

Глава 3. Методы исследования математических моделей

Методы исследования и реализации математических моделей можно подразделить на два больших класса: **аналитические и численные**. Из численных методов в настоящее время наиболее часто применяются **метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод интегральных уравнений**. Их аналитических методов можно отметить **метод разделения переменных и асимптотические методы**.

Мы начнем рассмотрение с методов конечных разностей и конечных элементов, а затем рассмотрим метод разделения переменных. С помощью этого метода мы дадим полное обоснование математической модели, описывающей одномерные колебательные процессы на отрезке: малые продольные колебания упругого стержня, малые поперечные колебания упругой струны и т.д.

1. Метод конечных разностей

1) Основные понятия

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} L u(x) = f(x), & x \in D, \\ l u(x) = \mu(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad (2)$$

где L - линейный дифференциальный оператор, l - оператор дополнительных (начальных, граничных) условий, $\bar{D} = D + \Gamma$.

\bar{D} заменяем на $\bar{\omega}_h$ - дискретное множество узлов - **сетка**,
 $u(x)$, $x \in \bar{D}$ заменяем на $y_h(x_n)$ - сеточные функции (зависят от параметра h), $x_n \in \bar{\omega}_h$.

$u(x) \in H_0$, $y_h(x_n) \in H_h$. Пространство H_0 отображается на пространство H_h : $u(x) \in H_0 \sim u_h(x) = P_h u(x)$, $u_h \in H_h$, где P_h - линейный оператор из H_0 в H_h .

На линейном пространстве H_h вводятся сеточные нормы $\|y_h\|_h$ - аналоги норм в пространстве H_0 .

Условие согласования норм:

$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$, где $u_h = P_h u$, $\|u\|_0$ - норма в пространстве H_0 .

Пусть $\phi_h(x) = P_h f(x)$, $x \in \omega_h$, $\chi_h(x) = P_h \mu(x)$, $x \in \gamma_h$, где $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, ω_h - множество внутренних узлов, γ_h - множество граничных узлов.

Перейдем от дифференциальных операторов к разностным:

$$L \rightarrow L_h, \quad l \rightarrow l_h.$$

Будем говорить, что L_h аппроксимирует L с порядком $m > 0$ в точке x ,

если

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x) = \underline{\underline{O}}(|h|^m).$$

Задаче (1) – (2) ставится в соответствие система алгебраических

(разностных) уравнений

$$\begin{cases} L_h y_h(x) = \phi_h(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (4)$$

Семейство уравнений (3), (4), зависящих от параметра h , называется разностной схемой.

Пусть $z_h = y_h - u_h$, где $u_h = P_h u$. Так как L_h и l_h - линейные операторы, то получаем задачу:

$$\begin{cases} L_h z_h(x) = \psi_h, & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} l_h z_h(x) = \nu_h, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (6)$$

где ψ_h и ν_h - погрешности аппроксимации на решении $u(x)$ разностной схемой уравнения (1) и дополнительного условия (2). Схема (3)- (4):

1) аппроксимирует задачу(1)-(2) и имеет m -й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(3h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m);$$

2) сходится и имеет m – й порядок точности, если

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m).$$

Схема (3)-(4) корректна (разностная задача поставлена корректно), если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$:

- 1) разностная задача однозначно разрешима при любых входных данных ϕ_h, χ_h ;**
- 2) решение y_h равномерно по h непрерывно зависит от входных данных (свойство устойчивости).**

Если L_h и l_h - линейные операторы, то при $|h| \leq h_0$

$$\|y_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\phi_h\|_{(2h)} + M_2 \|\chi_h\|_{(3h)}, \quad (7)$$

где $M_1 > 0, M_2 > 0$ - постоянные, не зависящие от h и выбора входных данных ϕ_h, χ_h .

Если схема (3)-(4) устойчива, а z_h – решение задачи (5)-(6),

то (7) \Rightarrow

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \|z_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\psi_h\|_{(2h)} + M_2 \|v_h\|_{(3h)}$$

Из последнего равенства следует утверждение:

Если линейная схема (3)-(4) устойчива и аппроксимирует задачу (1)-(2), то она сходится (из устойчивости и аппроксимации линейной схемы следует ее сходимость).

Порядок точности схемы (3)-(4) определяется порядком аппроксимации.

2) Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \quad (8)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (9)$$

$$u(0, t) = \mu_0, \quad u(l, t) = \mu_1, \quad t \in [0, T]. \quad (10)$$

Разностная аппроксимация оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

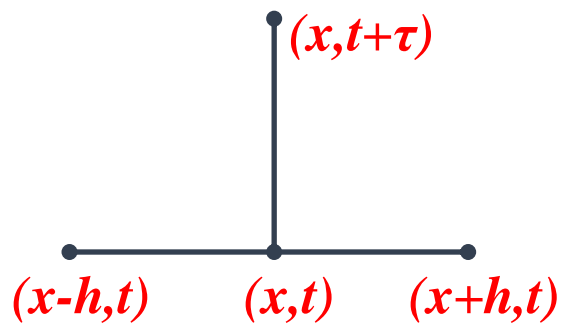
Введем равномерные сетки :

$$\bar{\omega}_h \equiv \{x_n = nh ; \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad hN = 1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau \equiv \{t_s = s\tau ; \quad s = 0, 1, \dots, S; \quad \tau S = T\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} \equiv \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_n, t_s) \in \bar{D}\},$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq 1 ; \quad 0 \leq t \leq T\}.$$



Назовем **шаблоном** множество узлов, на котором записывается разностный оператор

$$L_{h\tau}^{(0)} w = \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} - \frac{w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)}{h^2}$$

$$w = w(x, t), \quad \hat{w} = w(x, t + \tau)$$

$$w_t = \frac{\hat{w} - w}{\tau}$$

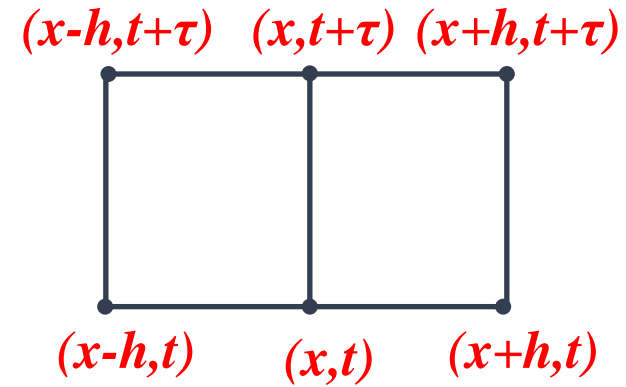
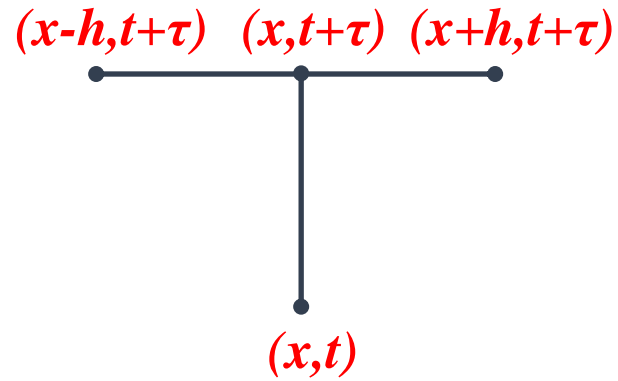
$$v_{\bar{x}} = (v(x) - v(x - h)) \frac{1}{h}$$

$$v_x = (v(x + h) - v(x)) \frac{1}{h}$$

$$v_{\bar{x}\bar{x}} = (v_x - v_{\bar{x}}) \frac{1}{h}$$

$$w_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)}{h^2}$$

$$L_{h\tau}^{(0)} w = w_t - w_{\bar{x}\bar{x}}$$



$$L_{h\tau}^{(1)} w = w_t - \hat{w}_{\bar{x}\bar{x}} \quad (11)$$

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} w = w_t - (\sigma \hat{w}_{\bar{x}\bar{x}} + (1-\sigma) w_{\bar{x}\bar{x}}) \quad (12)$$

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \underline{\underline{O(\tau^2)}} \quad (13)$$

$$w_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \underline{\underline{O(h^4)}}$$

Из формул (11)-(13), получим

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} w - Lw(x, t) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau)$$

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} w - Lw(x, t) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau)$$

При $\sigma=0,5$ («симметричная схема») получаем

$$\psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)} w - Lw\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau^2),$$

где ψ - погрешность аппроксимации оператора L соответствующим разностным оператором $L_{h\tau}$.

Добавляя к разностному уравнению разностные начальные и граничные условия (9), (10), получим разностную начально – краевую задачу (схему):

$$\begin{cases} L_{h\tau}^{(\sigma)} y \equiv y_t - (\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1-\sigma)y_{\bar{x}x}) = \phi, & (x_n, t_s) \in \omega_{h\tau}, & (14) \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x = x_n \in \bar{\omega}_h, & & (15) \\ y(0, t) = \mu_0, \quad y(1, t) = \mu_1, \quad t = t_s \in \bar{\omega}_\tau, & & (16) \end{cases}$$

где $\phi = \phi_n^s = \phi(x_n, t_s)$.

Схема (14)-(16) аппроксимирует задачу (8)-(10) с порядком $\underline{\underline{O}}(h^2 + \tau)$ при $\sigma = 0, \sigma = 1$ и $\underline{\underline{O}}(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0,5$.

Схема называется явной, если $\sigma=0$.

При $\sigma \neq 0$ схема называется неявной (при $\sigma=1$ – чисто неявной).

Явная схема ($\sigma=0$):

$$y_n^{s+1} = y_n^s + \frac{\tau}{h^2} (y_{n-1}^s - 2y_n^s + y_{n+1}^s) + \tau \phi_n^s \quad (17)$$
$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad s = 0, 1, \dots, M.$$

Чисто неявная схема ($\sigma=1$):

$$\frac{1}{h^2} y_{n-1}^{s+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) y_n^{s+1} + \frac{1}{h^2} y_{n+1}^{s+1} = - \left(\frac{1}{\tau} y_n^s + \phi_n^s \right) \quad (18)$$
$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad s = 0, 1, \dots, M.$$

Теорема

Для устойчивости разностной схемы (14)-(16) достаточно, чтобы существовали такие не зависящие от h и τ постоянные $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$, при которых имеет место оценка

$$\|y^{s+1}\| \leq (1 + C_1\tau) \|y^s\| + C_2\tau \|\phi\| \quad (19)$$

равномерная (чебышевская) норма: $\|y\| = \max_{n,s} |y_n^s|$

на s-м слое: $\|y^s\| = \max_n |y_n^s|$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \|y^{s+1}\| &\leq (1 + C_1\tau) \|y^s\| + C_2\tau \|\phi\| \leq (1 + C_1\tau) \left\{ (1 + C_1\tau) \|y^{s-1}\| + C_2\tau \|\phi\| \right\} + C_2\tau \|\phi\| = \\ &= (1 + C_1\tau)^2 \|y^{s-1}\| + C_2\tau \|\phi\| \{1 + (1 + C_1\tau)\} \leq \dots \leq (1 + C_1\tau)^{s+1} \|y^0\| + C_2\tau \|\phi\| \{1 + \\ &+ (1 + C_1\tau) + \dots + (1 + C_1\tau)^s\} \leq (1 + C_1\tau)^{m+1} \|u_0\| + C_2\tau(m+1)(1 + C_1\tau)^m \|\phi\|, \quad s \leq m, \end{aligned}$$

Так как

$$(1 + C_1\tau)^m \leq (1 + C_1\tau)^M \leq e^{C_1\tau M} = e^{C_1T}$$

при $m \leq M$, то полагая $M_1 = e^{C_1T}$, $M_2 = C_2TM_1 \Rightarrow$

$$\|y\| \leq M_1 \|u_0\| + M_2 \|\phi\|.$$

Рассмотрим устойчивость **чисто неявной схемы**

($\sigma=1$)

$$y_n^{s+1} = y_n^s - \gamma \left\{ 2y_n^{s+1} - y_{n+1}^{s+1} - y_{n-1}^{s+1} \right\} + \tau \phi_n^s, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}$$

$$y_{k_0}^{s+1} = \max_n y_n^{s+1} \geq y_n^{s+1} \Rightarrow$$

$$2y_{k_0}^{s+1} - y_{k_0+1}^{s+1} - y_{k_0-1}^{s+1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \tau \phi_{k_0}^s \tag{20}$$

$$y_{l_0}^{s+1} = \min_n y_n^{s+1} \leq y_n^{s+1} \Rightarrow$$

$$2y_{l_0}^{s+1} - y_{l_0+1}^{s+1} - y_{l_0-1}^{s+1} \leq 0 \Rightarrow$$

$$y_{l_0}^{s+1} \geq y_{l_0}^s + \tau \phi_{l_0}^s \quad (21)$$

(20), (21) =>

$$y_{l_0}^s + \tau \phi_{l_0}^s \leq y_{l_0}^{s+1} \leq y_n^{s+1} \leq y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \tau \phi_{k_0}^s \quad (22)$$

(22) =>

$$\left| y_n^{s+1} \right| \leq \left\| y^s \right\| + \tau \left\| \phi \right\| \quad (23)$$

(23) =>

$$\left\| y^{s+1} \right\| \leq \left\| y^s \right\| + \tau \left\| \phi \right\|$$

Рассмотрим устойчивость **явной схемы** ($\sigma=0$)

(17) =>

$$y_n^{s+1} = (1 - 2\gamma)y_n^s + \gamma y_{n+1}^s + \gamma y_{n-1}^s + \tau \phi_n^s$$

Пусть $\gamma < \frac{1}{2}$. Тогда $1 - 2\gamma > 0$ и получим

$$\begin{aligned} |y_n^{s+1}| &\leq (1 - 2\gamma)|y_n^s| + \gamma|y_{n+1}^s| + \gamma|y_{n-1}^s| + \tau|\phi_n^s| \leq \\ &\leq (1 - 2\gamma + \gamma + \gamma)\|y^s\| + \tau\|\phi\| = \|y^s\| + \tau\|\phi\| \end{aligned} \quad (24)$$

(24) =>

$$\|y^{s+1}\| \leq \|y^s\| + \tau\|\phi\|$$

Пусть $\delta y_n^s = (-1)^n \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ - ошибка на s -м слое.

$$\begin{aligned}\delta y_n^{s+1} &= (1 - 2\gamma)\delta y_n^s + \gamma\delta y_{n+1}^s + \gamma\delta y_{n-1}^s = \\ &= (-1)^n \varepsilon(1 - 2\gamma - \gamma - \gamma) = (-1)^{n+1}(4\gamma - 1)\varepsilon \\ \gamma > \frac{1}{2} &\Rightarrow \left| \delta y_n^{s+k} \right| = (4\gamma - 1)^k \varepsilon, \quad 4\gamma - 1 > 1 \Rightarrow\end{aligned}$$

ошибка неограниченно возрастает, причем с уменьшением шага сетки ошибка нарастает (увеличивается число шагов).

Выводы. Чисто неявная схема является безусловно

устойчивой. Явная схема является условно

устойчивой при выполнении условия $\gamma < \frac{1}{2}$ или

$\tau < \frac{h^2}{2}$ (условие Куранта).

3) Метод прогонки.

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, & n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 y_1 + \mu_1, & y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \quad (26)$$

$$A_n \neq 0, \quad B_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (27)$$

(27) \Rightarrow

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n+1} y_{n+1} + \alpha_n \beta_{n+1} + \beta_n \quad (28)$$

(25),(27),(28) \Rightarrow

$$\begin{aligned} & (\alpha_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + B_n) y_{n+1} + \\ & + (\beta_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + \beta_n A_n + F_n) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

(29) =>

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n}$$

Прямой ход:

$$\beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

(26), (27) $n=0$ =>

$$\alpha_1 = \alpha_1, \beta_1 = \mu_1$$

(26), (27) $n=N-1$ =>

$$y_N = \frac{\mu_2 + \beta_N \alpha_2}{1 - \alpha_N \alpha_2}$$

Обратный ход:

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = N - 1, N - 2, \dots, 0$$

Достаточные условия устойчивости:

$$\begin{aligned} |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ |\alpha_\alpha| &\leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| < 2 \end{aligned} \quad (30)$$

Число арифметических операций прогонки $O(N)$.

Покажем, что (30) $\Rightarrow |\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$

Индукция: а) $|\alpha_1| = |\alpha_1| \leq 1$; б) $|\alpha_i| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| \leq 1$.

$$(30) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| - |B_i| \geq |A_i| (1 - |\alpha_i|) \geq 0 \quad (31)$$

$$B_i \neq 0, \quad (60) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > 0$$

$$(31) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| \geq |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1.$$

Покажем, что $|\alpha_i| < 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$

Если $|\alpha_1| < 1$, то $A_i \neq 0, (31) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$.

Покажем, что (30) $\Rightarrow 1 - \alpha_n \alpha_2 \neq 0$.

а) $|\alpha_2| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_N| \leq 1 \Rightarrow$
 $|1 - \alpha_N \alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\alpha_2| \geq 1 - |\alpha_2| > 0.$

б) $|\alpha_2| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_N| < 1 \Rightarrow$
 $|1 - \alpha_N \alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\alpha_2| \geq 1 - |\alpha_N| > 0.$

При $|\alpha_i| \leq 1$ **ошибка** $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ **не нарастает:**

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1} \Rightarrow \delta y_i = \alpha_{i+1} \delta y_{i+1} \Rightarrow$$

$$|\delta y_i| = |\alpha_{i+1}| |\delta y_{i+1}| \leq |\delta y_{i+1}|$$

Если $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ **возмущаются, то** $\max_{1 \leq i \leq N} |\delta y_i| \approx \varepsilon_0 N^2$,

где ε_0 **- ошибка округления.**

4) Консервативные однородные разностные схемы

Под однородными разностными схемами (ОРС) понимаются такие схемы, вид которых не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки.

Коэффициенты ОРС определяются как функционалы (шаблонные функционалы) от коэффициентов дифференциального уравнения.

Широко распространены ОРС сквозного (или непрерывного) счета.

Схемы, выражающие на сетке законы сохранения, называются консервативными или дивергентными.

Схемы, нарушающие законы сохранения, называются неконсервативными или дисбалансными.

а) Интегро-интерполяционный метод (ИИМ) – метод баланса построения консервативных разностных схем

Рассмотрим уравнение:

$$\left(k(x) u'(x) \right)' - q(x) u(x) = -f(x), \quad (32)$$

где $k(x)$ и $q(x)$ могут быть разрывными функциями.

Уравнение (32) описывает **стационарное распределение тепла в стержне.**

Введём равномерную сетку ω_h и промежуточные **поточные узлы:**

$$x_{i \pm 0,5} = x_i \pm 0,5 h.$$

Запишем закон сохранения тепла (уравнение баланса) для отрезка $[x_{i-0,5}, x_{i+0,5}]$:

$$W_{i-0,5} - W_{i+0,5} - \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) u(x) dx + \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x) dx = 0, \quad (33)$$

где $W(x) = -k(x) \frac{du}{dx}$ - тепловой поток.

Предположим, что $u = u_i = \text{const}$ при $x_{i-0,5} \leq x \leq x_{i+0,5}$.

Тогда

$$\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) u(x) dx \approx hu_i d_i,$$

где

$$d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} q(x) dx. \quad (34)$$

Проинтегрируем равенство $\frac{du}{dx} = -\frac{W}{k}$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{k(x)} dx.$$

Положим $W = W_{i-0,5} = \text{const}$ при $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Тогда

$$u_{i-1} - u_i \approx W_{i-0,5} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

или

$$W_{i-0,5} \approx -a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i}, \quad (35)$$

где

$$a_i = \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right\}^{-1} \quad (36)$$

Из формул (33) - (37) получим:

$$\frac{1}{h} \left\{ a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right\} - d_i y_i = -\varphi_i,$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x) dx \quad (37)$$

Замечание. Интегралы (34), (36) и (37) являются шаблонными функционалами.

б) Метод конечных элементов (МКЭ) – проекционно-сеточный метод

Рассмотрим краевую задачу:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (38)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (39)$$

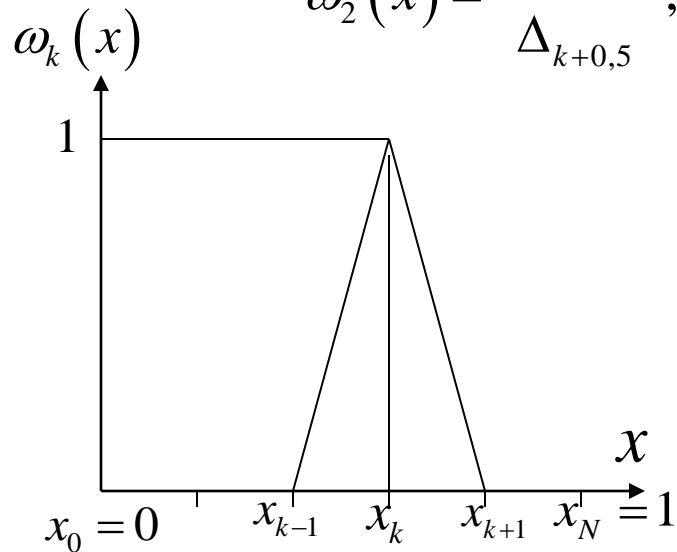
Покроем отрезок $0 \leq x \leq 1$ системой интервалов $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ и для каждого $k \geq 1$ введём функцию $\omega_k(x)$:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{k-1}, \\ \tilde{\omega}_1(x), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \tilde{\omega}_2(x), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0, & x_{k+1} \leq x \leq x_N = 1, \end{cases}$$

где

$$\tilde{\omega}_1(x) = \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_{k-0,5}}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad \Delta_{k-0,5} = x_k - x_{k-1},$$

$$\tilde{\omega}_2(x) = \frac{x_{k+1} - x}{\Delta_{k+0,5}}, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad \Delta_{k+0,5} = x_{k+1} - x_k.$$



Система функций $\{\omega_k(x)\}$ полна в том смысле, что любую непрерывную функцию $\varphi(x)$ с возможными изломами в узловых точках $\{x_k\}$ и обращающуюся в нуль в граничных точках отрезка $[0, 1]$ можно представить в виде линейной комбинации функций $\{\omega_k(x)\}$: $\varphi(x) = \sum_k \varphi_k \omega_k$, где в качестве коэффициентов стоят значения самой функции $\varphi(x)$ в точках x_k : $\varphi_k = \varphi(x_k)$.

Система $\{\omega_k(x)\}$ обладает также некоторым аналогом свойства ортогональности:

$$(\omega_k, \omega_n) = \int_0^1 \omega_k(x) \omega_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \leq k-2, \\ \frac{1}{6} \Delta_{k-0,5}, & n = k-1, \\ \frac{1}{3} (\Delta_{k-0,5} + \Delta_{k+0,5}), & n = k, \\ \frac{1}{6} \Delta_{k+0,5}, & n = k+1, \\ 0, & n \geq k+2. \end{cases}$$

Умножим (38) на $\omega_k(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u - f(x) \right\} \omega_k(x) dx = 0. \quad (40)$$

Проинтегрируем формулу (40) по частям с учетом граничных условий (39):

$$\int_0^1 \left\{ p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q(x)u - f(x)) \omega_k \right\} dx = 0 \quad (41)$$

Представим интеграл (41) в виде суммы интегралов:

$$\sum_k \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \left\{ p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} + (q(x)u - f(x)) \omega_k \right\} dx = 0.$$

Ищем решение задачи (38)-(39) в виде разложения по системе $\{\omega_k(x)\}$:

$$u(x) = \sum_k u_k \omega_k(x). \quad (42)$$

Учитывая вид функций $\omega_k(x)$, получим:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx = \frac{P_{k-0,5}}{\Delta_{k-0,5}} (u_k - u_{k-1}),$$

$$\begin{aligned}
& \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) \frac{du}{dx} \frac{d\omega_k}{dx} dx = -\frac{p_{k+0,5}}{\Delta_{k+0,5}} (u_{k+1} - u_k), \\
& \int_{x_{k-1}}^{x_k} q(x) u \omega_k dx = q_{k-0,5}^{1,2} u_{k-1} + q_{k-0,5}^{1,1} u_k, \\
& \int_{x_k}^{x_{k+1}} q(x) u \omega_k dx = q_{k+0,5}^{2,2} u_k + q_{k+0,5}^{1,2} u_{k+1},
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$p_{k+0,5} = \frac{1}{\Delta_{k+0,5}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx,$$

$$q_{k+0,5}^{i,j} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_i(x) \omega_j(x) q(x) dx, \quad i, j = 1, 2. \tag{44}$$

Учитывая формулы (41), (43), (44), построим разностную схему:

$$\frac{P_{k-0,5}}{\Delta_{k-0,5}} (u_k - u_{k-1}) - \frac{P_{k+0,5}}{\Delta_{k+0,5}} (u_{k+1} - u_k) + \\ + q_{k-0,5}^{1,2} u_{k-1} + (q_{k-0,5}^{1,1} + q_{k+0,5}^{2,2}) u_k + q_{k+0,5}^{1,2} u_{k+1} = F_k,$$

где

$$F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \tilde{\omega}_1 dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \tilde{\omega}_2 dx = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) \omega_k(x) dx. \quad (45)$$

К уравнениям (45) следует добавить граничные условия:

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0.$$

5) Экономические разностные схемы

Схемы, применяемые для решения многомерных задач и сочетающие в себе достоинства явных и неявных схем, называются экономическими.

Экономическая разностная схема:

- 1) является безусловно устойчивой;
- 2) требует при переходе со слоя на слой числа арифметических операций, пропорционального числу узлов сетки.

1) Схема переменных направлений

Основной идеей построения экономических разностных схем является сведение многомерной задачи к цепочке одномерных задач. Одной из первых экономических схем является построенная в 1955 году Писменом и Рэкфордом схема переменных направлений (продольно-поперечная схема).

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (46)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (47)$$

$$u(x, t) = \mu(x), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T], \quad (48)$$

$$Lu \equiv \Delta u = L_1 u + L_2 u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha; \alpha = 1, 2\}, \quad Q_T \equiv D \times (0, T], \quad x = (x_1, x_2).$$

Введем двумерную пространственную сетку и одномерную временную сетки:

$$\bar{\omega}_h \equiv \bar{\omega}_{h_1 h_2} = \omega_h + \gamma_h \equiv \left\{ (x_{n_1}, x_{n_2}) \in \bar{D}; 0 \leq n_\alpha \leq N_\alpha; \alpha = 1, 2 \right\},$$

$$t = t_{s+\frac{1}{2}} = t_s + 0,5\tau; \quad \bar{y} = y^{s+\frac{1}{2}}, \quad \varphi^s = f(x_n, t^s).$$

Заменяем дифференциальные операторы конечно-разностными:

$$Lu \rightarrow \Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Схема Писмена-Рэкфорда осуществляет переход со слоя s на слой $s+1$ в два шага, используя промежуточный (дробный) слой:

$$\frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s + \varphi^s, \quad (49)$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^{s+1} + \varphi^s, \quad (50)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (51)$$

$$y^{s+1} = \mu, \quad n_2 = 0, \quad n_2 = N_2, \quad (52)$$

$$y^{s+\frac{1}{2}} = \mu, \quad n_1 = 0, \quad n_1 = N_1. \quad (53)$$

Уравнение (49) является неявным по первому направлению и явным по второму, а уравнение (50) является явным по первому направлению и неявным по второму. Из (49) и (50) получаем:

$$\frac{2}{\tau} \bar{y} - \Lambda_1 \bar{y} = F, \quad F = \frac{2}{\tau} y + \Lambda_2 y + \varphi, \quad (54)$$

$$\frac{2}{\tau} \hat{y} - \Lambda_2 \hat{y} = \bar{F}, \quad \bar{F} = \frac{2}{\tau} \bar{y} + \Lambda_1 \bar{y} + \varphi. \quad (55)$$

$$\frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{n_1-1} - 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{\tau} \right) \bar{y}_{n_1} + \frac{1}{h_1^2} \bar{y}_{n_1+1} = -F_{n_1}, \quad n_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad (56)$$

$$\bar{y}_{n_1} = \mu_{n_1}, \quad n_1 = 0, \quad n_1 = N_1, \quad (57)$$

$$\frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{n_2-1} - 2 \left(\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{\tau} \right) \hat{y}_{n_2} + \frac{1}{h_2^2} \hat{y}_{n_2+1} = -\bar{F}_{n_2}, \quad n_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad (58)$$

$$\hat{y}_{n_2} = \mu_{n_2}, \quad n_2 = 0, \quad n_2 = N_2, \quad (59)$$

$$x_n = (n_1 h_1, n_2 h_2), \quad F = F_{n_1 n_2}, \quad y = y_{n_1 n_2}.$$

Замечание 1. В формулах (56)-(59) пишется только изменяющийся индекс и не пишется фиксированный индекс.

Формулы (56)-(57) описывают прогонки вдоль каждой строки при $n_2 = 1, \dots, N_2 - 1$. Так как каждая прогонка вдоль строки требует $\underline{\underline{O}}(N_1)$ арифметических операций, то общее число арифметических операций при выполнении прогонок вдоль строк равно $\underline{\underline{O}}(N_1 N_2)$. Аналогично прогонка вдоль столбцов при каждом $n_1 = \bar{1}, \dots, N_1 - 1$ требует $\underline{\underline{O}}(N_2)$ операций, а полное число операций при выполнении всех прогонок вдоль столбцов равно $\underline{\underline{O}}(N_1 N_2)$.

Счет по схеме переменных направлений требует числа арифметических операций $\underline{\underline{O}}(N_1 N_2)$ пропорционального числу узлов сетки и на каждый узел сетки приходится число операций, не зависящее от числа узлов. Так как можно доказать безусловную устойчивость схемы переменных направлений, то она является экономичной разностной схемой.

Многомерные схемы можно построить, вводя понятие суммарной аппроксимации (ЛОС – локально-одномерные схемы).

Замечание 2. Схему переменных направлений нельзя обобщить на трехмерный случай: формально написанная схема уже не будет устойчивой:

$$\frac{y^{s+\frac{1}{3}} - y^s}{\frac{1}{3}\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 y^s + \Lambda_3 y^s + \varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+\frac{2}{3}} - y^{s+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 y^{s+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 y^s + \varphi^s,$$

$$\frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \Lambda_2 y^{s+\frac{2}{3}} + \Lambda_3 y^{s+1} + \varphi^s.$$

К написанным уравнениям нужно добавить начальные и граничные условия.

Качественно накопление ошибки трехмерной схемы переменных направлений можно пояснить следующим образом.

В первом уравнении разностная схема является неявной по первому направлению и явной по второму и третьему направлениям, во втором – неявная по второму направлению и явная по первому и третьему, а в третьем уравнении – неявная по третьему направлению и явная по первому и второму. Таким образом, в каждом из уравнений схема оказывается неявной по одному направлению и явной по двум. Если учесть что по явному направлению ошибка накапливается, а по неявному отрабатывается (уменьшается). то в результате за каждый цикл ошибка шесть раз накапливается и только три раза отрабатывается, что приводит к накоплению ошибки. В схеме Письмена-Рекфорда ошибка за цикл сбалансированно два раза накапливается и два раза отрабатывается, что приводит к устойчивости схемы.

2) Локально-одномерные схемы (ЛОС). Понятие суммарной аппроксимации

Общим методом построения экономичных разностных схем, пригодных для уравнений с переменными σ даже с разрывными коэффициентами, для квазилинейных нестационарных уравнений в случае произвольной области любого числа измерений, является **метод суммарной аппроксимации**.

Отказ от понятия аппроксимации и замена его более слабым **условием суммарной аппроксимации** расширяет класс задач и приводит к аддитивным схемам.

Основную роль при построении ЛОС играет возможность построения цепочки одномерных задач, то есть представления оператора исходной задачи в виде суммы одномерных операторов: $L = L_1 + L_2 + \dots + L_p$.

Аддитивные схемы имеют две основные черты:

1) переход от слоя S на слой $S+1$ осуществляется при помощи обычных (двухслойных, трехслойных и т.д. схем);

2) погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем (аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией).

Каждая из промежуточных схем цепочки уравнений может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок.

Построение цепочки одномерных задач. Пусть рассматривается начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t \in (0, T]; \quad \bar{G} = G + \Gamma;$$
$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}; \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T]. \quad (60)$$

Запишем ее уравнение в следующем виде

$$\sum_{\alpha=1}^p P_{\alpha} u = 0, \quad P_{\alpha} u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_{\alpha} u - f_{\alpha},$$

где $f_{\alpha}(x, t)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) –

произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, t)$ и удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На отрезке $0 \leq t \leq T$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_s = s\tau, s = 0, 1, \dots, S\}.$$

Каждый интервал разобьем на p частей, введя полуинтервалы Δ_α

и точки

$$\Delta_\alpha : t_{s+\frac{\alpha-1}{p}} < t \leq t_{s+\frac{\alpha}{p}}, \quad t_{s+\frac{\alpha}{p}} = t_s + \frac{\alpha\tau}{p}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1.$$

Будем последовательно решать уравнение задачи (60):

$$P_\alpha v_{(\alpha)}(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (61)$$

$$v_{(1)}(x, 0) = u_0(x), \quad v_{(\alpha)}(x, t_{s+\frac{\alpha-1}{p}}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{s+\frac{\alpha-1}{p}}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p,$$

$$v(x, t_{s+1}) = v_{(p)}(x, t_{s+1}). \quad (62)$$

Решением этой задачи назовем значение

$$v(x, t_s) = v_{(p)}(x, t_s), \quad s = 0, 1, \dots, S.$$

Каждое из уравнений $P_\alpha v_\alpha = 0$ или

$$\frac{1}{p} \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p.$$

заменяется разностной схемой $\Pi_\alpha y_\alpha = 0, \alpha = 1, 2, \dots, p,$

где Π_α -разностные операторы, аппроксимирующие операторы P_α .

В простейшем случае это двухслойная схема, связывающая значения

$$y_{(\alpha)} = y^{s + \frac{\alpha}{p}} \quad \text{и} \quad y_{(\alpha-1)} = y^{s + \frac{\alpha-1}{p}} .$$

"

Для решения задачи (46)-(48) в трехмерном случае локально-одномерную схему можно записать, например, в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{y^{s+\frac{1}{3}} - y^s}{\tau} &= \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \varphi^s, \\ \frac{y^{s+\frac{2}{3}} - y^{s+\frac{1}{3}}}{\tau} &= \Lambda_2 y^{s+\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \varphi^s, \\ \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{2}{3}}}{\tau} &= \Lambda_3 y^{s+1} + \frac{1}{3} \varphi^s. \end{aligned} \tag{63}$$

К уравнениям (63) следует добавить начальное и граничные условия. Полученная схема суммарно аппроксимирует исходную задачу с порядком $\underline{O}(\tau + |h|^2)$, где $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$.

Примеры.

1) Схема Писмена-Рекфорда как аддитивная схема.

Уравнения (49)-(50) эквивалентны ЛОС следующего вида:

$$\frac{y^{s+\frac{1}{4}} - y^s}{\tau} = 0.5\Lambda_2 y^s + 0.5\varphi^s; \quad \frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^{s+\frac{1}{4}}}{\tau} = 0.5\Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}};$$
$$\frac{y^{s+\frac{3}{4}} - y^{s+\frac{1}{2}}}{\tau} = 0.5\Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}}; \quad \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{3}{4}}}{\tau} = 0.5\Lambda_2 y^{s+1} + 0.5\varphi^s.$$

$$\underline{\underline{Q}}(\tau^2 + |h|^2).$$

Схема обладает суммарной аппроксимацией

2) Схема Дугласа-Рекфорда

$$\frac{y^{s+\frac{1}{2}} - y^s}{\tau} = \Lambda_1 y^{s+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 y^s; \quad \frac{y^{s+1} - y^{s+\frac{1}{2}}}{\tau} = \Lambda_2 (y^{s+1} - y^s)$$

обладает суммарной аппроксимацией $\underline{O}(\tau + |h|^2)$.

2. Метод разделения переменных (метод Фурье)

Основные идеи метода разделения переменных мы изложим на примере начально-краевой задачи, моделирующей малые продольные колебания упругого свободного стержня с закрепленными концами.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Предположим, что решение поставленной задачи существует. Будем искать его в виде суперпозиции решений $w(x, t)$ вспомогательных задач:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx}, & x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ w(x, t) = X(x)T(t), \\ w(x, t) \neq 0, & x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Заметим, что в полученной постановке нет начальных условий, но решения имеют специальный вид:

$$w(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставим решения $w(x, t)$ в исходное уравнение и разделим переменные:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0, l), \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases}$$

Для функции $X(x)$ мы получили задачу на собственные значения или задачу Штурма-Лиувилля.

Задача штурма-Лиувилля. Найти те значения параметра λ , при которых существует решение поставленной задачи, и сами эти решения.

Решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x,$$

где A, B — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий:

$$X(0) = A = 0, \quad X(l) = B \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi n \Rightarrow \lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Мы получили дискретный набор собственных значений λ_n и собственных функций $X_n(x)$:

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для временной функции получим уравнение:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$T_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{\pi a n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

где a_n , b_n — произвольные постоянные.

Частные решения имеют вид:

$$w_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \right) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение исходной задачи записываем в виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Построенная таким образом функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям и при условии сходимости соответствующих рядов однородному уравнению колебаний.

Постоянные a_n , b_n определим из начальных условий:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x).$$

Умножим обе части на $\sin \frac{\pi k x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$ и проинтегрируем по x от 0 до l .

Учтем, что

$$\int_0^l \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{l}{2}, & n = k. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

где φ_k — коэффициент Фурье в разложении функции $\varphi(x)$ на отрезке от 0 до l по

системе синусов $\left\{ \sin \frac{\pi kx}{l} \right\}_{k=1,2,\dots}$

Предположим, что ряд для функции $u(x, t)$ можно почленно дифференцировать один раз по времени. Продифференцировав ряд один раз по t и положив $t = 0$, получим:

$$b_k = \frac{2}{l\omega_k} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx = \frac{1}{\omega_k} \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, мы формально построили решение исходной задачи. Далее будет доказана теорема существования классического решения исходной задачи, то есть показано, при каких условиях, налагаемых на входные данные – функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, построенное методом Фурье решение будет являться классическим решением исходной задачи.

3. Обоснование детерминированных математических моделей

Для того, чтобы обосновать детерминированную математическую модель, представляющую собой начально-краевую или краевую задачу для уравнений в частных производных второго порядка, необходимо доказать три теоремы: теорему единственности решения, теорему существования решения и теорему устойчивости решения. Мы докажем эти три теоремы для простейшей начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке, тем самым проведя полное обоснование математической модели, описывающей одномерные колебательные процессы: малые продольные колебания упругого стержня, малые поперечные колебания упругой струны и т.д.

1) Единственность решения

Для доказательства единственности решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке используем энергетический метод и метод доказательства от противного.

Теорема 1. Классическое решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке единственно.

Доказательство

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ - два решения рассматриваемой задачи, причем $u_1 \neq u_2$.

Рассмотрим функцию $v = u_1 - u_2$. В силу линейности исходной задачи для функции

$v(x, t)$ получим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & x \in (0, l), \quad t \in (0, \infty), \\ v(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ v_t(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho(x) v_t^2 + k(x) v_x^2) dx, \quad \rho(x) > 0, \quad k(x) > 0.$$

Функция $E(t)$ представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии упругого стержня (для определенности мы будем рассматривать колебания упругого стержня).

Найдем производную функции $E(t)$:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (\rho(x)v_t v_{tt} + k(x)v_x v_{xt}) dx.$$

Преобразуем второе слагаемое под интегралом, используя формулу интегрирования по

частям:
$$\int_0^l k(x)v_x v_{xt} dx = k(x)v_x v_t \Big|_0^l - \int_0^l v_t (k(x)v_x)_x dx = - \int_0^l v_t (k(x)v_x)_x dx$$

поскольку $v(0,t) = v(l,t) = 0 \Rightarrow v_t(0,t) = v_t(l,t) = 0$. Таким образом имеем:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l v_t (\rho(x)v_{tt} - (k(x)v_x)_x) dx = 0.$$

Следовательно,

$$E(t) = \bar{C} = \text{const.}$$

Из начальных условий следует, что

$$E(0) = \bar{C} = 0 \Rightarrow E(t) = 0, \quad t \in [0, \infty).$$

Отсюда вытекает, что $v_t(x, t) = 0$, $v_x(x, t) = 0$ и $v(x, t) = \bar{\bar{C}} = \text{const}$. Из начального условия следует, что

$$\bar{\bar{C}} = 0 \Rightarrow v(x, t) = 0 \Rightarrow u_1(x, t) = u_2(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, \infty).$$

Таким образом, мы пришли к противоречию: предположив, что функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ не равны друг другу, мы доказали, что они тождественно совпадают. Единственность решения начально –краевой задачи доказана.

2) **Существование решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке**

Мы построили решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке методом разделения переменных (методом Фурье). Для доказательства существования классического решения надо установить, что полученное формальное решение в виде ряда Фурье с коэффициентами, определенными через начальные условия, при соответствующих условиях, накладываемых на начальные данные, действительно представляет собой классическое решение.

Для исследования этой проблемы весьма полезен так называемый **обобщенный принцип суперпозиции**, который по существу очень компактно выражает основное содержание метода разделения переменных

Обобщенный принцип суперпозиции. Если $w_n(x, t)$ — частные решения линейного однородного дифференциального уравнения и все дифференциальные операции, входящие в это уравнение, над функцией $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t)$ можно вычислять путем почленного дифференцирования ряда, то $u(x, t)$ является решением этого уравнения.

Таким образом, необходимо проверить, позволяют ли условия, накладываемые на входные данные задачи, применить обобщенный принцип суперпозиции. Этот вопрос связан с изучением систем собственных функций, полученных как решение задачи Штурма-Лиувилля, по которым раскладывается решение исходной задачи. Поскольку в нашем случае при решении задачи на отрезке разложение происходит по тригонометрической системе функций $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$, то необходимо использовать свойства рядов Фурье.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$ -я производная кусочно-непрерывная, то числовой ряд,

$$\sum_{m=1}^{\infty} n^k (|a_n| + |b_n|),$$

где a_n и b_n - коэффициенты Фурье функции $F(x)$, сходится.

Если речь идет о разложении в ряд по системе $\left\{ \sin \frac{\pi n x}{l} \right\}$ функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[0, l]$, то надо, чтобы изложенные требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при нечетном продолжении $f(x)$ на отрезок $[-l, 0]$.

В частности, для непрерывности необходимо, чтобы $f(0) = 0$, а для периодичности с периодом $2l$ необходимо, чтобы $f(l) = 0$.

Непрерывность первой (как и любой нечетной производной) при $x = 0$ и $x = l$ при нечетном продолжении получается автоматически. Для непрерывности четных производных продолженной функции нужно потребовать, чтобы

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(l) = 0 \quad (k = 0, 2, 4, \dots, 2n).$$

Теорема 2. Если начальные функции начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке $[0, l]$ удовлетворяют условиям: $\varphi(x) \in C^{(2)}[0, l]$ и $\varphi'''(x)$ – кусочно-непрерывная на отрезке $[0, l]$; $\psi(x) \in C^{(1)}[0, l]$ и $\psi''(x)$ – кусочно-непрерывна на отрезке $[0, l]$; $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, то существует классическое решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке $[0, l]$, представляемое формулой

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \omega_n = \frac{\pi n a}{l}$$

с коэффициентами

$$a_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\omega_n} \psi_n = \frac{2}{l \omega_n} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Доказательство

Необходимо доказать:

1) Непрерывность функции $u(x, t)$ в замкнутой области $[0, l] \times [0, T]$, откуда будет следовать непрерывное примыкание функции $u(x, t)$ к первому начальному условию и к граничным условиям.

Так как

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

и функции $u_n(x, t)$ непрерывны в области $[0, l] \times [0, T]$, то достаточно доказать равномерную сходимость функционального ряда в данной области, то есть сходимость мажорантного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

2) Непрерывность функции $u_t(x, t)$ в замкнутой области $[0, l] \times [0, T]$, откуда будет следовать непрерывное примыкание данной функции ко второму начальному условию.

Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда, полученного в результате формального почленного дифференцирование ряда $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ по переменной t :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} (-a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Мажорантным рядом, для данного числового ряда является ряд:

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|a_n| + |b_n|).$$

3) Применимость обобщенного принципа суперпозиции в области $(0, l) \times (0, T]$, откуда будет следовать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению колебаний в данной области, для чего нужно доказать равномерную сходимость рядов, полученных двукратным почленным дифференцированием ряда $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ по t и по x :

$$-a^2 \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos \omega_n t + \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$
$$-\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n \cos \omega_n t + \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Этим рядам с точностью до множителей соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|a_n| + |b_n|).$$

Поскольку $a_n = \varphi_n$ и $b_n = \frac{1}{\omega_n} \psi_n = \frac{l}{\pi a n} \psi_n$, то для обоснования 1) – 3) нужно доказать сходимость мажорантных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \quad (k = 0, 1, 2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1).$$

Условие теоремы обеспечивает сходимость всех мажорантных рядов, что и доказывает теорему.

3) Устойчивость решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний

Рассмотрим начально-краевую задачу, моделирующую процесс малых продольных колебаний однородного упругого стержня под действием внешней силы:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), & x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение $(f, g) = \int_0^l f(x)g(x)dx$ и порожденную им норму

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Теорема 3. Классическое решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний на отрезке $[0, l]$ устойчиво по правой части и начальным данным.

Доказательство

Составим интеграл энергии

$$J^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx.$$

Продифференцируем интеграл

$$2JJ' = \int_0^l (u_t u_{tt} + a^2 u_x u_{xt}) dx.$$

Второе слагаемое под интегралом преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям, учитывая граничные условия:

$$\int_0^l a^2 u_x u_{xt} dx = a^2 u_x u_t \Big|_0^l - a^2 \int_0^l u_t u_{xx} dx = -a^2 \int_0^l u_t u_{xx} dx.$$

Отсюда получаем

$$2JJ' = \int_0^l (u_t u_{tt} - a^2 u_t u_{xx}) dx = \int_0^l u_t (u_{tt} - a^2 u_{xx}) dx = \int_0^l u_t f(x, t) dx.$$

Имеет место неравенство Коши-Буняковского

$$(f, g) = \int_0^l f(x) g(x) dx \leq \left(\int_0^l f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$2JJ' \leq \left(\int_0^l u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_t\| \|f\|.$$

Поскольку

$$\|u_t\|^2 = \int_0^l u_t^2 dx \leq \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_x^2) dx = 2J^2,$$

то

$$\|u_t\| \leq \sqrt{2}J.$$

Отсюда получаем

$$J' \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|.$$

Проинтегрируем последнее неравенство

$$J(t) \leq J(0) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau,$$

откуда получаем

$$\|u_t\| \leq \sqrt{2}J(0) + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau.$$

Рассмотрим квадрат нормы

$$\|u\|^2 = \int_0^l u^2(x, t) dx.$$

Продифференцируем последнюю формулу по t и используем неравенство Коши-Буняковского:

$$\|u\| \frac{d}{dt} \|u\| = \int_0^l uu_t dx \leq \left(\int_0^l u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\| \|u_t\|.$$

Отсюда получим:

$$\frac{d}{dt} \|u\| \leq \|u_t\| \leq \sqrt{2}J(0) + \int_0^t \|f(\tau)\| d\tau$$

и после интегрирования

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| + \sqrt{2}J(0)t + \int_0^t \int_0^{t_1} \|f(\tau)\| d\tau dt_1.$$

Интеграл в последней формуле можно оценить так:

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \|f(\tau)\| d\tau dt_1 \leq \max \|f\| \int_0^t \int_0^{t_1} d\tau dt_1 = \max \|f\| \frac{t^2}{2} \leq \max \|f\| \frac{T^2}{2},$$
$$\max \|f\| = \max \|f(\tau)\|, \quad \tau \in [0, T].$$

Оценим величину $J(0)$:

$$J^2(0) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2(x, 0) + a^2 u_x^2(x, 0)) dx = \frac{1}{2} \|u_t(x, 0)\|^2 + \frac{a^2}{2} \|u_x(x, 0)\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \|\psi(x)\|^2 + \frac{a^2}{2} \|\varphi'(x)\|^2 \leq \frac{1}{2} (\|\psi(x)\| + a \|\varphi'(x)\|)^2.$$

Итак,

$$J(0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\|\psi(x)\| + a\|\varphi'\|).$$

Пусть $t \in [0, T]$. Тогда окончательная оценка будет иметь следующий вид:

$$\|u(x, t)\| \leq \|\varphi(x)\| + (\|\psi(x)\| + a\|\varphi'(x)\|)T + \frac{T^2}{2} \max \|f\|.$$

Последняя оценка доказывает теорему, поскольку из этой оценки следует, что малому изменению входных данных – функций $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$ – соответствует малое изменение решения.