

## Вопросы к коллоквиуму по курсу “Методы математической физики”

(2015 год, первый поток)

В билете 5 вопросов, по одному из каждого раздела. Разделы отделены чертой.

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$ , в особых точках. Как она доказывается?
  2. Напишите уравнение Бесселя, его фундаментальные системы решений. Дайте определение функций, входящих в эти системы решений, приведите графики функций Бесселя и Неймана.
  3. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
  4. Дайте определение функций Ханкеля и Неймана. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и функций Ханкеля первого и второго рода. Как связаны между собой эти функции? Приведите график функции Неймана нулевого порядка. Могут ли функции Ханкеля иметь вещественные нули?
- 
5. Напишите асимптотические формулы при больших и малых значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Покажите, что все нули функции Бесселя, кроме, быть может,  $x=0$ , простые.
  6. Дайте определение собственных функций круга. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.
  7. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Приведите фундаментальную систему решений этого уравнения. Дайте определение функции Инфельда и Макдональда, приведите их графики. Укажите поведение этих функций при больших и малых значениях аргумента.
  8. Какие из цилиндрических функций образуют пары линейно-независимых решений уравнения Бесселя? Напишите выражения для определителя Вронского для функций Бесселя положительного и отрицательного порядков, для функций Бесселя и Неймана, для функций Бесселя и Ханкеля.
- 
9. Дайте определение классических ортогональных полиномов. Напишите уравнение, которому удовлетворяют эти функции. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов. Образуют ли производные КОП систему КОП, если да, то с каким весом? Откуда это следует?
  10. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках. Напишите формулу для собственных значений этой задачи. Как получают эту формулу?
  11. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига). Приведите формулу Родрига для полиномов Лежандра. С ее помощью постройте полиномы Лежандра  $P_0$  и  $P_1$ .
  12. Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
  13. Дайте определение полиномов Лагерра и полиномов Эрмита. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются. Приведите формулу Родрига. Напишите

- выражения для квадрата нормы.
14. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите для нее общую формулу. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита.

---

  15. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра и выражение для квадрата нормы.
  16. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для этих функций. Напишите условие ортогональности для сферических функций. Приведите выражение квадрата нормы. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости в ряд по сферическим функциям. Дайте определение шаровых функций.
  17. Дайте определение собственных функций шара. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.

---

  18. Дайте определение полного нормированного пространства. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о пополнении нормированного пространства.
  19. Дайте определение линейного множества (линеала). Дайте определение множества, плотного в нормированном пространстве. Приведите примеры.
  20. Дайте определение полной ортогональной системы функций в пространстве Лебега. Приведите примеры полных систем.
  21. Дайте определение замкнутой ортогональной системы в пространстве Лебега. Приведите примеры.
  22. Как строится пространство Лебега  $L_2(D)$ ?
  23. Как строится пространство Соболева  $W_2^1(D)$ ?
-