(0),$$

$$\frac{\partial \Pi_1 v}{\partial x}(0, \tau) = \frac{\partial \Pi_1 v}{\partial x}(1, \tau) = 0.$$

Отметим, что начальное и граничные условия согласованы, так как $\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x}(1, 0) = 0$. Функция $h(x, \tau)$ имеет оценку типа (13). Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$\Pi_1 v(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\tau) \cos(\pi n x). \quad (22)$$

Для коэффициентов $c_n(\tau)$ получаем уравнения

$$c_n' = -b\pi^2 n^2 c_n + h_n(\tau), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} c_0(0) &= -\int_0^1 \tilde{v}_1(x, 0) dx - \alpha_1(0) = \varphi_0 - \alpha_1(0), \\ c_n(0) &= \varphi_n, \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь $h_n(\tau)$ и φ_n — коэффициенты разложений $h(x, \tau)$ и $(-\tilde{v}_1(x, 0))$ в ряды Фурье по $\cos(\pi n x)$, причем $h_n(\tau)$ имеют, очевидно, оценку типа (13).

Решая уравнение (23) при $n=0$, находим

$$c_0(\tau) = \varphi_0 - \alpha_1(0) + \int_0^{\tau} h_0(\tau_0) d\tau_0.$$

Чтобы $\Pi_1 v(x, \tau)$ стремилось к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, необходимо потребовать $c_0(\infty) = 0$. Это условие позволяет найти $\alpha_1(0)$ — начальное значение не известной пока функции $\alpha_1(t)$:

$$\alpha_1(0) = \varphi_0 + \int_0^{\infty} h_0(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Полностью функция $\alpha_1(t)$ определится на следующем шаге при рассмотрении задачи для $\bar{v}_2(x, t)$.

Решения уравнений (23) при $n=1, 2, \dots$ можно записать в виде

$$c_n(\tau) = \varphi_n \exp(-b\lambda^2 n^2 \tau) + \int_0^{\tau} \exp(-b\lambda^2 n^2 (\tau - \tau_0)) h_n(\tau_0) d\tau_0.$$

Отсюда элементарно следует экспоненциальная оценка для $c_n(\tau)$. Кроме того, как нетрудно проверить, коэффициенты $c_n(\tau)$ убывают при $n \rightarrow \infty$ как $1/n^4$. Поэтому ряд (22) сходится, допускает почленное дифференцирование по τ и дважды по x и имеет оценку типа (13).

Для $\Pi_1 \theta$ имеем задачу

$$\frac{\partial \Pi_1 \theta}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \Pi_1 \theta}{\partial x^2} = v_0 \exp(\bar{\theta}_0(x, 0) + \Pi_0 \theta(x, \tau)) \Pi_1 \theta + \sigma(x, \tau),$$

$$\Pi_1 \theta(x, 0) = -\bar{\theta}_1(x, 0), \quad \Pi_1 \theta(0, \tau) = \Pi_1 \theta(1, \tau) = 0,$$

где $\sigma(x, \tau)$ — известная функция, имеющая оценку типа (13). На основании теоремы сравнения, как и для $\Pi_0 \theta$, получаем оценку типа (13) для $\Pi_1 \theta$.

6. Обратимся к задаче для $\bar{v}_2(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x^2} = \frac{1}{b} \left\{ \alpha_1'(t) - [(v_0 + \alpha_0(t))(1 - \alpha_0(t)) \bar{\theta}_1 + \right. \\ \left. + (1 - v_0 - 2\alpha_0(t)) \alpha_1(t)] \exp(\bar{\theta}_0(x, t)) + F(x, t) \right\} \equiv \psi_1(x, \alpha_1(t), t),$$

$$\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial x}(1, t) = 0.$$

Здесь $F(x, t)$ — известная функция, а $\bar{\theta}_1$ имеет вид (19). Условие разрешимости этой задачи (аналогичное (17))

$$\int_0^1 \psi_1(x, \alpha_1(t), t) dx = 0$$

представляет собой линейное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\alpha_1(t)$. Его можно записать в виде

$$\alpha_1' = k_1(t) \alpha_1 + k_2(t),$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ — известные функции. Решив это уравнение с начальным условием (24), найдем функцию $\alpha_1(t)$. Тем самым полностью определены все члены первого приближения.

Аналогично можно определить члены рядов (5) до любого номера.

Обозначим через Θ_n и V_n n -е частичные суммы рядов (5).

Теорема 14.1. При достаточно малых ε и достаточно больших a существует единственное решение θ , v задачи (3), (4), причем ряды (5) являются асимптотическими рядами для этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ в прямоугольнике $\bar{\Omega}$, т. е. справедливы оценки

$$\max_{\bar{\Omega}} |\theta - \Theta_n| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad \max_{\bar{\Omega}} |v - V_n| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Доказательство теоремы можно провести по той же схеме, как и в п. 9.3. Подробное доказательство содержится в [20]. Отметим, что в процессе доказательства появляется еще одно требование к величине a , а именно: a должно удовлетворять неравенству

$$a > \frac{(1 + v_0)^2}{32} \max_{0 < t < T} \exp\left(\tilde{\theta}_0\left(\frac{1}{2}, \alpha_0(t), a\right)\right). \quad (25)$$

В силу поведения функции $\tilde{\theta}_0$ при $a \rightarrow \infty$ ясно, что при достаточно больших a это неравенство выполняется. Таким образом, к условию (21) относительно величины a добавляется требование (25). Нетрудно показать, что из (25) следует (21). Заметим, что из всех требований к величине a необходимым является только условие (9), обеспечивающее разрешимость задачи для $\tilde{\theta}_0(x, t)$. Остальные требования являются достаточными и связаны с получением оценок и методом доказательства теоремы. Возможно, что требование (25) к величине a можно несколько ослабить.

14.3. Физическая интерпретация построенной асимптотики

Отметим, что величина a имеет большое практическое значение — при выполнении указанных неравенств, связанных с величиной a , имеет место безвзрывное протекание реакции (см. [60]).

Построенная асимптотика позволяет сделать вывод об изменении с течением времени температуры θ и глубины v превращения горючей компоненты. Так как П-функции имеют экспоненциальную оценку типа (13), то за малый промежуток времени происходит быстрое изменение температуры θ от нуля до значений, близких к $\tilde{\theta}_0(x, t)$. Это быстрая стадия реакции. При этом величина v изменяется мало, так как $\Pi_0 v = 0$. Затем начинается медленная стадия: $\theta = \tilde{\theta}_0(x, t) + O(\varepsilon)$, $v = \alpha_0(t) + O(\varepsilon)$. Как уже отмечалось, функция $\alpha_0(t)$ монотонно возрастает от ну-

ля при $t=0$ до единицы при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, за достаточно большое время происходит практически полное выгорание вещества, причем процесс выгорания идет почти одинаковым образом во всей области $0 \leq x \leq 1$, поскольку главный член $\alpha_0(t)$ не зависит от x . Неравномерность выгорания (зависимость от x) проявляется лишь начиная с членов порядка ε .

По мере возрастания $\alpha_0(t)$ от нуля до единицы функция $\delta(\alpha_0(t), \alpha) = \frac{1}{\alpha} (v_0 + \alpha_0(t))(1 - \alpha_0(t))$ сначала возрастает (при $0 \leq \alpha \leq (1 + v_0)/2$), а затем убывает (при $(1 + v_0)/2 \leq \alpha \leq 1$). Так как $\bar{\theta}_0(x, t)$ — возрастающая функция δ , то температура θ во время медленной стадии реакции сначала растет, а затем, после того как $\alpha_0(t)$ достигнет величины $(1 + v_0)/2$, начинает убывать.

Мы рассмотрели одномерный по пространственным переменным случай. Аналогично можно построить асимптотику и доказать теорему об оценке остаточного члена для решения задачи горения в цилиндрической области.

§ 15. Распространение тепла в тонких телах

15.1. Постановка задачи

Под тонким телом понимают такое тело, у которого один из размеров много меньше какого-то другого. Примерами тонких тел являются тонкий стержень и тонкая пластина. Мы рассмотрим краевую задачу, описывающую распространение тепла в тонком стержне. Отношение ε толщины стержня к его длине является малым параметром. Чтобы упростить изложение, будем рассматривать задачу в плоском стержне, т. е. в тонком прямоугольнике $(0 \leq x \leq 1) \times (0 \leq z \leq \varepsilon)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = f(u, x, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = \psi_1(z, t), \quad v|_{x=1} = \psi_2(z, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - A\varepsilon u|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + A\varepsilon u|_{z=\varepsilon} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) представляет собой уравнение теплопроводности, причем функция $f(u, x, t)$ описывает источники тепла, расположенные в стержне и зависящие в общем случае от температуры u , координаты x и времени t . Условия (2) задают температуру в начальный момент времени и на концах стержня. Условия (3) означают, что на боковой поверхности стержня происходит слабый теплообмен со средой.

Так как стержень тонкий ($0 \leq z \leq \varepsilon$), а теплообмен на боковой поверхности слабый (коэффициент теплообмена равен

$A\varepsilon$), то на первый взгляд может показаться, что для получения приближенного решения задачи следует отбросить в уравнении (1) вторую производную по z , отбросить также условия (3) и решить получившееся укороченное (одномерное) уравнение с дополнительными условиями (2). Однако, как показывает асимптотический анализ, распределение тепла внутри стержня описывается приближенно хотя и одномерным, но отличным от укороченного уравнением теплопроводности. Это уравнение будет получено в ходе построения асимптотики решения.

Произведем замену переменной $z = \varepsilon y$. Тогда задача (1) — (3) примет вид сингулярно возмущенной задачи (рассматриваем ее на промежутке времени $0 \leq t \leq T$):

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \varepsilon^2 f(u, x, t) \quad (4)$$

$$(x, y, t) \in \Omega = (0 < x < 1) \times (0 < y < 1) \times (0 < t \leq T),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, \varepsilon), \quad u|_{x=0} = \psi_1(y, t, \varepsilon), \quad u|_{x=1} = \psi_2(y, t, \varepsilon), \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - A\varepsilon^2 u|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + A\varepsilon^2 u|_{y=1} = 0. \quad (6)$$

Все заданные функции считаем достаточно гладкими, $a(x) > 0$, а условия (5) — согласованными до непрерывности, т. е.

$$\varphi(0, y, \varepsilon) = \psi_1(y, 0, \varepsilon), \quad \varphi(1, y, \varepsilon) = \psi_2(y, 0, \varepsilon).$$

15.2. Построение асимптотики решения

1. Асимптотическое разложение решения задачи (4) — (6) будем строить в виде

$$u(x, y, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{u}_k(x, y, t) + \Pi_k(x, y, \tau) + Q_k(\xi, y, t) + Q_k^*(\xi_*, y, t) + P_k(\xi, y, \tau) + P_k^*(\xi_*, y, \tau)), \quad (7)$$

где \bar{u}_k — члены регулярной части асимптотики, Π_k , Q_k , Q_k^* — пограничные функции, служащие для описания погранслоя соответственно вблизи начального момента времени $t=0$ и торцов стержня $x=0$ и $x=1$; P_k и P_k^* — угловые пограничные функции; $\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$, $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$, $\xi_* = \frac{1-x}{\varepsilon}$ — погранслойные переменные.

Стандартным способом, подставляя ряд (7) в (4) — (6) и представляя f в виде $\bar{f} + \Pi f + Qf + Q^*f + Pf + P^*f$ (см. п. 9.3), получаем уравнения для членов асимптотики.

2. Для функции $\bar{u}_0(x, y, t)$ имеем вырожденное уравнение (оно получается из (4) при $\varepsilon=0$)

$$a(x) \frac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial y^2} = 0$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0.$$

Решением этой задачи является произвольная функция переменных x и t : $\bar{u}_0 = \alpha_0(x, t)$. Поэтому задача (4)–(6) относится к критическим случаям. Аналогично находим $\bar{u}_1 = \alpha_1(x, t)$ — произвольную функцию, а для $\bar{u}_2(x, y, t)$ имеем задачу

$$a(x) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y^2} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial x^2} - f(\alpha_0, x, t) \equiv \psi_0(x, t, \alpha_0),$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = A\alpha_0(x, t), \quad \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \Big|_{y=1} = -A\alpha_0(x, t).$$

Интегрируя уравнение с учетом первого граничного условия, получаем

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} = A\alpha_0(x, t) + \psi_0(x, t, \alpha_0) y / a(x). \quad (8)$$

Подставляя это выражение во второе граничное условие, приходим к соотношению

$$\psi_0(x, t, \alpha_0) = -2Aa(x)\alpha_0.$$

Таким образом, задача для \bar{u}_2 разрешима только в том случае, когда выполняется данное соотношение. Это и есть уравнение для неизвестной функции $\alpha_0(x, t)$, т. е. для главного члена регулярной части асимптотики. Учитывая вид $\psi_0(x, t, \alpha_0)$, его можно записать так:

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial x^2} = g(\alpha_0, x, t), \quad (9)$$

где $g(\alpha_0, x, t) = f(\alpha_0, x, t) - 2Aa(x)\alpha_0$. Начальное и граничные условия для функции α_0 будут найдены ниже при построении пограничных функций. После этого можно будет определить функцию $\alpha_0(x, t)$.

Интегрируя теперь уравнение (8), получаем

$$\bar{u}_2 = -A\alpha_0(x, t) y^2 + A\alpha_0(x, t) y + \alpha_2(x, t),$$

где $\alpha_2(x, t)$ — произвольная функция.

Для $\bar{u}_k(x, y, t)$ при $k \geq 3$ имеем задачу

$$a(x) \frac{\partial^2 \bar{u}_k}{\partial y^2} = \frac{\partial \bar{u}_{k-2}}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 \bar{u}_{k-2}}{\partial x^2} - f_u(\alpha_0, x, t) \bar{u}_{k-2},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial y} \Big|_{y=0} = A\bar{u}_{k-2}(x, 0, t), \quad \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial y} \Big|_{y=1} = -A\bar{u}_{k-2}(x, 0, t).$$

Условие разрешимости этой задачи дает линейное параболическое уравнение относительно функции $\alpha_{k-2}(x, t)$, входящей аддитивно в выражение для \bar{u}_{k-2} :

$$\frac{\partial \alpha_{k-2}}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 \alpha_{k-2}}{\partial x^2} = g_{\alpha_0}(\alpha_0, x, t) \alpha_{k-2} + \beta_{k-2}(x, y, t), \quad (10)$$

где $\beta_1 = 0$, а β_{k-2} при $k \geq 4$ выражаются рекуррентно через $\alpha_i(x, t)$, $i \leq k-4$. При выполнении условия разрешимости функция \bar{u}_k определяется с точностью до произвольной функции $\alpha_k(x, t)$.

Итак, построены члены регулярной части асимптотики, причем они содержат не известные пока функции $\alpha_k(x, t)$, для которых получены уравнения (9), (10).

3. Для $\Pi_0(x, y, \tau)$ получаем задачу (x играет роль параметра, $0 \leq x \leq 1$)

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} - a(x) \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < y < 1, \quad \tau > 0,$$

$$\Pi_0(x, y, 0) = \varphi_0(x, y) - \alpha_0(x, 0), \quad \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}(x, 0, \tau) = \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}(x, 1, \tau) = 0.$$

Здесь $\varphi_0(x, y)$ — главный член разложения $\varphi(x, y, \epsilon)$ в ряд по степеням ϵ . Отметим, что в начальное условие входит не известная пока функция $\alpha_0(x, 0)$. Решая эту задачу методом Фурье, находим

$$\Pi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \exp(-a(x) \pi^2 n^2 \tau) \cos(\pi n y),$$

$$\text{где } b_0(x) = \int_0^1 (\varphi_0(x, y) - \alpha_0(x, 0)) dy, \quad b_n(x) = 2 \int_0^1 \varphi_0(x, y) \cos(\pi n y) dy,$$

$n \geq 1$.

Стандартное требование стремления Π -функций к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ приводит к условию $b_0 = 0$, что дает возможность найти $\alpha_0(x, 0)$:

$$\alpha_0(x, 0) = \int_0^1 \varphi_0(x, y) dy = \alpha_{00}(x). \quad (11)$$

Тем самым функция Π_0 полностью определена и имеет экспоненциальную оценку

$$|\Pi_0(x, y, \tau)| \leq c \exp(-\kappa \tau). \quad (12)$$

Аналогично находим $\Pi_1(x, y, \tau)$ (при этом определится начальное значение $\alpha_1(x, 0)$ не известной пока функции $\alpha_1(x, t)$), а для $\Pi_k(x, y, \tau)$ при $k \geq 2$ получаем задачу

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} - a(x) \frac{\partial^2 \Pi_k}{\partial y^2} = \pi_k(x, y, \tau), \quad 0 < y < 1, \quad \tau > 0,$$

$$\Pi_k(x, y, 0) = \varphi_k(x, y) - \bar{u}_k(x, y, 0),$$

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial y}(x, 0, \tau) = A \Pi_{k-2}(x, 0, \tau), \quad \frac{\partial \Pi_k}{\partial y}(x, 1, \tau) = -A \Pi_{k-2}(x, 1, \tau),$$

где $\pi_k(x, y, \tau)$ рекуррентно выражается через Π_i , $i \leq k-2$, и имеет оценку типа (12), а в начальное условие (в выражение для $\bar{u}_k(x, y, 0)$) аддитивно входит не известная пока функция $\alpha_k(x, 0)$. С помощью замены $\Pi_k = \bar{\Pi}_k + \tilde{\Pi}_k$, где $\tilde{\Pi}_k$ — известная функция, имеющая оценку типа (12), сведем краевые условия при $y=0$ и $y=1$ к однородным. Тогда для $\bar{\Pi}_k$ получим задачу

$$\frac{\partial \bar{\Pi}_k}{\partial \tau} - a(x) \frac{\partial^2 \bar{\Pi}_k}{\partial y^2} = \bar{\pi}_k(x, y, \tau), \quad 0 < y < 1, \quad \tau > 0,$$

$$\bar{\Pi}_k(x, y, 0) = p_k(x, y),$$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}_k}{\partial y}(x, 0, \tau) = \frac{\partial \bar{\Pi}_k}{\partial y}(x, 1, \tau) = 0,$$

где

$$\bar{\pi}_k = \pi_k - \frac{\partial \tilde{\Pi}_k}{\partial \tau} + a(x) \frac{\partial^2 \tilde{\Pi}_k}{\partial y^2}, \quad p_k = \varphi_k(x, y) - \bar{u}_k(x, y, 0) - \tilde{\Pi}_k(x, y, 0).$$

Методом Фурье находим

$$\bar{\Pi}_k = \sum_{n=0}^{\infty} (p_{kn}(x) \exp(-a(x) \pi^2 n^2 \tau) + \gamma_{kn}(x, \tau)) \cos(\pi n y).$$

Здесь $p_{kn}(x)$ — коэффициенты разложения функции $p_k(x, y)$ в ряд Фурье по $\cos(\pi n y)$, а $\gamma_{kn}(x, \tau)$ являются решениями задач

$$\frac{\partial \gamma_{kn}}{\partial \tau} + a(x) \pi^2 n^2 \gamma_{kn} = \bar{\pi}_{kn}(x, \tau), \quad \tau > 0; \quad \gamma_{kn}(x, 0) = 0,$$

где $\pi_{kn}(x, \tau)$ — коэффициенты разложения $\pi_k(x, y, \tau)$ в ряд Фурье по $\cos(\pi n y)$. Отсюда γ_{kn} находятся в явном виде, в частности $\gamma_{k0} = \int_0^{\tau} \bar{\pi}_{k0}(x, \tau_0) d\tau_0$, а при $n \geq 1$ все γ_{kn} имеют оценку

типа (12).

Условие $\bar{\Pi}_k(x, y, \infty) = 0$ приводит к соотношению

$$p_{k0}(x) + \gamma_{k0}(x, \infty) = 0,$$

откуда однозначно определяется $\alpha_k(x, 0)$, поскольку $\alpha_k(x, 0)$

входит аддитивно в $p_{k0}(x)$: $\alpha_k(x, 0) = \alpha_{k0}(x)$. При этом сумма $p_{k0}(x) + \gamma_{k0}(x, \tau) = \int_0^\tau \bar{\pi}_{k0}(x, \tau_0) d\tau_0$ имеет оценку типа (12). По-

этому и вся функция $\bar{\Pi}_k(x, y, \tau)$ имеет ту же оценку.

Таким образом, можно найти П-функции до любого номера n .

4. Для $Q_0(\xi, y, t)$ получаем задачу (t играет роль параметра, $0 \leq t \leq T$)

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial y^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$Q_0(0, y, t) = \psi_{10}(y, t) - \alpha_0(0, t), \quad \frac{\partial Q_0}{\partial y}(\xi, 0, t) = \frac{\partial Q_0}{\partial y}(\xi, 1, t) = 0.$$

Отметим, что в граничное условие при $\xi = 0$ входит не известная пока функция $\alpha_0(0, t)$. Методом Фурье находим

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \exp(-\pi n \xi) \cos(\pi n y),$$

где

$$d_0(t) = \int_0^1 (\psi_{10}(y, t) - \alpha_0(0, t)) dy,$$

$$d_n(t) = 2 \int_0^1 \psi_{10}(y, t) \cos(\pi n y) dy, \quad n \geq 1.$$

Стандартное требование $Q_0(\infty, y, t) = 0$ приводит к условию $d_0 = 0$, что дает возможность найти $\alpha_0(0, t)$:

$$\alpha_0(0, t) = \int_0^1 \psi_{10}(y, t) dy = \alpha_0^0(t). \quad (13)$$

Тем самым функция Q_0 полностью определена и имеет экспоненциальную оценку

$$|Q_0(\xi, y, t)| \leq c \exp(-\pi \xi). \quad (14)$$

Аналогично находим $Q_1(\xi, y, t)$ (при этом определяется краевое значение $\alpha_1(0, t)$ не известной пока функции $\alpha_1(x, t)$), а для $Q_k(\xi, y, t)$ при $k \geq 2$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_k}{\partial y^2} = q_k(\xi, y, t), \quad \xi > 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$Q_k(0, y, t) = \psi_{1k}(y, t) - \bar{u}_k(0, y, t),$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial y}(\xi, 0, t) = A Q_{k-2}(\xi, 0, t), \quad \frac{\partial Q_k}{\partial y}(\xi, 1, t) = -A Q_{k-2}(\xi, 1, t),$$

где $q_k(\xi, y, t)$ рекуррентно выражается через $Q_i, i \leq k-2$, и имеет оценку типа (14), а в граничное условие при $\xi=0$ входит аддитивно не известная пока функция $\alpha_k(0, t)$.

Аналогично Π -функциям, Q_k можно найти методом Фурье. При этом условии $Q_k(\infty, y, t)=0$ дает возможность определить краевое значение функции $\alpha_k(x, t)$ при $x=0$: $\alpha_k(0, t)=\alpha_k^0(t)$, а сами Q -функции имеют оценку типа (14).

Функции $Q_k^*(\xi_*, y, t)$ определяются аналогично функциям Q_k и имеют экспоненциальную оценку по переменной ξ_* . При их построении находим краевые значения функций $\alpha_k(x, t)$ при $x=1$: $\alpha_k(1, t)=\alpha_k^1(t)$. В частности,

$$\alpha_0(1, t) = \int_0^1 \psi_{20}(y, t) dy = \alpha_0^1(t). \quad (15)$$

5. Для неизвестных функций $\alpha_k(x, t)$, входящих в выражения для регулярных членов асимптотики, были получены уравнения (9), (10) и найдены начальные и краевые условия

$$\alpha_k(x, 0) = \alpha_{k0}(x), \quad \alpha_k(0, t) = \alpha_k^0(t), \quad \alpha_k(1, t) = \alpha_k^1(t). \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что эти условия согласованы до непрерывности, т. е. $\alpha_{k0}(0) = \alpha_k^0(0)$, $\alpha_{k0}(1) = \alpha_k^1(0)$. В частности, при $k=0$ эти равенства непосредственно следуют из формул (11), (13), (15) и условий $\varphi_0(0, y) = \psi_{10}(y, 0)$, $\varphi_0(1, y) = \psi_{20}(y, 0)$.

Потребуем, чтобы уравнение (9) (заметим, что оно нелинейно) с дополнительными условиями (11), (13), (15) имело решение при $0 \leq t \leq T$.

Функции $\alpha_k(x, t)$ при $k \geq 1$ определяются далее последовательно как решения линейных уравнений (10) с дополнительными условиями (16).

6. Угловые пограничные функции $P_k(\xi, y, \tau)$ и $P_k^*(\xi_*, y, \tau)$ предназначены для устранения невязок, внесенных Π -функциями в граничные условия при $x=0$ и $x=1$ и Q - и Q^* -функциями в начальное условие. Для $P_0(\xi, y, \tau)$ получаем задачу ($a = a(0)$)

$$\frac{\partial P_0}{\partial \tau} - a \left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \xi > 0, \quad 0 < y < 1, \quad \tau > 0,$$

$$P_0(\xi, y, 0) = -Q_0(\xi, y, 0) = -\sum_{n=1}^{\infty} d_n(0) \exp(-\pi n \xi) \cos(\pi n y),$$

$$P_0(0, y, \tau) = -\Pi_0(0, y, \tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \exp(-a \pi^2 n^2 \tau) \cos(\pi n y),$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial y}(\xi, 0, \tau) = \frac{\partial P_0}{\partial y}(\xi, 1, \tau) = 0$$

Из выражений для $d_n(t)$ и $b_n(x)$ и равенства $\varphi_0(0, y) = \psi_{10}(y, 0)$.

следует, что $d_n(0) = b_n(0)$ и, значит, начальное и краевое при $\xi = 0$ условия для P_0 согласованы до непрерывности. Решение задачи будем искать в виде

$$P_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n(\xi, \tau) - d_n(0) \exp(-\pi n \xi - a \pi^2 n^2 \tau)) \cos(\pi n y).$$

Тогда для $v_n(\xi, \tau)$ имеем задачу

$$\frac{\partial v_n}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 v_n}{\partial \xi^2} + a \pi^2 n^2 v_n = h_n(\xi, \tau), \quad \xi > 0, \quad \tau > 0,$$

$$v_n(\xi, 0) = 0, \quad v_n(0, \tau) = 0,$$

$$h_n = -a d_n(0) \pi^2 n^2 \exp(-\pi n \xi - a \pi^2 n^2 \tau).$$

Ее решение можно представить в виде

$$v_n(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau_0 \int_0^{\infty} G_n(\xi, \xi_0, \tau - \tau_0) h_n(\xi_0, \tau_0) d\xi_0,$$

где

$$G_n = \frac{1}{2 \sqrt{a \pi (\tau - \tau_0)}} \exp(-a \pi^2 n^2 (\tau - \tau_0)) \times \\ \times \left[\exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{4a(\tau - \tau_0)}\right) - \exp\left(-\frac{(\xi + \xi_0)^2}{4a(\tau - \tau_0)}\right) \right]$$

— функция Грина. Пользуясь этим представлением, нетрудно доказать, что $|v_n| \leq c |d_n(0)| \exp(-\kappa(n\xi + n^2\tau))$. Следовательно, $P_0(\xi, y, \tau)$ имеет экспоненциальную оценку

$$|P_0(\xi, y, \tau)| \leq c \exp(-\kappa(\xi + \tau)). \quad (17)$$

Для $P_k(\xi, y, \tau)$ при $k \geq 1$ получаем аналогичную задачу с ненулевой правой частью в уравнении и неоднородными краевыми условиями при $y=0$ и $y=1$ для $k \geq 2$. Ее решение также может быть найдено методом Фурье и имеет оценку типа (17).

Угловые пограничные функции $P_k^*(\xi_*, y, \tau)$ строятся таким же образом и имеют аналогичную экспоненциальную оценку.

7. Обозначим n -ю частичную сумму построенного ряда (7) через $U_n(x, y, t, \varepsilon)$.

Теорема 15.1. При достаточно малых ε задача (1)–(3) имеет единственное решение $u(x, y, t, \varepsilon)$, причем ряд (7) является асимптотическим рядом для этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ в параллелепипеде $\bar{\Omega}$, т. е. справедлива оценка

$$\max_{\bar{\Omega}} |u - U_n| = O(\varepsilon^{n+1}).$$

Доказательство теоремы можно провести, применяя метод последовательных приближений к уравнению для остаточного члена асимптотики и используя принцип максимума для оцен-

ки последовательных приближений. Более подробно доказательство изложено в [35].

15.3. Заключительные замечания

1. В силу экспоненциальной оценки пограничные функции Π_k, P_k, P_k^* при $t \geq \delta > 0$ становятся сколь угодно малыми и приближение для решения с точностью порядка ε (такое приближение часто бывает достаточным для практических целей) дает функция

$$\alpha_0(x, t) + Q_0(\xi, y, t) + Q_0^*(\xi_*, y, t).$$

Пограничные функции Q_0 и Q_0^* описывают быстрое изменение температуры вблизи концов стержня, а внутри стержня (при $\delta \leq x \leq 1 - \delta$) они сколь угодно малы. Таким образом, внутри стержня распределение температуры приближенно описывается функцией $\alpha_0(x, t)$, которая является решением одномерного уравнения теплопроводности (9) с дополнительными условиями (11), (13), (15). Как видим, это уравнение существенно отличается от того укороченного одномерного уравнения, которое получается из исходного уравнения (1) отбрасыванием второй производной по z . Такое укороченное уравнение часто используется в практических расчетах. По сравнению с этим укороченным уравнением в правой части (9) содержится дополнительное слагаемое $-2Aa(x)\alpha_0$. Оно имеет очевидный физический смысл: чем больше A , т. е. чем больше коэффициент температуропроводности $a(x)$, тем большую роль играет это дополнительное слагаемое. Таким образом, асимптотический метод позволяет построить правильную одномерную модель, которая дает хорошее приближение для решения двумерной задачи.

2. Мы рассмотрели задачу о распространении тепла в тонком прямоугольнике. Аналогично можно построить асимптотику решений для задач в тонком стержне постоянного поперечного сечения S и в тонкой пластине. В случае стержня растяжением переменных y и z с коэффициентом ε приходим к задаче

$$\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \varepsilon^2 f(u, x, t),$$

$$0 < x < 1, \quad (y, z) \in S, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z, \varepsilon), \quad u|_{x=0} = \psi_1(y, z, t, \varepsilon), \quad u|_{x=1} = \psi_2(y, z, t, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + A\varepsilon^2 u|_{\Gamma} = 0.$$

Здесь Γ — боковая поверхность стержня, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к Γ .

Асимптотическое разложение решения можно построить в виде (7), только теперь все члены ряда зависят также от z . Каждый член \bar{u}_k регулярной части асимптотики содержит аддитивно произвольную функцию $\alpha_k(x, t)$, уравнение для которой получается из условия разрешимости задачи для \bar{u}_{k+2} . Это уравнение имеет вид (9) для α_0 и (10) для α_k при $k \geq 1$ с тем лишь отличием, что коэффициент 2 в слагаемом $2Aa(x)\alpha_k$ нужно заменить на l/s , где l — длина границы сечения S , s — площадь сечения.

Начальное и краевые значения для функций $\alpha_k(x, t)$ снова определяются при рассмотрении пограничных функций. Например, для $Q_0(\xi, y, z, t)$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad (y, z) \in S,$$

$$Q_0(0, y, z, t) = \psi_{10}(y, z, t) - \alpha_0(0, t), \quad \left. \frac{\partial Q_0}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

Ее решение находим методом Фурье:

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \exp(-\lambda_n \xi) F_n(y, z),$$

где $\lambda_n (0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots)$ и $F_n(y, z)$ — собственные значения и собственные функции задачи

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \lambda^2 F = 0, \quad (y, z) \in S; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$

в частности $F_0 = 1$,

$$d_n(t) = \frac{1}{F_n \| \|^2} \iint_S (\psi_{10}(y, z, t) - \alpha_0(0, t)) F_n(y, z) dy dz.$$

Требование $Q_0(\infty, y, z, t) = 0$ приводит к равенству $d_0(t) = 0$, что дает возможность найти краевое значение неизвестной функции $\alpha_0(x, t)$ при $x = 0$:

$$\alpha_0(0, t) = \frac{1}{s} \iint_S \psi_{10}(y, z, t) dy dz.$$

Аналогично определяется начальное значение $\alpha_0(x, 0)$ и второе краевое значение $\alpha_0(1, t)$. Таким образом, построение пограничных функций производится так же, как и в п. 15.2, причем разложение решений в ряд Фурье ведется по собственным функциям $F_n(y, z)$.

Подобным же образом можно построить асимптотику решения задачи о распространении тепла в тонкой пластине. Подробное рассмотрение этой задачи проведено в [110].

3. Рассмотренная схема построения асимптотического разложения решения применима к более сложным задачам термоупругости в тонких телах. Система уравнений термоупругости для вектора перемещений $\vec{u}(x, y, z, t)$ и температуры $\Theta(x, y, z, t)$ в некоторой области G в линейном приближении имеет вид [96]

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} - \vec{F} = \gamma \text{grad } \Theta + \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},$$

$$\Delta \Theta - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \eta \text{div } \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{f}{\kappa},$$

где μ, λ — модули упругости, \vec{F} — вектор массовых сил, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)/\alpha$, α — коэффициент линейного термического расширения, $\rho_0(x, y, z)$ — объемная плотность, κ — коэффициент температуропроводности, $\eta = \gamma \Theta_{\text{ср}}/\lambda_0$, $\Theta_{\text{ср}}$ — средняя температура тела, λ_0 — коэффициент теплопроводности, f — тепловые источники.

В случае тонких тел (тонкий стержень или тонкая пластина) растяжением переменных эта система сводится к сингулярно возмущенной, что дает возможность применить погранслойный метод для построения асимптотики решения. В [36] построена асимптотика решения для тонкого стержня, а в [111] — для тонкой пластины. Построенная асимптотика позволяет правильно выбрать упрощенную (одномерную в случае стержня, двумерную в случае пластины) модель, дающую хорошее приближение для решения исходной задачи.

§ 16. Применение погранслойных методов в теории полупроводниковых приборов

16.1. Постановка задачи

Простейший полупроводниковый прибор (диод) основан на контакте двух материалов с противоположным типом проводимости: материал n обладает электронной проводимостью, материал p — дырочной. Электроны и дырки называются носителями. На рис. 29 изображена двумерная стационарная модель полупроводникового диода. Здесь C_1 и C_2 — электрические контакты прибора, Γ — граница, разделяющая области Ω_1 и Ω_2 с различными типами проводимости, $\partial\Omega_i$ — изолированные границы.

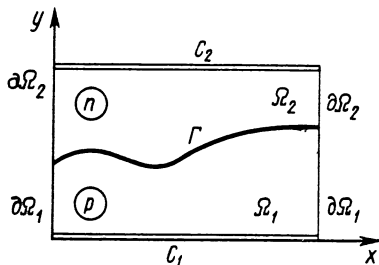


Рис. 29

Система уравнений, описывающая распределение потенциала и плотностей носителей, имеет вид [99]

$$\begin{aligned} \nabla(\epsilon \nabla \psi) &= q(n - p - c(x, y)), \\ \nabla(D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \psi) &= R(n, p), \quad \nabla(D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \psi) = R(n, p), \end{aligned} \quad (1)$$

где ψ — электрический потенциал, n — плотность электронов, p — плотность дырок, q — заряд электрона, ϵ — диэлектрическая проницаемость, D_n и D_p — коэффициенты диффузии носителей, μ_n и μ_p — их подвижности. Функция $c(x, y)$ описывает разность концентраций доноров и акцепторов: $c(x, y) > 0$ в n -области, т. е. в Ω_2 , $c(x, y) < 0$ в p -области, т. е. в Ω_1 ; $R(n, p)$ — функция рекомбинации дырок и электронов. Первое из уравнений (1) представляет собой уравнение Пуассона, два остальных являются уравнениями непрерывности. Так как $\vec{J}_n = q(D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \psi)$ и $\vec{J}_p = -q(D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \psi)$ — плотности электронного и дырочного токов, то два последних уравнения (1) можно записать в виде, аналогичном первому: $\nabla \vec{J}_n = qR$, $\nabla \vec{J}_p = -qR$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что функция $c(x, y)$ постоянна в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 : $c = -\bar{c} < 0$ в Ω_1 , $c = \bar{c} > 0$ в Ω_2 , $R(n, p) = 0$ и кривая Γ является достаточно гладкой.

Краевые условия для системы (1) имеют вид:

а) на электрических контактах

$$\begin{aligned} \psi|_{c_k} &= \frac{1}{2} U_T \ln \frac{n}{p} \Big|_{c_k} + U_k, \quad np|_{c_k} = n_k^2, \\ (n - p - c(x, y))|_{c_k} &= 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $U_T = \frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p}$, n_k — постоянные, являющиеся характеристиками материала полупроводника, U_k — приложенные потенциалы;

б) на изолированных границах:

$$(\vec{J}_n \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = 0, \quad (\vec{J}_p \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = 0, \quad (3)$$

$$(\nabla \psi \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = 0, \quad (4)$$

где $\vec{\nu}$ — вектор нормали к $\partial \Omega_k$, (\cdot) — скалярное произведение.

Пользуясь приведенными выше выражениями для \vec{J}_n и \vec{J}_p , условия (3) можно заменить условиями

$$(\nabla n \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = 0, \quad (\nabla p \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = 0. \quad (5)$$

На кривой Γ требуется непрерывность ψ , n , p и их нормальных производных.

Пусть $D=c/\bar{c}$, l — характерный размер прибора. Введем безразмерные переменные по формулам $\tilde{x}=x/l$, $\tilde{y}=y/l$, $\tilde{p}=p/\bar{c}$, $\tilde{n}=n/\bar{c}$, $\tilde{\psi}=\psi/U_T$. Опуская знак \sim , получим

$$\mu^2 \Delta \psi = n - p - D(x, y), \quad (6)$$

$$\Delta n = n \Delta \psi + (\nabla n \cdot \nabla \psi), \quad \Delta p = -p \Delta \psi - (\nabla p \cdot \nabla \psi),$$

$$\text{где } \mu^2 = \frac{\varepsilon U_T}{qc\bar{c}^2}, \quad D(x, y) = \begin{cases} D_1 = -1 & \text{в } \Omega_1, \\ D_2 = 1 & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

Величина μ^2 является малым параметром, порядок которой для многих полупроводниковых приборов $\leq 10^{-7}$.

Введем переменные $u = p + n$, $v = p - n$. Тогда система (6) переходит в систему

$$\mu^2 \Delta \psi = -v - D, \quad \Delta u = -v \Delta \psi - (\nabla v \cdot \nabla \psi), \quad \Delta v = -u \Delta \psi - (\nabla u \cdot \nabla \psi). \quad (7)$$

Краевые условия (2) принимают вид

$$\psi|_{c_k} = \ln \frac{D_k + \sqrt{D_k^2 + \delta_k^2}}{2\delta_k^2} + \frac{U_k}{U_T} \quad (\delta_k = n_k/\bar{c}),$$

$$u|_{c_k} = \sqrt{D_k^2 + 4\delta_k^2}, \quad v|_{c_k} = -D_k, \quad (8)$$

а условия (4), (5) переходят в условия

$$(\nabla \psi \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = (\nabla u \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = (\nabla v \cdot \vec{\nu})|_{\partial \Omega_k} = 0$$

или

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (9)$$

На кривой Γ требуется непрерывность ψ , u , v и их нормальных производных. Поставленную задачу назовем задачей ((7) — (9), Γ).

16.2. Построение асимптотики решения

1. Методы, развитые в гл. 3, дают возможность построить асимптотику решения задачи ((7) — (9), Γ) по невязке. Ввиду сложности уравнений остаточный член оценить не удастся. Ниже мы получим главный член этой асимптотики.

З а м е ч а н и е. Если решение зависит только от y , что возможно, когда Γ является прямой, параллельной оси x , и область неограниченна в направлении x , то мы приходим к одномерной задаче, рассмотренной в [52, 44]. Кроме того, в [52, 44] предполагалась симметрия задачи: прямая Γ делит область на две одинаковые полосы Ω_1 и Ω_2 . Считалось $n_k = 0$ и на контактах задавался не потенциал, как в (8), а токи J_n , J_p , которые в

этом случае скалярны, постоянны в силу $R=0$ и $J_p=J_n$. Для этой задачи удастся не только построить формальную асимптотику, но и оценить остаточный член. Более сложные одномерные задачи также с оценкой остаточного члена рассмотрены в [7, 8].

Вернемся к двумерной задаче ((7)–(9), Γ). Введем пограничные переменные вблизи границ прибора: $\eta = \frac{y}{\mu}$, $\xi = \frac{x}{\mu}$,

$\eta_* = \frac{y_0 - y}{\mu}$, $\xi_* = \frac{1 - x}{\mu}$. Пусть параметрические уравнения кривой

Γ имеют вид $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$, $0 \leq l \leq l_0$. Как и в п. 8.1, введем локальные координаты (r, l) в окрестности Γ (см. рис. 30, где $A'A$ — нормаль к Γ), а также пограничную переменную $\rho = r/\mu$. Отметим, что $r > 0$ для точек области Ω_2 и $r < 0$ для точек области Ω_1 .

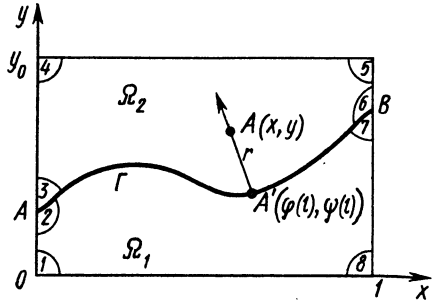


Рис. 30

Асимптотику решения задачи ((7)–(9), Γ) будем строить в виде (под z понимается совокупность функций ψ, u, v)

$$z = \bar{z}(x, y, \mu) + \overset{(1)}{\Pi z}(x, \eta, \mu) + \overset{(2)}{\Pi z}(\xi, y, \mu) + \overset{(3)}{\Pi z}(x, \eta_*, \mu) + \overset{(4)}{\Pi z}(\xi_*, y, \mu) + \Pi z(\rho, l, \mu), \quad (10)$$

где \bar{z} — регулярный ряд, $\overset{(1)}{\Pi z}$, $\overset{(2)}{\Pi z}$, $\overset{(3)}{\Pi z}$, $\overset{(4)}{\Pi z}$ — пограничные ряды в окрестностях сторон $y=0$, $x=0$, $y=y_0$, $x=1$, Πz — ряд, описывающий внутренний переходный слой вблизи Γ .

К разложению (10) следует добавить еще угловые пограничные функции в областях, отмеченных на рис. 30 номерами 1–8. Однако мы их строить не будем.

2. Для главного члена регулярного ряда получаем систему

$$\bar{v}_0 + D = 0, \quad \Delta \bar{u}_0 = -\bar{v}_0 \Delta \bar{\psi}_0 - (\nabla \bar{v}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}_0), \quad \Delta \bar{v}_0 = -\bar{u}_0 \Delta \bar{\psi}_0 - (\nabla \bar{u}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}_0). \quad (11)$$

Так как $D = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega_2, \\ -1 & \text{в } \Omega_1, \end{cases}$ то функции $\bar{z}_0 = (\bar{\psi}_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0)$ следовало

бы также снабдить индексами 1, 2 в зависимости от области, в которой строится решение, но для упрощения записи мы этого делать не будем.

Из (11) находим

$$\bar{v}_0 = -D, \quad (12)$$

и, таким образом, \bar{v}_0 удовлетворяет условиям (8), (9) для v , а оставшиеся условия (8), (9) зададим для $\bar{\psi}_0$ и \bar{u}_0 :

$$\bar{\psi}_0|_{c_k} = \ln \frac{D_k + \sqrt{D_k^2 + 4\delta_k^2}}{2\delta_k^2} + \frac{U_k}{U_T}, \quad \bar{u}_0|_{c_k} = \sqrt{D_k^2 + 4\delta_k^2},$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial x} \right|_{x=1} = \left. \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (13)$$

Так как $\bar{\psi}_0$, \bar{u}_0 , \bar{v}_0 удовлетворяют всем условиям (8), (9), то $\Pi_0 = 0$ и для Π -функций разложения начнутся с членов более высокого порядка. Однако условиям на Γ решение задачи (11), (13), вообще говоря, не удовлетворяет из-за разрыва D . Поэтому в разложении Πz будет присутствовать член нулевого порядка $\Pi_0 z$.

3. Займемся построением $\Pi_0 z$. Для этого надо в (7) перейти к координатам r, l . В переменных r, l входящие в (7) операторы имеют вид

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \alpha(r, l) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \beta(r, l) \frac{\partial^2 \psi}{\partial l^2} + \gamma(r, l) \frac{\partial \psi}{\partial l},$$

$$(\nabla \psi \cdot \nabla u) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + \beta(r, l) \frac{\partial \psi}{\partial l} \frac{\partial u}{\partial l},$$

где α, β и γ — такие же коэффициенты, как в п. 8.1. Переходя к переменной $\rho = r/\mu$, стандартным способом получаем для $\Pi_0 z = (\Pi_0 \psi, \Pi_0 u, \Pi_0 v)$ систему уравнений (l входит как параметр)

$$\frac{\partial^2 \Pi_0 \varphi}{\partial \rho^2} = -\Pi_0 v,$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_0 u}{\partial \rho^2} = -(\bar{v}_0(\pm 0, l) + \Pi_0 v) \frac{\partial^2 \Pi_0 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_0 v}{\partial \rho^2} = -(\bar{u}_0(\pm 0, l) + \Pi_0 u) \frac{\partial^2 \Pi_0 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho} \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}.$$

Фактически мы имеем две системы уравнений: одна (в которой $\bar{v}_0(+0, l)$, $\bar{u}_0(+0, l)$) имеет место при $\rho \geq 0$, а другая (где $\bar{v}_0(-0, l)$, $\bar{u}_0(-0, l)$) — при $\rho \leq 0$. Проинтегрировав второе и третье уравнения с учетом убывания погранфункций на бесконечности, приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial^2 \Pi_0 \psi}{\partial \rho^2} = -\Pi_0 v,$$

$$\frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho} = -(\bar{v}_0(\pm 0, l) + \Pi_0 v) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} = -(\bar{u}_0(\pm 0, l) + \Pi_0 u) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}.$$

Из требования непрерывности ψ , u , v и их нормальных производных на кривой Γ вытекают следующие дополнительные условия:

$$\bar{z}_0^+ + (\Pi_0 z)^+ = \bar{z}_0^- + (\Pi_0 z)^-, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\Pi_0 z)^+ = \frac{\partial}{\partial \rho} (\Pi_0 z)^-. \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем под \bar{z}_0^+ (или \bar{z}_0^-) понимается предельное значение \bar{z}_0 на Γ со стороны Ω_2 (соответственно Ω_1), т. е. $\bar{z}_0^+ = \bar{z}_0(+0, l)$, $\bar{z}_0^- = \bar{z}_0(-0, l)$. Обозначения $(\Pi_0 z)^+$, $(\Pi_0 z)^-$ имеют аналогичный смысл. Кроме того, должны быть выполнены обычные для Π -функций условия на бесконечности

$$\Pi_0 z(\pm \infty, l) = 0. \quad (18)$$

Перепишем (15) в виде системы четырёх уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} &= -\Pi_0 \varphi, & \frac{\partial \Pi_0 \varphi}{\partial \rho} &= \Pi_0 v, \\ \frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho} &= (\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v) \Pi_0 \varphi, & \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} &= (\bar{u}_0^\pm + \Pi_0 u) \Pi_0 \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Обратим внимание на то, что это система условно устойчивого типа в критическом случае. Такие системы рассматривались в [44], в частности именно система (19), но с другими, более простыми дополнительными условиями исследовалась в § 3 этой книги, где разбиралась одномерная задача теории полупроводниковых приборов. Однако здесь мы не будем пользоваться общей теорией, а, опираясь на специфику системы (19), будем непосредственно строить и исследовать Π -функции.

Исключив $\Pi_0 \varphi$ из двух последних уравнений системы (19), получим один из первых интегралов этой системы:

$$\bar{u}_0^\pm \cdot \Pi_0 u + \frac{1}{2} (\Pi_0 u)^2 = \bar{v}_0^\pm \cdot \Pi_0 v + \frac{1}{2} (\Pi_0 v)^2 \quad (20)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю, пользуясь условием на бесконечности (18)). Еще один первый интеграл найдем, переписав третье уравнение (19) в виде

$$\frac{\partial \Pi_0 u}{\partial \rho} = v_0^\pm \left(-\frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} \right) + \Pi_0 \varphi \frac{\partial \Pi_0 \varphi}{\partial \rho},$$

откуда

$$\Pi_0 u = -v_0^\pm \Pi_0 \psi + \frac{1}{2} (\Pi_0 \varphi)^2 \quad (21)$$

(постоянная интегрирования также равна нулю в силу (18)).

Пользуясь найденными первыми интегралами, можно получить условия сопряжения на кривой Γ для системы (11). Учитывая, что согласно (12) $\bar{v}_0^+ = -1$, $\bar{v}_0^- = 1$, из (20) имеем

$$\begin{aligned} 2\bar{u}_0^+ (\Pi_0 u)^+ + ((\Pi_0 u)^+)^2 &= 2\bar{v}_0^+ (\Pi_0 v)^+ + ((\Pi_0 v)^+)^2 = \\ &= -2(\Pi_0 v)^+ + ((\Pi_0 v)^+)^2, \\ 2\bar{u}_0^- (\Pi_0 u)^- + ((\Pi_0 u)^-)^2 &= 2\bar{v}_0^- (\Pi_0 v)^- + ((\Pi_0 v)^-)^2 = \\ &= 2(\Pi_0 v)^- + ((\Pi_0 v)^-)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Но из (16) для u и v возведением в квадрат получим

$$(\bar{u}_0^+)^2 + 2\bar{u}_0^+ (\Pi_0 u)^+ + ((\Pi_0 u)^+)^2 = (\bar{u}_0^-)^2 + 2\bar{u}_0^- (\Pi_0 u)^- + ((\Pi_0 u)^-)^2 \quad (23)$$

и аналогичное соотношение для v . Вычитая уравнения (22) одно из другого и учитывая (23), приходим к равенствам

$$(\bar{u}_0^+)^2 - (\bar{u}_0^-)^2 = (\bar{v}_0^+)^2 - (\bar{v}_0^-)^2 = 0.$$

Отсюда следует

$$\bar{u}_0^+ = \bar{u}_0^-. \quad (24)$$

Здесь мы воспользовались тем, что физический смысл имеют только те решения, для которых $u > 0$. Но тогда в силу (16)

$$(\Pi_0 u)^+ = (\Pi_0 u)^-. \quad (2)$$

Далее, из соотношения (17) для ψ и первого уравнения (19) получаем

$$(\Pi_0 \psi)^+ = (\Pi_0 \psi)^-. \quad (26)$$

Условие (24) представляет собой одно из условий сопряжения на кривой Γ для решения системы (11). Однако для окончательной постановки задачи для системы (11) условия (24) недостаточно, нужны еще условия связи, которые будут получены ниже. Пока же, считая, что \bar{u}_0 известно, продолжим исследование $\Pi_0 z$.

Из (20) выразим $\Pi_0 u$ через $\Pi_0 v$:

$$\Pi_0 u = -\bar{u}_0^\pm + \sqrt{(\bar{u}_0^\pm)^2 + 2\bar{v}_0^\pm \Pi_0 v + (\Pi_0 v)^2} \quad (27)$$

(знак перед радикалом выбирается опять-таки из условий на бесконечности). Теперь для $\Pi_0 \psi$, $\Pi_0 v$ имеем из (19) систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} &= \Pi_0 v, \\ \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} &= \sqrt{(\bar{u}_0^\pm)^2 + 2\bar{v}_0^\pm \Pi_0 v + (\Pi_0 v)^2} \Pi_0 \psi, \end{aligned} \quad (28)$$

в которой точка покоя $\Pi_0\varphi=0$, $\Pi_0v=0$ является седлом (собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\bar{u}_0^\pm}$). Из этой системы находим

$$\frac{1}{2} (\Pi_0\varphi)^2 = \int \frac{\Pi_0v \, d\Pi_0v}{\sqrt{(\bar{u}_0^\pm)^2 + 2\bar{v}_0^\pm \Pi_0v + (\Pi_0v)^2}}.$$

Произведем интегрирование, пользуясь дополнительными соображениями, вытекающими из физической сущности задачи: $u > 0$ (этим уже пользовались выше) и $u^2 > v^2$ (напомним, что u — это сумма концентраций электронов и дырок, а v — их разность). Тогда получим (постоянная интегрирования равна нулю из условий на бесконечности)

$$\frac{1}{2} (\Pi_0\varphi)^2 = \Pi_0u - \bar{v}_0^\pm \ln \frac{\bar{v}_0^\pm + \Pi_0v + \bar{u}_0^\pm + \Pi_0u}{\bar{v}_0^\pm + \bar{u}_0^\pm}. \quad (29)$$

Из (26) теперь следует

$$\begin{aligned} (\Pi_0u)^+ - \bar{v}_0^+ + \ln \frac{\bar{v}_0^+ + (\Pi_0v)^+ + \bar{u}_0^+ + (\Pi_0u)^+}{\bar{v}_0^+ + \bar{u}_0^+} = \\ = (\Pi_0u)^- - \bar{v}_0^- \ln \frac{\bar{v}_0^- + (\Pi_0v)^- + \bar{u}_0^- + (\Pi_0u)^-}{\bar{v}_0^- + \bar{u}_0^-}, \end{aligned} \quad (30)$$

а из (16) для v имеем

$$(\Pi_0v)^+ - (\Pi_0v)^- = 2. \quad (31)$$

Пользуясь равенствами (31) и (25) и заменяя в (30) $\bar{u}_0^+ + \Pi_0u$ его выражением через Π_0v по формуле (27), приходим к равенству

$$(1 + (\Pi_0v)^- + \sqrt{(u^0)^2 + 2(\Pi_0v)^- + ((\Pi_0v)^-)^2}) = (u^0)^2 - 1,$$

где $u^0 = \bar{u}_0^+ = \bar{u}_0^-$ (см. (24)). Отсюда после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} (1 + (\Pi_0v)^-)(1 + (\Pi_0v)^- + \sqrt{(u^0)^2 + 2(\Pi_0v)^- + ((\Pi_0v)^-)^2}) = \\ = (1 + (\Pi_0v)^-)(v + u)|_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, $(\Pi_0v)^- = -1$, а тогда в силу (31) $(\Pi_0v)^+ = 1$. Итак,

$$(\Pi_0v)^- = -1, \quad (\Pi_0v)^+ = 1. \quad (32)$$

Таким образом, мы получили граничные условия для условно устойчивых систем (28).

Используя интеграл (29), можно найти Π_0v как функцию ρ вдоль сепаратрисы седла $\Pi_0v=0$, $\Pi_0\varphi=0$ системы (28) как

при $\rho \geq 0$, так и при $\rho \leq 0$. Оставляя пока оба знака перед радикалом, имеем

$$\frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{(u^0)^2 + 2\bar{v}_0^\pm \Pi_0 v + (\Pi_0 v)^2} \times \\ \times \left[-u^0 + \sqrt{(u^0)^2 + 2\bar{v}_0^\pm \Pi_0 v + (\Pi_0 v)^2} - \right. \\ \left. - \bar{v}_0^\pm \ln \frac{\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v + \sqrt{(u^0)^2 + 2\bar{v}_0^\pm \Pi_0 v + (\Pi_0 v)^2}}{u^0 + \bar{v}_0^\pm} \right]^{1/2}, \quad (33)$$

$$\Pi_0 v|_{\rho=0} = -\bar{v}_0^\pm.$$

Одно из этих уравнений (содержащее \bar{v}_0^+) относится к области $\rho > 0$, а другое (содержащее \bar{v}_0^-) — к области $\rho < 0$. Что касается знака \pm перед $\sqrt{2}$, то он пока никак не связан со знаком \pm у \bar{v}_0^\pm . Эту связь как раз предстоит выяснить.

Рассмотрим, например, $\Pi_0 v$ в Ω_2 , т. е. при $\rho \geq 0$. Здесь уравнение устойчивой сепаратрисы седла $\Pi_0 v = 0$, $\Pi_0 \varphi = 0$ системы (28) в линейном приближении имеет вид $\Pi_0 v = -\sqrt{u^0} \Pi_0 \varphi$. Оно получается, если в (28) сохранить линейные члены по переменным $\Pi_0 v$, $\Pi_0 \varphi$ и учесть (так как $\rho > 0$), что из двух экспонент $\exp(\lambda_{1,2}\rho) = \exp(\pm \sqrt{u^0}\rho)$ нужно оставить экспоненту со знаком минус. Заметим, что $\Pi_0 \varphi$ как функция $\Pi_0 v$, согласно (29), нигде, кроме точки $\Pi_0 v = 0$, в нуль не обращается и сепаратриса расположена во II и IV квадрантах фазовой плоскости $(\Pi_0 v, \Pi_0 \varphi)$ (рис. 31, а). Согласно (32), имеем $\Pi_0 v|_{\rho=+0} = 1$. Поэтому $\Pi_0 \varphi|_{\rho=+0} < 0$, как видно из того же рис. 31, а. Следовательно, при интегрировании системы (33) для $\rho \geq 0$ перед $\sqrt{2}$ нужно взять знак минус. Аналогичные рассуждения для $\rho \leq 0$ приводят к тому, что перед $\sqrt{2}$ также нужно взять знак минус (рис. 31, б).

Итак, при интегрировании (33) как для $\rho \geq 0$, так и для $\rho \leq 0$ перед $\sqrt{2}$ нужно взять знак минус. Найдя $\Pi_0 v$, по формуле (27) определим $\Pi_0 u$, а затем из (21) и $\Pi_0 \psi$ (предварительно вычислив $(\Pi_0 \varphi)^2$ по формуле (29)). Таким образом, все пограничные члены нулевого приближения в окрестности кривой Γ , т. е. все функции $\Pi_0 z$ построены. Следует напомнить только, что это утверждение носит условный характер, поскольку в (33) входит не известная пока величина u^0 .

Нетрудно получить дополнительно к (24) еще одно условие на Γ для решения системы (11). Из (21) и (29) имеем

$$(\Pi_0 \psi)^\pm = -\ln \frac{\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v + \bar{u}_0^\pm + \Pi_0 u}{\bar{v}_0^\pm + \bar{u}_0^\pm},$$

а отсюда и из (16) получаем (учитывая, что $\bar{u}_0^\pm = u^0$)

$$\bar{\psi}_0^+ - \bar{\psi}_0^- = \ln \frac{u^0 - 1}{u^0 + 1}. \quad (34)$$

Однако условий (24) и (34) по-прежнему недостаточно для окончательной постановки задачи для системы (11). Нужны еще условия на Γ для производных от \bar{u}_0 и $\bar{\psi}_0$. Эти условия находятся из рассмотрения уравнений первого приближения, т. е. уравнений для \bar{z}_1 и $\Pi_1 z$.

4. Из первого уравнения (7) следует, что $\bar{v}_1 = 0$, а для $\bar{\psi}_1$, \bar{u}_1 получается линейная система, содержащая $\Delta\bar{\psi}_1$, $\Delta\bar{u}_1$, а также

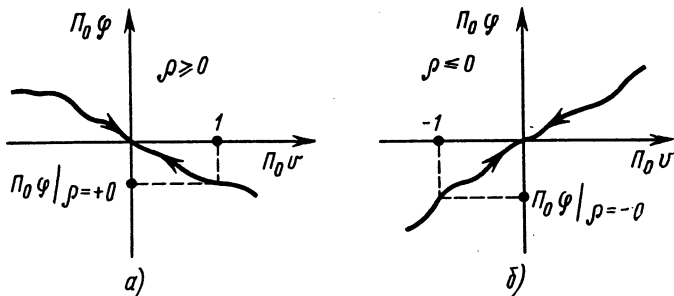


Рис. 31

производные первого порядка. На C_k зададим нулевые значения функций $\bar{\psi}_1$, \bar{u}_1 , а на изолированных границах потребуем обращения в нуль производных по x . Функция $\bar{v}_1 = 0$ удовлетворяет и тем и другим условиям. Отсюда следует, что пограничные функции $\Pi_1 z$, как и пограничные функции нулевого приближения $\Pi_0 z$, обращаются в нуль. Они появятся в следующем приближении, когда $\bar{v}_2 = -\Delta\bar{\psi}_0$ уже не будет удовлетворять поставленным нулевым условиям первого рода на C_k и нулевым условиям второго рода на $\partial\Omega_k$.

На кривой Γ в первом приближении появляются условия

$$\bar{z}_1^+ + (\Pi_1 z)^+ = z_1^- + (\Pi_1 z)^-, \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_1 z\right)^+ + \left(\frac{\partial \bar{z}_0}{\partial r}\right)^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_1 z\right)^- + \left(\frac{\partial \bar{z}_{01}}{\partial r}\right)^-. \quad (36)$$

Так как $\bar{v}_1 = 0$, то условие (35) для v приводит к соотношению

$$(\Pi_1 v)^+ = (\Pi_1 v)^-,$$

а из (36) в силу (12) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_1 v\right)^+ = \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_1 v\right)^-. \quad (37)$$

Система уравнений для $\Pi_1 z$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1 \psi}{\partial \rho^2} &= -\Pi_1 v - \alpha(0, l) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial^2 \Pi_1 u}{\partial \rho^2} &= -(\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v) \frac{\partial^2 \Pi_1 \psi}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} - \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \Pi_1 v}{\partial \rho} - \\ &\quad - \left(\bar{v}_1^\pm + \Pi_1 v + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\right)^\pm \rho\right) \frac{\partial^2 \Pi_0 \psi}{\partial \rho^2} - \alpha(0, l) \frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} - \\ &\quad - (\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v) \alpha(0, l) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\right)^\pm \frac{\partial \Pi_0 v}{\partial \rho} - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\right)^\pm \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \quad (38) \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 \Pi_1 v}{\partial \rho^2} =$ (правая часть имеет структуру правой части предыдущего уравнения с заменой v на u , u на v).

Заметим, что в силу (19) члены, содержащие $\alpha(0, l)$ во втором и третьем уравнениях (38), взаимно уничтожаются.

Интегрируя подобно тому, как в (14), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1 \psi}{\partial \rho^2} &= -\Pi_1 v - \alpha(0, l) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} &= -(\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v) \frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} - (\bar{v}_1^\pm + \Pi_1 v) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\right)^\pm \Pi_0 v - \left(\frac{\partial \bar{v}_{01}}{\partial r}\right)^\pm \left(\Pi_0 v + \int_{\pm \infty}^{\rho} \rho \frac{\partial^2 \Pi_0 \psi}{\partial \rho^2} d\rho\right), \end{aligned}$$

$\frac{\partial \Pi_1 v}{\partial \rho} =$ (то же, что в предыдущем уравнении, с заменой v на u).

Входящие сюда интегралы можно преобразовать интегрированием по частям. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1 \psi}{\partial \rho^2} &= -\Pi_1 v - \alpha(0, l) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} &= -(\bar{v}_0^\pm + \Pi_0 v) \frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} - (\bar{v}_1^\pm + \Pi_1 v) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} - \\ &\quad - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\right)^\pm \Pi_0 v - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}\right)^\pm \rho \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho}, \quad (39) \end{aligned}$$

$\frac{\partial \Pi_1 v}{\partial \rho} =$ (то же, что в предыдущем уравнении, с заменой v на u).

Из последнего уравнения (39), используя (37), получим

$$\begin{aligned} & -(u^0 + \Pi_0 u)^+ \left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^+ - (\bar{u}_1^+ + (\Pi_1 u)^+) \left(\frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} \right)^+ - \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^+ (\Pi_0 u)^+ = \\ & = -(u^0 + (\Pi_0 u)^-) \left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^- - (\bar{u}_1^- + (\Pi_1 u)^-) \left(\frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial \rho} \right)^- - \\ & \quad - \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^- (\Pi_0 u)^-, \end{aligned}$$

а отсюда в силу (25), (26), (19) имеем (через $\Pi_0 u$ здесь обозначено общее значение $(\Pi_0 u)^+$ и $(\Pi_0 u)^-$)

$$-(u^0 + \Pi_0 u) \left[\left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^+ - \left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^- \right] - \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^+ - \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^- \right] \Pi_0 u = 0. \quad (40)$$

Условие (36) для ψ запишем в виде

$$\left[\left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^+ - \left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^- \right] + \left[\left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^+ - \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^- \right] = 0. \quad (41)$$

Из (40), (41) следует

$$\left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^+ = \left(\frac{\partial \Pi_1 \psi}{\partial \rho} \right)^-, \quad (42)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^+ = \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^-. \quad (43)$$

Поэтому из второго уравнения (39) получаем

$$\left(\frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} \right)^+ - \left(\frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} \right)^- = - \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^+ (\Pi_0 v)^+ + \left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^- (\Pi_0 v)^-,$$

а значит, в силу (32)

$$\left(\frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} \right)^+ - \left(\frac{\partial \Pi_1 u}{\partial \rho} \right)^- = -2 \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r},$$

где через $\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r}$ обозначено общее значение $\left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^+$ и $\left(\frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r} \right)^-$.

Но тогда из (36) имеем

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}\right)^+ - \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial r}\right)^- = 2 \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial r}. \quad (44)$$

Таким образом, получены недостающие дополнительные условия для определения $\bar{\psi}_0$, \bar{u}_0 из (11), а именно условия (43) и (44). Мы сможем теперь найти $\bar{\psi}_0$, \bar{u}_0 , а следовательно, окончательно найдем $\Pi_0 z$ (напомним, что в уравнения для $\Pi_0 z$ входит величина u^0 , равная значению $\bar{u}_0(0, l)$, которое теперь известно).

Одновременно мы получили дополнительные условия (37), (42) для решения системы (39), которая содержит неизвестные величины \bar{u}_1^\pm . Как и (15), ее можно исследовать с помощью первых интегралов. Таким способом будет найдена часть дополнительных условий на Γ для регулярных членов $\bar{\psi}_1$, \bar{u}_1 первого приближения. Остальные условия получатся при рассмотрении $\Pi_2 z$. Описанный процесс можно продолжить.

Итак, полностью построено нулевое приближение $\bar{z}_0 + \Pi_0 z$. Оно удовлетворяет граничным условиям на C_k и $\partial\Omega_k$. На кривой Γ эта сумма непрерывна, а непрерывность производных имеет место лишь в главном члене порядка $1/\mu$, т. е. с точностью $O(1)$. Чтобы получить сопряжение нормальных производных с точностью $O(\mu)$, нужно добавить члены $\mu\bar{z}_1 + \mu\Pi_1 z$. Дальнейшие члены разложения Πz будут повышать точность сопряжения.

Погранфункции $\Pi_i z$ вносят невязки в условия на изолированной границе, существенные в окрестностях точек A и B (см. рис. 30) и экспоненциально убывающие по мере удаления вдоль границы от этих точек. Такие невязки погашаются введением угловых погранфункций. Точно так же угловые погранфункции нужно вводить в окрестностях точек стыка электрических контактов C_k и изолированных границ $\partial\Omega_i$. Как уже отмечалось ранее, угловые погранфункции мы не строим, тем самым частичная сумма ряда (10) обеспечивает равномерное приближение по невязке всюду, за исключением угловых окрестностей, занумерованных на рис. 30 цифрами от 1 до 8.

Заметим, что в нулевом приближении угловых погранфункций не возникает из-за того, что на $\partial\Omega_k$ задается краевое условие второго рода, и $\bar{z}_0 + \Pi_0 z$ обеспечивает приближение по невязке с точностью $O(\mu)$ равномерно во всей области $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.

В заключение отметим, что метод пограничных функций можно применять также к решению нестационарных задач теории полупроводниковых приборов (см., например, [6]).

§ 17. Акустические колебания в среде с малой вязкостью

17.1. Постановка задачи

Пусть некоторый объем заполнен газом, который в отсутствие акустических колебаний характеризуется значениями плотности, давления и абсолютной температуры, равными ρ_0 , p_0 , T_0 . При наличии акустических колебаний величины ρ , p , T будут претерпевать некоторые отклонения от невозмущенных значений, зависящие от координат точки и от времени. Обозначим эти отклонения $\delta\rho$, δp , δT и введем следующие функции: $s = \delta\rho/\rho_0$ — относительное уплотнение при колебаниях, $p = \delta p/p_0$ — относительная акустическая добавка к давлению, $\theta = \delta T/T$ — относительная акустическая добавка к температуре. Введем обозначения: \vec{u} — вектор колебательной скорости, $c_0 = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ — адиабатическая скорость звука, $\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, η_1 — кинематический коэффициент сдвиговой вязкости, ζ — кинематический коэффициент объемной вязкости, $\eta_2 = \zeta + \frac{1}{3}\eta_1$, q — коэффициент температуропроводности. Тогда линеаризованная система уравнений аэродинамики при отсутствии внешних сил с учетом вязкости и теплопроводности запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\frac{c_0^2}{\gamma} \text{grad } p + \eta_1 \Delta \vec{u} + \eta_2 \text{grad div } \vec{u}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \text{div } \vec{u} &= 0, \quad p = s + \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = (\gamma - 1) \frac{\partial s}{\partial t} + q \Delta \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь первое уравнение представляет собой уравнение Навье — Стокса, второе — уравнение непрерывности, третье — уравнение состояния, четвертое — уравнение, выражающее закон сохранения энергии.

Если вязкость и температуропроводность среды малы, то η_1 , η_2 , q играют роль малых параметров. В этом случае метод пограничных функций дает возможность провести достаточно эффективный асимптотический расчет полей скоростей и температур, что позволяет решать важный для физической и технической акустики вопрос о поглощении звука вблизи границы среды.

Будем рассматривать случай гармонических колебаний с частотой ω в произвольной области Ω , ограниченной достаточно гладкой поверхностью $\partial\Omega$. Тогда зависимость искомых величин от времени задается множителем $\exp(i\omega t)$ и поэтому производные по t в системе (1) заменятся множителем $i\omega$. Введем безразмерные координаты, время и скорость, как отношения соответствующих физических величин к их характерным для данной

задачи постоянным значениям, и безразмерные вещественные малые параметры ε^2 , ε_1^2 , ε_2^2 , пропорциональные соответственно η_1 , η_2 , q . В результате для безразмерных комплексных амплитуд (обозначим их теми же буквами \vec{u} , s , p , θ) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} i\omega\vec{u} &= -a \operatorname{grad} p + \varepsilon^2 \Delta \vec{u} + \varepsilon_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}, \\ i\omega s + b \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad p = s + \theta, \quad i\omega\theta = i\omega cs + \varepsilon_2^2 \Delta \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где a , b , c — положительные числа. Представим \vec{u} в виде суммы потенциальной и вихревой составляющих:

$$\vec{u} = \operatorname{grad} Q + \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Как известно, такое представление не является единственным. Можно показать, что среди всех представлений существует ровно одно, для которого Q и \vec{v} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} i\omega Q &= -ap + (\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2) \Delta Q, \\ \varepsilon^2 \Delta \vec{v} - i\omega \vec{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда параметры ε^2 , ε_1^2 , ε_2^2 имеют одинаковый порядок малости, т. е. $\varepsilon_1^2 = \varepsilon^2/k_1$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon^2/k_2$, k_1 и k_2 — положительные числа. Тогда, заменяя в системе (2) первое уравнение уравнениями (3) и исключая s и p с помощью второго и третьего уравнений (2), приходим к системе уравнений относительно \vec{v} , Q , θ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \vec{v} - i\omega \vec{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \Delta Q &= \alpha Q + \beta \theta, \quad \varepsilon^2 \Delta \theta = k_0 [\alpha Q + (\beta + \sigma) \theta], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha(\omega, \varepsilon) &= -\frac{\omega^2 k_1}{abk_1 + i\varepsilon^2 \omega(1 + k_1)}, \quad \beta(\omega, \varepsilon) = \frac{i a \omega k_1}{abk_1 + i\varepsilon^2 \omega(1 + k_1)}, \\ \sigma &= \frac{i\omega}{bc}, \quad k_0 = bck_2. \end{aligned}$$

Для системы (4) нужно задать граничные условия на поверхности $\partial\Omega$. Рассмотрим два случая:

1) Вынужденные колебания — акустическое поле частоты ω возбуждается на границе:

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = (\operatorname{grad} Q + \vec{v})|_{\partial\Omega} = \vec{u}_0, \quad (5)$$

где \vec{u}_0 — заданная функция. Здесь отдельного рассмотрения требуют нерезонансный случай — частота ω не близка к собственным частотам области Ω (этот случай подробно рассмотрен в п. 17.2) и резонансный случай — частота ω близка к одной

из собственных частот (об этом случае кратко сказано в конце п. 17.3).

2) Собственные колебания — требуется найти собственные частоты области Ω , т. е. такие значения ω , при которых существует нетривиальное решение системы (4) с однородными граничными условиями (5). Эта задача рассмотрена в п. 17.3.

Для θ зададим граничное условие

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

Физически это означает, что граница области Ω является идеальным проводником. Можно рассмотреть условие другого типа, например $\frac{\partial\theta}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$ (граница является идеальным изолятором).

Как в задаче о вынужденных колебаниях, так и в задаче о собственных колебаниях будет построена асимптотика решения по невязке.

17.2. Построение асимптотики решения в нерезонансном случае

1. Асимптотическое разложение решения задачи (4) — (6) будем строить в виде суммы регулярной и погранслойной частей (у функции \vec{v} регулярная часть равна нулю):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \Pi_0 \vec{v} + \varepsilon \Pi_1 \vec{v} + \dots, \\ Q &= \bar{Q} + \Pi Q = \bar{Q}_0 + \varepsilon \bar{Q}_1 + \dots + \Pi_0 Q + \varepsilon \Pi_1 Q + \dots, \\ \theta &= \bar{\theta} + \Pi \theta = \bar{\theta}_0 + \varepsilon \bar{\theta}_1 + \dots + \Pi_0 \theta + \varepsilon \Pi_1 \theta + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Для построения Π -функций введем в окрестности $\partial\Omega$ новые (локальные) координаты. Пусть поверхность $\partial\Omega$ задана параметрически уравнениями $x_i = \varphi_i(\sigma_1, \sigma_2)$ ($i=1, 2, 3$), где x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты, σ_1, σ_2 — криволинейные координаты на поверхности $\partial\Omega$ такие, что направления координатных линий σ_1 и σ_2 совпадают с ортогональными главными направлениями в каждой точке поверхности. Тогда, если r — расстояние от точки области Ω до $\partial\Omega$ вдоль нормали, то система координат σ_1, σ_2, r является ортогональной. Перейдем от x_1, x_2, x_3 к новым координатам σ_1, σ_2, r . В достаточно малой окрестности $\partial\Omega$ соответствие между ними взаимно однозначно и задается уравнениями $x_i = \varphi_i(\sigma_1, \sigma_2) + r\alpha_i(\sigma_1, \sigma_2)$, где $\alpha_i(\sigma_1, \sigma_2)$ — направляющие косинусы внутренней нормали к $\partial\Omega$. Параметры Ламе для новой системы координат обозначим $H_1, H_2, (H_3 = 1)$.

Подставим теперь выражения (7) в систему (4), отделим уравнения для регулярных и погранслойных членов, в уравнениях для пограничных функций перейдем к новым переменным

σ_1, σ_2, r и произведем растяжение $r = \varepsilon r$. Рассмотрим, например, уравнение $\text{div } \vec{v} = 0$. В новых переменных оно примет вид

$$\frac{\partial v_3}{\partial r} + a_1 \frac{\partial v_1}{\partial \sigma_1} + b_1 v_1 + a_2 \frac{\partial v_2}{\partial \sigma_2} + b_2 v_2 + d v_3 = 0, \quad (8)$$

где v_j — компоненты \vec{v} в новой системе координат, $a_j = \frac{1}{H_j}$,

$$b_j = \frac{\frac{\partial H_m}{\partial \sigma_j}}{H_1 H_2}, \quad d = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(H_1 H_2)}{H_1 H_2}, \quad m=1 \text{ при } j=2, \quad m=2 \text{ при } j=1.$$

Подставим в уравнение (8) искомый асимптотический ряд, произведем растяжение $r = \varepsilon r$ и разложим a_j, b_j, d по степеням ε . Получим

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi v_3 + \sum_{k=0} \varepsilon^k (L_1^{(k)} \Pi v_1 + L_2^{(k)} \Pi v_2 + L_3^{(k)} \Pi v_3) = 0, \quad (9)$$

где $L_j^{(k)}$ — линейные дифференциальные операторы первого порядка, например $L_j^{(0)} = a_{j0} \frac{\partial}{\partial \sigma_j} + b_{j0}$ ($j=1, 2$), индекс 0 означает, что коэффициенты берутся при $r=0$.

Аналогично из первого уравнения (4), которое в силу равенства $\text{div } \vec{v} = 0$ можно записать в виде $\varepsilon^2 \text{rot rot } \vec{v} + i\omega \vec{v} = 0$, получаем для Πv_3 (r -компоненты) уравнение

$$i\omega \Pi v_3 + \sum_{k=0} \varepsilon^{k+1} (M_{31}^{(k)} \Pi v_1 + M_{32}^{(k)} \Pi v_2 + M_{33}^{(k)} \Pi v_3) = 0, \quad (10)$$

а для Πv_j (σ_j — компоненты, $j=1, 2$) — уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi v_j - i\omega \Pi v_j + \sum_{k=0} \varepsilon^{k+1} (M_{j1}^{(k)} \Pi v_1 + M_{j2}^{(k)} \Pi v_2 + \\ + M_{j3}^{(k)} \Pi v_3) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $M_{mn}^{(k)}$ — линейные дифференциальные операторы второго порядка, в частности, $M_{3j}^{(0)} = a_{j0} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \sigma_j} + b_{j0} \frac{\partial}{\partial \rho}$, $j=1, 2$. Отметим, что $M_{3j}^{(0)} = L_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial \rho}$.

Из двух последних уравнений (4) имеем

$$\Delta \bar{Q} = \alpha \bar{Q} + \beta \bar{\theta}, \quad \varepsilon^2 \Delta \bar{\theta} = k_0 [\alpha \bar{Q} + (\beta + \sigma) \bar{\theta}], \quad (12)$$

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\varepsilon} N_1 + N_2 + \dots \right) \Pi Q = \alpha \Pi Q + \beta \Pi \theta, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2 + \dots \right) \Pi \theta = k_0 (\alpha \Pi Q + (\beta + \sigma) \Pi \theta), \quad (14)$$

где N_k — линейные дифференциальные операторы второго порядка.

Далее подставим (7) в граничные условия (5), (6). Получим

$$\left(\Pi v_3 + \frac{\partial}{\partial n} \bar{Q} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi Q \right)_{\partial \Omega} = u_3^0(\sigma_1, \sigma_2), \quad (15)$$

$$\left(\Pi v_j + a_{j0} \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \bar{Q} + a_{j0} \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \Pi Q \right)_{\partial \Omega} = u_j^0(\sigma_1, \sigma_2), \quad j=1, 2, \quad (16)$$

$$(\theta + \Pi \theta)_{\partial \Omega} = 0, \quad (17)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к $\partial \Omega$. Кроме того, потребуем, чтобы все Π -функции стремились к нулю при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\Pi(\sigma_1, \sigma_2, \rho) \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty. \quad (18)$$

2. Опишем порядок определения членов разложений (7) с помощью уравнений (9) — (17). Рассмотрим сначала нулевое приближение, т. е. найдем функции, удовлетворяющие уравнениям (9) — (17) с точностью $O(\varepsilon)$. Приравнявая нулю члены порядка ε^{-1} в уравнении (9) и члены порядка ε^0 в уравнении (10), получим для $\Pi_0 v_3$ два уравнения: $\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_0 v_3 = 0$, $i\omega \Pi_0 v_3 = 0$.

Учитывая условие (18), из первого уравнения находим $\Pi_0 v_3 = 0$, что совпадает с решением второго уравнения. Из (13) следуют уравнения $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_0 Q = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_1 Q = N_1 \Pi_0 Q$, откуда с учетом условия (18) получаем $\Pi_0 Q = \Pi_1 Q = 0$. Поэтому граничное условие для \bar{Q}_0 , вытекающее из (15), имеет вид $(\partial \bar{Q}_0 / \partial n)_{\partial \Omega} = u_3^0(\sigma_1, \sigma_2)$. Уравнения для \bar{Q}_0 и $\bar{\theta}_0$ получаются из (12):

$$\Delta \bar{Q}_0 = \alpha(\omega, 0) \bar{Q}_0 + \beta(\omega, 0) \bar{\theta}_0, \quad 0 = k_0 [\alpha(\omega, 0) \bar{Q}_0 + (\beta(\omega, 0) + \sigma) \bar{\theta}_0].$$

Отсюда имеем

$$\Delta \bar{Q}_0 + k^2(\omega) \bar{Q}_0 = 0, \quad (19)$$

$$\bar{\theta}_0 = -\frac{\alpha(\omega, 0)}{\beta(\omega, 0) + \sigma} \bar{Q}_0 \quad (20)$$

где $k^2(\omega) = -\alpha(\omega, 0) \sigma [\beta(\omega, 0) + \sigma]^{-1} = \omega^2 [ab(c+1)]^{-1}$. Если вернуться к физическим переменным, то оказывается, что уравнение (19) является волновым уравнением для идеальной невязкой среды. Найденное граничное условие для \bar{Q}_0 также соответствует случаю идеальной среды. Будем считать, что частота ω вынужденных колебаний не близка ни к одной из собственных частот ω_c области Ω ($\omega - \omega_c = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Тогда

задача для \bar{Q}_0 не находится на спектре и, следовательно, имеет единственное решение. Таким образом, главный член \bar{Q}_0 регулярной части асимптотики, как и следовало ожидать, является потенциалом поля скоростей в идеальной среде. Зная \bar{Q}_0 , по формуле (20) находим $\bar{\theta}_0$, а из (16) получаем граничное условие для $\Pi_0 v_j$ ($j=1, 2$):

$$\Pi_0 v_j|_{\rho=0} = u_j^0(\sigma_1, \sigma_2) - \alpha_{j0} \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \bar{Q}_0|_{\partial \Sigma} \equiv \psi_j(\sigma_1, \sigma_2).$$

Уравнение для $\Pi_0 v_j$ следует из (11):

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_0 v_j - i\omega \Pi_0 v_j = 0. \quad (21)$$

Отсюда получаем

$$\Pi_0 v_j = \psi_j(\sigma_1, \sigma_2) \exp(-\kappa \rho), \quad \kappa = (1+i) \sqrt{\omega} / \sqrt{2}.$$

Таким образом, главный член $\vec{\Pi}_0 \vec{v}$ вихревой составляющей скорости имеет равную нулю нормальную компоненту $\Pi_0 v_3$ и экспоненциально убывающие по мере удаления от границы тангенциальные компоненты $\Pi_0 v_j$ ($j=1, 2$). Это хорошо согласуется с физическими представлениями, согласно которым функция \vec{v} описывает так называемые вязкие (стоксовы) волны, играющие существенную роль вблизи границы области, т. е. в пограничном слое.

Для функции $\Pi_0 \theta$ из (14), (17) получается задача

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_0 \theta = k_0 (\beta(\omega, 0) + \sigma) \Pi_0 \theta, \quad \Pi_0 \theta|_{\rho=0} = -\bar{\theta}_0|_{\partial \Sigma} \equiv \chi(\sigma_1, \sigma_2).$$

С учетом условия (18) находим

$$\Pi_0 \theta = \chi(\sigma_1, \sigma_2) \exp(-\kappa_1 \rho), \quad \kappa_1 = (1+i) \sqrt{\omega k_2 (c+1)/2}.$$

С физической точки зрения функция $\Pi_0 \theta$ описывает тепловые волны и, как видно из явного выражения, имеет погранслойный характер, что соответствует физическим представлениям.

Из (13), приравнявая коэффициенты при ϵ^0 , получаем уравнение для $\Pi_2 Q$, имеющее вид $\partial^2 \Pi_2 Q / \partial \rho^2 = \beta(\omega, 0) \Pi_0 \theta$. Двукратным интегрированием этого уравнения с учетом условия (18) находим $\Pi_2 Q = \frac{\beta(\omega, 0)}{\kappa_1^2} \chi(\sigma_1, \sigma_2) \exp(-\kappa_1 \rho)$. Построенные член

ны разложений (7) дают приближение, которое удовлетворяет с точностью $O(\epsilon)$ уравнениям (10) — (17), а уравнению (9) — с точностью $O(1)$. Чтобы добиться точности $O(\epsilon)$ и в этом уравнении, нужно найти $\Pi_1 v_3$. Из уравнения (9), приравнявая коэффициенты при ϵ^0 , получаем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_1 v_3 = -(L_1^0 \Pi_0 v_1 + L_2^0 \Pi_0 v_2). \quad (22)$$

Правая часть этого уравнения — известная функция. Проинтегрировав (22) с условием (18), найдем $\Pi_1 v_3$. Покажем, что найденную таким образом функцию $\Pi_1 v_3$ можно записать в виде

$$\Pi_1 v_3 = \frac{i}{\omega} (M_{31}^{(0)} \Pi_0 v_1 + M_{32}^{(0)} \Pi_0 v_2). \quad (23)$$

В самом деле, дифференцируя (22) по ρ и учитывая равенства $M_{3j}^{(0)} = L_j^{(0)} \frac{\partial}{\partial \rho} (j=1, 2)$, получаем $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_1 v_3 = -(M_{31}^{(0)} \Pi_0 v_1 + M_{32}^{(0)} \Pi_0 v_2)$. Но в силу (21) $\Pi_0 v_j = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_0 v_j$ и поэтому $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_1 v_3 = \frac{i}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (M_{31}^{(0)} \Pi_0 v_1 + M_{32}^{(0)} \Pi_0 v_2)$. Отсюда в результате двукратного интегрирования с учетом (18) приходим к равенству (23).

Итак, нулевое приближение полностью построено.

3. Рассмотрим теперь задачи, которые получаются путем приравнивания в уравнениях (9) — (17) членов порядка ε . Из (10) имеем

$$i\omega \Pi_1 v_3 = -(M_{31}^{(0)} \Pi_0 v_1 + M_{32}^{(0)} \Pi_0 v_2), \quad (24)$$

что дает такое же выражение для $\Pi_1 v_3$, как и формула (23). Таким образом, функция $\Pi_1 v_3$ определяется дважды — при построении нулевого приближения из уравнения (22) с условием (18) и при построении первого приближения из уравнения (24). В обоих случаях для $\Pi_1 v_3$ получается одно и то же выражение.

Зная $\Pi_1 v_3$ и $\Pi_2 Q$, из (15) находим граничное условие для \bar{Q}_1 : $\frac{\partial}{\partial n} \bar{Q}_1|_{\partial \Omega} = -\left(\Pi_1 v_3 + \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_2 Q\right)_{r=0}$. Из (12) аналогично (19), (20) получаем

$$\Delta \bar{Q}_1 + k^2(\omega) \bar{Q}_1 = 0, \quad \bar{\theta}_1 = -\frac{\alpha(\omega, 0)}{\beta(\omega, 0) + \sigma} \bar{Q}_1.$$

Решив краевую задачу для \bar{Q}_1 , найдем далее θ_1 , а из (16) — граничное условие для $\Pi_1 v_j$: $\Pi_1 v_j|_{r=0} = -a_{j0} \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \bar{Q}_1|_{\partial \Omega}$, $j=1, 2$.

Уравнение для $\Pi_1 v_j$ следует из (11):

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_1 v_j - i\omega \Pi_1 v_j = -M_{j1}^{(0)} \Pi_0 v_1 - M_{j2}^{(0)} \Pi_0 v_2, \quad j=1, 2.$$

Отсюда $\Pi_1 v_j$ находятся в явном виде, они экспоненциально убывают при $\rho \rightarrow \infty$. Для $\Pi_1 \theta$ из (14), (17), (18) получается задача

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_1 \theta = k_0(\beta(\omega, 0) + \sigma) \Pi_1 \theta - \mathcal{N}_1 \Pi_0 \theta, \quad \Pi_1 \theta|_{r=0} = -\bar{\theta}_1|_{\partial \Omega}, \quad \Pi_1 \theta|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

а для $\Pi_3 Q$ из (13) имеем уравнение $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Pi_3 Q = -N_1 \Pi_2 Q + \beta(\omega, 0) \Pi_1 \theta$ и, кроме того, условие (18). Функции $\Pi_1 \theta$ и $\Pi_3 Q$ также находятся в явном виде и имеют экспоненциальные оценки.

Чтобы уравнение (9) выполнялось с точностью $O(\varepsilon^2)$, остается найти функцию $\Pi_2 v_3$, для которой из (9) получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_2 v_3 = - \sum_{j=1}^2 (L_j^{(1)} \Pi_0 v_j + L_j^{(0)} \Pi_1 v_j) - L_3^{(0)} \Pi_1 v_3$$

с известной правой частью. Интегрируя это уравнение с условием (18), найдем $\Pi_2 v_3$.

Таким образом, определены все члены асимптотики первого порядка, удовлетворяющей уравнениям (9) — (17) с точностью $O(\varepsilon^2)$. Как видим, алгоритм нахождения членов асимптотики на втором этапе полностью аналогичен алгоритму на первом этапе, когда определялись члены нулевого приближения.

4. Описанный алгоритм можно применить для построения асимптотики любого порядка. Основная трудность обоснования такой возможности связана с тем, что функция $\Pi_k v_3$ определяется дважды — из уравнения (9) при построении $(k-1)$ -го приближения и из уравнения (10) при построении k -го приближения. Конечно, алгоритм будет работать только в том случае, если для $\Pi_k v_3$ получится одно и то же выражение в обоих случаях. В [28] показано, что это действительно так.

Так как новые координаты σ_1, σ_2, r были введены локально, то и Π -функции имеют пока смысл лишь в малой окрестности $\partial\Omega$. Для гладкого продолжения их на всю область Ω можно применить стандартный прием, описанный в п. 8.1.

Основной результат в отношении построенного разложения (7) можно сформулировать следующим образом: если в (7) взять частичные суммы n -го порядка, добавить к ним в выражении для v_3 член $\varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1} v_3$, а в выражении для Q — члены $\varepsilon^{n+1} \Pi_{n+1} Q$ и $\varepsilon^{n+2} \Pi_{n+2} Q$, то уравнения (9) — (17), а следовательно, и задача (4) — (6) будут удовлетворяться этими суммами с точностью $O(\varepsilon^{n+1})$.

17.3. Собственные колебания среды

1. Рассмотрим однородную задачу (4) — (6), т. е. в условии (5) положим $\vec{u}_0 = 0$. Требуется найти собственные частоты области Ω , т. е. такие значения ω , при которых задача (4), (6) имеет нетривиальные решения. Асимптотику собственной частоты ω будем искать в виде $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots + \varepsilon^k \omega_k + \dots$, а асимптотику собственных функций — в виде (7). Как и в п. 17.2,

получим $\Pi_0 v_3 = \Pi_0 Q = \Pi_1 Q = 0$, а для \bar{Q}_0 имеем задачу

$$\Delta \bar{Q}_0 + k^2(\omega_0) \bar{Q}_0 = 0, \quad \frac{\partial \bar{Q}_0}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (25)$$

где $k^2(\omega_0) = \omega_0^2 [ab(c+1)]^{-1}$. Чтобы задача (25) имела нетривиальное решение, $k^2(\omega_0)$ должно быть равно собственному значению этой задачи. Пусть μ_s — одно из собственных значений и пусть ему соответствует N собственных функций ψ_n ($n=1, 2, \dots, N$). Из равенства $k^2(\omega_0) = \mu_s$ находим $\omega_0 = \sqrt{\mu_s ab(c+1)}$,

а решение задачи (25) имеет вид $\bar{Q}_0 = \sum_{n=1}^N A_n^{(0)} \psi_n$, где $A_n^{(0)}$ — произвольные постоянные.

Отметим, что задача (25) — это задача о собственных колебаниях в области Ω для случая идеальной среды. Таким образом, нулевое приближение для собственной частоты ω колебаний вязкой среды совпадает с собственной частотой ω_0 колебаний идеальной среды и является действительной величиной. Остальные функции нулевого приближения, т. е. θ_0 , $\Pi_0 v_j$ ($j=1, 2$), $\Pi_0 \theta$, $\Pi_2 Q$ и $\Pi_1 v_3$, определяются далее, как и в п. 17.2, и зависят линейно от коэффициентов $A_n^{(0)}$.

2. При построении первого приближения для \bar{Q}_1 получается неоднородная задача на спектре

$$\Delta \bar{Q}_1 + k^2(\omega_0) \bar{Q}_1 = -\frac{2\omega_0 \omega_1}{ab(1+c)} \bar{Q}_0, \quad \frac{\partial \bar{Q}_1}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = -\left(\Pi_1 v_3 + \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_2 Q \right)_{\rho=0}.$$

Для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{\partial \Omega} \left(\Pi_1 v_3 + \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_2 Q \right)_{\rho=0} \psi_m dS = -\frac{2\omega_0 \omega_1}{ab(1+c)} \int_{\Omega} \bar{Q}_0 \psi_m dV \quad (m=1, 2, \dots, N),$$

которые представляют собой линейную однородную алгебраическую систему N уравнений относительно $A_n^{(0)}$ ($n=1, 2, \dots, N$):

$$\sum_{n=1}^N a_{mn} A_n^{(0)} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, N). \quad (26)$$

Коэффициенты a_{mn} этой системы зависят линейно от ω_1 . Чтобы система (26) имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы $\det \|a_{mn}\| = 0$. Это уравнение относительно ω_1 имеет N корней, среди которых могут быть и кратные. Возьмем один из корней. С физической точки зрения собственные колебания в вязкой среде должны быть затухающими, т. е. должно выполняться неравенство $\text{Re}(i\omega) < 0$. В [29] доказано, что $\text{Re}(i\omega_1) < 0$, и, следовательно, при достаточно малых ε

$$\text{Re}(i\omega) = \text{Re}[i(\omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2))] = \text{Re}[i(\varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2))] < 0.$$

Если выбранному корню ω_1 соответствует $M \leq N$ линейно независимых решений g_{j1}, \dots, g_{jN} ($j=1, \dots, M$) системы (26), то

$$A_n^{(0)} = \sum_{j=1}^M B_j^{(0)} g_{jn}, \quad (n=1, \dots, N), \quad \text{где } B_j^{(0)} \text{ — произвольные постоянные.}$$

Таким образом, после рассмотрения первого приближения и нахождения ω_1 функции нулевого приближения содержат M произвольных постоянных $B_j^{(0)}$. Решение задачи для \bar{Q}_1 мож-

$$\text{но записать в виде } \bar{Q}_1 = \sum_{n=1}^N A_n^{(1)} \psi_n + \sum_{j=1}^M B_j^{(0)} q_j, \quad \text{где } A_n^{(1)} \text{ — произвольные постоянные, } q_j \text{ — частное решение задачи для } \bar{Q}_1 \text{ при } B_i^{(0)} = \delta_{ij} \text{ (} i=1, \dots, M \text{).}$$

Остальные члены первого приближения определяются в том же порядке, как и в п. 17.2, и зависят линейно от $A_n^{(1)}$ и $B_j^{(0)}$.

3. На втором шаге из условия разрешимости задачи для \bar{Q}_2 получим линейную алгебраическую систему уравнений для $A_n^{(1)}$:

$$\sum_{n=1}^N a_{mn} A_n^{(1)} = \sum_{j=1}^M \hat{b}_{mj} B_j^{(0)} \quad (m=1, \dots, N), \quad (27)$$

где \hat{b}_{mj} — известные линейные функции ω_2 . Условие разрешимости системы (27) — ортогональность правой части к собственным векторам матрицы, сопряженной с $\|a_{mn}\|$, — приводит к однородной алгебраической системе уравнений относительно $B_j^{(0)}$:

$$\sum_{j=1}^M b_{kj} B_j^{(0)} = 0, \quad k=1, \dots, M. \quad \text{В качестве } \omega_2 \text{ возьмем один из корней уравнения } \det \|b_{kj}\| = 0.$$

Далее процедуру можно продолжить и построить асимптотику по невязке произвольного порядка.

4. Пусть в среде возбуждаются колебания с частотой ω , близкой к одной из собственных частот: $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots + \varepsilon^m \omega_m$. Правая часть представляет собой частичную сумму разложения собственной частоты, и, следовательно, ω отличается от собственной частоты на величину порядка ε^{m+1} . Это вызывает явление резонанса, причем с ростом m резонанс усиливается. Этот факт находит свое отражение в структуре асимптотики: асимптотическое разложение решения задачи (4) — (6) содержит члены порядка $\varepsilon^{-(m+1)}$. Построение асимптотики проводится по той же схеме, что и в предыдущих пунктах. Подробное описание содержится в [29].

В [57] приведены результаты расчетов на основе асимптотических формул для конкретных областей Ω . Аналогичные вопросы для задач динамики вязкой стратифицированной и вращающейся жидкости рассмотрены в [94].

§ 18. О других прикладных задачах

Мы рассмотрели подробно ряд прикладных задач, которые приводят к сингулярно возмущенным уравнениям и характеризуются наличием пограничных и переходных слоев.

Отметим кратко некоторые другие прикладные задачи, в которых для построения асимптотики решений использовались погранслойные методы.

1) Значительное место в этом круге задач занимают задачи оптимального управления объектами, описываемыми сингулярно возмущенными уравнениями. Характерной для задач оптимального управления (без ограничений на управление типа $|u(t)| \leq u_0$) является следующая задача. Требуется минимизировать функционал

$$I_\epsilon(u) = \varphi(y(T), z(T)) + \int_0^T F(y, z, u, t) dt$$

вдоль траекторий системы

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, z, u, t, \epsilon), & \epsilon \dot{z} &= g(y, z, u, t, \epsilon), \\ y(0, \epsilon) &= y^0, & z(0, \epsilon) &= z^0, & y &\in R_m, & z &\in R_M. \end{aligned}$$

Введя функцию Гамильтона и сопряженные переменные, можно свести эту задачу к краевой задаче условно устойчивого типа. Подробно об этой и других задачах управления говорится в обзоре [48], где приведена также обширная библиография. В [5] для решения задачи оптимального управления строится погранслойное разложение без перехода к сопряженным переменным (так называемая прямая схема).

2) Метод пограничных функций оказывается эффективным при решении многих задач динамики твердых тел при электро- и гидродинамических воздействиях [71—73].

3) В § 16 рассматривалась задача о p - n -переходе в теории полупроводниковых приборов. Интересные задачи с внутренним переходным слоем возникают при изучении полупроводниковых пленок. К ним также применим метод пограничных функций [9].

4) Метод пограничных функций успешно используется при исследовании ряда задач молекулярной аэродинамики, описываемых той или иной упрощенной моделью уравнения Больцмана [87] (см. также [44]).

5) В теории сплавов [61] встречаются кинетические системы с сингулярными возмущениями, обладающие той особенностью, что собственные значения $\lambda_i(t)$ основной матрицы \bar{F}_z (см. п. 4.2) обращаются в нуль в начальный момент времени $t=0$,

а при $t > 0$ выполнено условие $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$. Тем не менее метод пограничных функций удастся применить и для таких задач [56].

6) В работах [91, 92] методом пограничных функций построена асимптотика решений для сингулярно возмущенных интегральных уравнений, возникающих в теории замедления нейтронов и теории эпидемий. Задачи, описывающие перенос нейтронов с малой длиной свободного пробега и сводящиеся к сингулярно возмущенным интегродифференциальным уравнениям, исследовались методом пограничных функций в [77, 78].

7) В работе [93] на основе метода пограничных функций рассмотрена задача, моделирующая тепломассоперенос в двухкомпонентной среде.

В заключение отметим, что указанными работами не исчерпывается большой круг работ, посвященных применению погранслойных методов к прикладным задачам. Мы ограничились в основном работами, которые были выполнены авторами и их учениками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
2. BAIL IV. Proceedings of the fourth international conference on boundary and interior layers — computational and asymptotic methods, 1986, Novosibirsk, USSR. — Boole-press, 1986.
3. Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя//Вычисл. матем. и матем. физ. 1969. 9. № 4. С. 841—859.
4. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
5. Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г. Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями//Изв. АН СССР. Сер. технич. кибернет. 1985. № 3. С. 147—152.
6. Белянин М. П. О численно-асимптотическом решении одной нестационарной сингулярно возмущенной задачи из теории полупроводниковых приборов//Дифф. уравнения. 1985. 21. № 8. С. 1463—1440.
7. Белянин М. П. Об асимптотическом решении одной модели p - n -перехода//Вычисл. матем. и матем. физ. 1986. 26. № 2. С. 306—311.
8. Белянин М. П. Об асимптотике в одномерной модели некоторых полупроводниковых приборов//Вычисл. матем. и матем. физ. 1988. 28. № 1. С. 34—51.
9. Белянин М. П., Васильева А. Б. О внутреннем переходном слое в одной задаче теории полупроводниковых пленок//Вычисл. матем. и матем. физ. 1988. 28. № 2. С. 224—236.
10. Боглаев Ю. П. О численных методах решения сингулярно возмущенных задач//Дифф. уравнения. 1985. 21. № 10. С. 1804—1806.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
12. Бомба А. Я. Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде//Укр. матем. ж. 1982. 34. № 4. С. 37—40.
13. Бутузов В. Ф. Асимптотика решения разностного уравнения с малыми шагами в прямоугольной области//Вычисл. матем. и матем. физ. 1972. 12. № 3. С. 582—597.
14. Бутузов В. Ф. Угловой погранслои в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений//Матем. сб. 1977. 104(146). № 3(11). С. 460—485.
15. Бутузов В. Ф. Угловой погранслои в сингулярно возмущенных задачах с частными производными//Дифф. уравнения. 1979. 15. № 10. С. 1848—1862.
16. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б. Об асимптотике решения типа контрастной структуры//Матем. заметки. 1987. 42. № 6. С. 831—841.
17. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б. Об асимптотической теории контрастных пространственных структур//Вычисл. матем. и матем. физ. 1988. 28. № 3. С. 346—361.
18. Бутузов В. Ф., Калачев Л. В. Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенной системы нелинейных уравнений парабо-

лического типа с разными степенями малого параметра.— Рукоп. деп. в ВИНТИ 22.08.84, № 5960—84-Деп.

19. Бутузов В. Ф., Калачев Л. В. Асимптотическое приближение решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в критическом случае//Матем. заметки. 1986. 39. № 6. С. 819—830.

20. Бутузов В. Ф., Калачев Л. В. Асимптотика решения задачи горения в случае автокаталитической реакции//Вычисл. матем. и матем. физ. 1988. 28. № 5. С. 683—694.

21. Бутузов В. Ф., Мамонов В. М. Сингулярно возмущенная краевая задача эллиптического типа в критическом случае//Дифф. уравнения. 1982. 18. № 6. С. 1056—1061.

22. Бутузов В. Ф., Мамонов В. М. Процедура сглаживания в одной сингулярно возмущенной квазилинейной параболической задаче//Вычисл. матем. и матем. физ. 1987. 27. № 3. С. 391—399.

23. Бутузов В. Ф., Мамонов В. М. Об одной сингулярно возмущенной квазилинейной параболической задаче с негладкими угловыми пограничными функциями//Вычисл. матем. и матем. физ. 1987. 27. № 7. С. 1012—1021.

24. Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. О некоторых сингулярно возмущенных задачах с негладкими погранфункциями//ДАН СССР. 1982. 263. № 4. С. 786—789.

25. Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. Об одной сингулярно возмущенной краевой задаче эллиптического типа с негладкими угловыми пограничными функциями//Дифф. уравнения. 1985. 21. № 10. С. 1751—1755.

26. Бутузов В. Ф., Нестеров А. В. О некоторых сингулярно возмущенных задачах гиперболического типа с переходными слоями//Дифф. уравнения. 1986. 22. № 10. С. 1739—1744.

27. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н. Об одной задаче теории сингулярных возмущений//Дифф. уравнения. 1976. 12. № 10. С. 1736—1747.

28. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Федотова Е. В. Асимптотическое решение линеаризованной задачи о распространении звука в ограниченной среде с малой вязкостью//Вычисл. матем. и матем. физ. 1987. 27. № 2. С. 226—236.

29. Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Полежаева Е. В. Асимптотическое решение линеаризованных задач о собственных и вынужденных резонансных колебаниях среды с малой вязкостью//Вычисл. матем. и матем. физ. 1989. 29. № 7. С. 1023—1035.

30. Бутузов В. Ф., Никитин А. Г. Об одной системе сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа//Дифф. уравнения. 1981. 17. № 10. С. 1779—1791.

31. Бутузов В. Ф., Никитин А. Г. Сингулярно возмущенная эллиптическая краевая задача в прямоугольнике в критическом случае//Вычисл. матем. и матем. физ. 1984. 24. № 9. С. 1320—1330.

32. Бутузов В. Ф., Никитин А. Г. Равномерная асимптотика решения одной сингулярно возмущенной эллиптической системы в прямоугольнике//Вестник Моск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. 1985. № 3. С. 3—8.

33. Бутузов В. Ф., Удодов Ю. П. Асимптотическое решение системы сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа с угловым погранслоем//Вычисл. матем. и матем. физ. 1981. 21. № 3. С. 665—677.

34. Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А. Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений эллиптического типа в критическом случае//Дифф. уравнения. 1986. 22. № 9. С. 1565—1576.

35. Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А. Асимптотическое решение задачи о распространении тепла в тонких телах//Укр. мат. журн. 1987. 39. № 1. С. 13—21.

36. Бутузов В. Ф., Уразгильдина Т. А. Асимптотическое решение квазистатической задачи термоупругости для тонкого стержня//Прикл. матем. и механ. 1987. 51. № 6. С. 989—999.

37. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
38. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной//УМН. 1963. 18. № 3. С. 15—86.
39. Васильева А. Б. К вопросу о близких к разрывным решениям в системах с малым параметром при производных условно устойчивого типа//Дифф. уравнения. 1972. 8. № 9. С. 1560—1568.
40. Васильева А. Б. О периодических решениях уравнений эллиптического типа с малыми параметрами//Дифф. уравнения. 1982. 18. № 12. С. 2174—2178.
41. Васильева А. Б. О периодических решениях уравнений параболического типа с малыми параметрами//Дифф. уравнения. 1983. 19. № 12. С. 2076—2081.
42. Васильева А. Б. О внутреннем переходном слое в решении системы уравнений в частных производных первого порядка//Дифф. уравнения. 1985. 21. № 9. С. 1537—1544.
43. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
44. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М.: Изд-во МГУ, 1978.
45. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Singularly perturbed differential equations of parabolic type.— Lecture Notes in Mathematics 985, Asymptotic Analysis II, 1983, Springer — Verlag, с. 38—75.
46. Васильева А. Б., Волков В. Т. О периодических решениях сингулярно возмущенного уравнения параболического типа//ДАН СССР. 1985. 285. № 1. С. 15—19.
47. Васильева А. Б., Волков В. Т. Периодические решения некоторых сингулярно возмущенных уравнений параболического типа//Вычисл. матем. и матем. физ. 1985. 25. № 4. С. 609—614.
48. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления//Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. Т. 20.— М.: ВИНТИ, 1982. С. 3—77.
49. Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией//Матем. сб. 1986. 130(172). № 4(8). С. 488—499.
50. Васильева А. Б., Кучик Е. К. Сингулярно возмущенные системы двух уравнений в частных производных первого порядка в условно устойчивом случае//Дифф. уравнения. 1987. 23. № 2. С. 344—345.
51. Васильева А. Б., Сайдамагов М. М. О периодическом решении сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа//Изв. АН УзССР. Сер. физ. мат. наук. 1986. № 2. С. 9—14.
52. Васильева А. Б., Стельмах В. Г. Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов//Вычисл. матем. и матем. физ. 1977. 17. № 2. С. 339—348.
53. Васильева А. Б., Сыроева Т. Н. Применение метода пограничных функций к сингулярно возмущенному уравнению в частных производных первого порядка.— Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения. Межвузовский сб. Куйбышев, 1981. С. 32—44.
54. Васильева А. Б., Тупчиев В. А. О периодических решениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, близких к разрывным//ДАН СССР. 1968. 178. № 4. С. 767—770.
55. Васильева А. Б., Тупчиев В. А., Яркин А. Н. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, близкие к разрывным//Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 1. Изд. Ин-та матем. АН УССР, 1970. С. 149—157.

56. Васильева А. Б., Хасанов А. А. Применение теории сингулярных возмущений к исследованию математических задач массопереноса в многокомпонентных системах//ДАН СССР. 1980. 251. № 3. С. 529—534.
57. Велижанина К. А., Вожукова Е. А., Нефедов Н. Н. О влиянии вязкости и теплопроводности среды на характеристики цилиндрического резонатора//Акустический журнал. 1986. 32. № 1. С. 114—116.
58. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром//УМН. 1957. 12. № 5. С. 3—122.
59. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: Изд-во МГУ, 1971.
60. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классе разрывных функций и уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975.
61. Ворошнин Л. Г., Хусид Б. М. Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. — Минск: Наука и техника, 1979.
62. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений//УМН. 1959. 14. № 2. С. 87—158.
63. Дворянников С. В. О периодическом решении одной автономной сингулярно возмущенной системы//Дифф. уравнения. 1980. 16. № 9. С. 1617—1622.
64. Дифференциальные уравнения с малым параметром. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1980.
65. Дифференциальные уравнения с малым параметром. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
66. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983.
67. Есипова В. А. Асимптотика решения общей краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа//Дифф. уравнения. 1975. 11. № 11. С. 1956—1966.
68. Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной//Матем. заметки. 1969. 6. № 2. С. 237—248.
69. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
70. Кадыкенов Б. М., Касымов К. А. О задаче Коши с начальным скачком для сингулярно возмущенных гиперболических уравнений, вырождающихся в уравнение первого порядка//Дифф. уравнения. 1983. 19. № 12. С. 2114—2122.
71. Кобрин А. И. К задаче о движении тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, относительно центра масс в потенциальном поле массовых сил//ПММ. 1969. 33. Вып. 3. С. 431—440.
72. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В. О прецессионных уравнениях гироскопических систем//ПММ. 1976. 40, Вып. 2. С. 230—237.
73. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. Динамика проводящего твердого тела около центра масс в медленно изменяющемся магнитном поле//ДАН СССР. 1981. 261. № 5. С. 1070—1073.
74. Колесов Ю. С. Периодические решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка. — Труды Моск. мат. об-ва, 1970, 21, С. 103—134.
75. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.
76. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
77. Латышев В. Н. Построение асимптотики решения уравнения переноса нейтронов для цилиндрической области в случае малой длины свободного пробега//Дифф. уравнения. 1984. 20. № 9. С. 1596—1602.

78. Латышев В. Н., Тупчиев В. А. Асимптотическое разложение решения уравнения переноса в случае малой длины свободного пробега// Дифф. уравнения. 1983. 19. № 11. С. 1922—1927.
79. Levinson N. The first boundary value problem for $\epsilon \Delta u + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = D(x, y)$ for small ϵ . — *Ann. of Math.*, 1950, 51, N 2, p. 428—445.
80. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981.
81. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.
82. Медеуов Е. У. Асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений гиперболического типа//Изв. АН КазССР. Сер. физ. мат. 1981. № 5. С. 69—71.
83. Мельник З. О., Цымбал В. Н. Смешанная задача для гиперболической системы первого порядка с малым параметром при производных// Дифф. уравнения. 1976. 12. № 5. С. 902—907.
84. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.
85. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. — М.: Наука, 1975.
86. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1981.
87. Нагнибеда Е. А. Решение уравнений неравновесного газа//Вестник ЛГУ. Матем. механ. астр. 1969. № 7. Вып. 2. С. 97—111.
88. Найфэ А. Х. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
89. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
90. Нестеров А. В. Об асимптотике решения с переходным слоем одной сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений// ДАН СССР. 1989. 305. № 6. С. 1350—1353.
91. Нефедов Н. Н. Асимптотика решения сингулярно возмущенного интегрального уравнения с промежутками интегрирования различной степени малости// Вестник МГУ. Сер. Вычисл. матем. и кибернетика. 1978. № 1. С. 28—35.
92. Нефедов Н. Н. Об одном классе сингулярно возмущенных уравнений//Вычисл. матем. и матем. физ. 1978. 18. № 1. С. 94—105.
93. Нефедов Н. Н. Асимптотическое решение задачи, моделирующей теплообмен во взаимопроникающих средах//Дифф. уравнения. 1985. 21. № 10. С. 1819—1821.
94. Nefedov N. On some singularly perturbed problems for viscous stratified fluids. — *Journal of mathematical analyses and applications*, 1988. 131, N 1, p. 118—126.
95. Николс Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979.
96. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. — М.: Мир, 1970.
97. Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа с малым параметром при старших производных//Матем. сб. 1952. 31. № 1. С. 104—117.
98. Полак Л. С., Михайлов А. С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. — М.: Наука, 1983.
99. Польский Б. С. Численное моделирование полупроводниковых приборов. — Рига: Зинатне, 1986.
100. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1965.
101. Protter M. H., Weinberger H. F. Maximum principles in differential equations. — Englewood Cliffs, N. Y.: Prentice — Hall, 1967.
102. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука, 1984.

103. Сысоева Т. Н. Асимптотика решения начальной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка. — Рукоп. деп. в ВИНТИ. 1981. № 4346—81-ДЕП. С. 1—23.
104. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра//Матем. сб. 1948. 22(64), № 2. С. 193—204.
105. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры//Матем. сб. 1950. 27(69). № 1. С. 147—156.
106. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры//Матем. сб. 1952. 31(73). № 3. С. 575—586.
107. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. 2-е изд. — М.: Наука, 1985.
108. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
109. Треногин В. А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника — Вишика//УМН. 1970. 25. № 4. С. 121—156.
110. Уразгильдина Т. А. Асимптотическое разложение решения задачи о распространении тепла в тонких пластинах. — Рукоп. деп. в ВИНТИ. 1986. № 7528—В86. 15 с.
111. Уразгильдина Т. А. Асимптотика одной квазистатической задачи термоупругости в тонком диске. — Рукоп. деп. в ВИНТИ. 1987. № 2761 — В87. 16 с.
112. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
113. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1966.
114. Флюд В. М., Цымбал В. Н. Асимптотика решения смешанной задачи для сингулярно возмущенной слабо связанной гиперболической системы//Укр. матем. ж. 1985. 37. № 4. С. 481—487.
115. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплоотдача в химической кинетике. — М.: Наука, 1967.
116. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1985.
117. Цымбал В. Н. Задача Коши для гиперболической системы первого порядка с несколькими малыми параметрами//ДАН УССР. Сер. физ. мат. и техн. науки. 1983. № 1. С. 27—29.
118. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
119. O'Malley R. E., Jr. Introduction to Singular Perturbation. — Academic Press, N. Y., 1974.
120. Smith D. R. Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
121. Чанг К., Хауэс Ф. Нелинейные сингулярно возмущенные краевые задачи. Теория и приложения. — М.: Мир, 1988.