## ЛЕКЦИЯ 3

## Теорема о непродолжаемом решении задачи Коши для неавтономного уравнения с ограниченно липшиц-непрерывной правой частью

В данной лекции будет доказана теорема о существовании, единственности и свойстве непродолжаемости решения абстрактного дифференциального уравнения $y' = A(t, y)$.

### § 7. Теорема о непродолжаемом решении задачи Коши

Пусть $B$ — банахово пространство с нормой $\|.\|$. Рассмотрим также метрическое пространство $\mathbb{R}_+ \times B$ с расстоянием

$$\rho\big((t_1, y_1), (t_2, y_2)\big) = \max(|t_1 - t_2|, \|y_1 - y_2\|). \tag{1}$$

Пусть отображение

$$A(t, y) : \mathbb{R}_+ \times B \to B$$

обладает свойствами $(A_1)$ и $(A_2)$:

$(A_1)$ оно непрерывно в смысле метрики (1) (т. е. «по совокупности переменных»);

$(A_2)$ существует такая функция

$$\mu(t, s) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+,$$

*ограниченная на каждом прямоугольнике* $[0; T] \times [0; S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0;\ \forall z_1, z_2 \in B\ \ \|A(t, z_1) - A(t, z_2)\| \leqslant \mu(t, \max(\|z_1\|, \|z_2\|))\|z_1 - z_2\|.$$

*Замечание 1.* Функции $A(t, y)$, удовлетворяющие условию $(A_2)$ (как частный случай, они могут вообще не зависеть от $t$), будем называть *ограниченно липшиц-непрерывными.* Смысл названия: они липшиц-непрерывны в каждой ограниченной части пространства $B$ (при этом константа Липшица зависит от $t$ и ограничена конечной величиной, если $t$ изменяется на ограниченном множестве).

Сразу отметим, что из $(A_1)$ вытекает свойство $(A_3)$:

$(A_3)$ функция $\nu(t) \equiv \|A(t, \theta)\|$ (где $\theta$ — нулевой элемент пространства $B$) ограничена на каждом отрезке $[0; T]$. Действительно, в силу $(A_1)$ числовая функция $\|A(t, \theta)\|$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$.

Далее, из $(A_2)$ и $(A_3)$ следует свойство

$(A_4)$ существует такая функция

$$\lambda(t, s) : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+,$$

*ограниченная на каждом прямоугольнике* $[0; T] \times [0; S]$ $(T, S > 0)$, что

$$\forall t \geqslant 0;\ \forall z \in B \ \ \|A(t,z)\| \leqslant \lambda(t, \|z\|).$$

Действительно, имеем

$$\|A(t,z)\| \leqslant \|A(t,\theta)\| + \|A(t,z) - A(t,\theta)\| \leqslant \nu(t) + \mu(t, \|z\|)\|z\| =: \lambda(t, \|z\|)$$

(т. е. $\lambda(t,s) = \nu(t) + s\mu(s)$), причём

$$\sup_{\substack{t \in [0;T] \\ s \in [0;S]}} \lambda(t,s) \leqslant \sup_{t \in [0;T]} \nu(t) + S \sup_{\substack{t \in [0;T] \\ s \in [0;S]}} \mu(t,s).$$

Докажем теперь одну простую, но важную лемму.

**Лемма 1.** Пусть $y(t) \in C([a;b], B)$, $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$. Тогда сложная функция $f(t) \equiv A(t, y(t))$ (где $A$ — введённое выше отображение) непрерывна: $f(t) \in C([a;b], B)$.

*Доказательство.* Заметим, что отображение $F : t \mapsto (t, y(t))$, действующее из $[a;b]$ в $\mathbb{R}_+ \times B$ с метрикой (1), непрерывно. В самом деле, при $t \to t_0$ имеем $\|y(t) - y(t_0)\| \to 0$ и, следовательно,

$$\max(|t - t_0|, \|y(t) - y(t_0)\|) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Но тогда функция $f(t)$ непрерывна как композиция непрерывных отображений

$$t \overset{F}{\mapsto} (t, y(t)) \overset{A}{\mapsto} A(t, y(t)).$$

(Мы воспользовались свойством $(A_1)$.) ▲

Рассмотрим теперь в пространстве $B$ *абстрактную задачу Коши*

$$\begin{cases} y'(t) = A(t,y), \quad t \geqslant 0; \\ y(0) = y_{00}; \quad y_{00} \in B. \end{cases} \tag{2}$$

Наряду с ней рассмотрим задачу Коши с начальным условием в произвольный момент времени $t_0 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} y'(t) = A(t,y), \quad t \geqslant t_0; \\ y(t_0) = y_0; \quad y_0 \in B, \quad t_0 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, (2) — частный случай (3).

**Определение 1.** Пусть

$$\mathcal{T} = [t_0; T), \quad t_0 < T \leqslant +\infty, \quad \text{или} \quad \mathcal{T} = [t_0; T], \quad t_0 < T < +\infty.$$

*Решением задачи Коши* (3) *на промежутке* $\mathcal{T}$ будем называть всякую абстрактную функцию

$$y(t) \in C^1(\mathcal{T}, B),$$

удовлетворяющую

1) начальному условию $y(t_0) = y_0$;

2) при каждом $t \in \mathcal{T}$ уравнению $y'(t) = A(t, y(t))$, где дифференцирование понимается в смысле сильной производной в пространстве $B$, причём в граничных точках промежутка $\mathcal{T}$, принадлежащих ему, подразумевается односторонняя производная.

*Замечание 2.* Если $z(t)$ — решение задачи Коши (2) на промежутке $\mathcal{T} = [0, T]$ (или $\mathcal{T} = [0, T)$), то ограничение функции $z(t)$ на любой промежуток $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1] \subset \mathcal{T}$ (или $\mathcal{T}_1 = [t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$) есть решение задачи Коши (3) с $y_0 = z(t_0)$ на промежутке $\mathcal{T}_1$. (Очевидно.)

**Определение 2.** Решение $y_1(t) \in C^1(\mathcal{T}_1, B)$ задачи Коши (2) на промежутке $\mathcal{T}_1$ будем называть *непродолжаемым*, если не существует решения $y_2(t) \in C^1(\mathcal{T}_2, B)$ на промежутке $\mathcal{T}_2$ той же задачи, удовлетворяющего условиям

1) $\mathcal{T}_2 \supsetneq \mathcal{T}_1$;

2) $\forall t \in \mathcal{T}_1 \ y_2(t) = y_1(t)$.

Нам потребуется ряд предварительных результатов.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{4}$$

**Определение 3.** *Решением интегрального уравнения* (4) *на промежутке* $[t_0, t_0+T]$ назовём функцию

$$y(t) \in C([t_0, t_0 + T]; B), \tag{5}$$

удовлетворяющую при каждом $t \in [t_0, t_0 + T]$ уравнению (4), где интеграл понимается в смысле Римана (см. лекцию 1).

*Замечание 3.* Как следует из леммы 1, при условии (5) имеем $A(t, y(t)) \in C([t_0, t_0 + T], B)$, а поэтому в силу результатов лекции 1 интеграл в (4) существует при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$.

**Лемма 2.** Для всех $T > 0$ эквивалентны следующие утверждения:

(diff) $y(t) \in C^1([t_0, t_0 + T], B)$ и $y(t)$ — решение задачи Коши (3) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$;

(int) $y(t) \in C([t_0, t_0 + T], B)$ и $y(t)$ — решение интегрального уравнения (4) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$.

*Доказательство.*

1) (diff) $\Rightarrow$ (int). Очевидно, $C^1([t_0, t_0 + T], B) \subset C([t_0, t_0 + T], B)$. Далее, правая часть уравнения $y'(t) = A(t, y(t))$ непрерывна (поскольку непрерывна $y'(t)$), а поэтому при всех $t \in [0; T]$ существует интеграл

$$\int_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau. \tag{6}$$

Интегрируя обе части уравнения $y'(t) = A(t, y(t))$ от $t_0$ до $t$, в силу формулы Ньютона—Лейбница (см. лекцию 1) и начального условия $y(t_0) = y_0$ получаем:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] \ \ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} A(\tau, y(\tau))\, d\tau,$$

что и требовалось.

2) (int) $\Rightarrow$ (diff). В силу леммы 1 и непрерывности функции $y(t)$ подынтегральная функция в (4) непрерывна, а поэтому интеграл (6) при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ существует и допускает дифференцирование по верхнему пределу. Но тогда из (4) получаем: $y(t) \in C^1([0;T], B)$, $y'(t) = A(t, y(t))$ при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $y(t_0) = y_0$, что и требовалось. ▲

Значение леммы 2 в том, что вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши (3) (или (2)) на конечном отрезке сводится к аналогичному вопросу для интегрального уравнения (4).

Как нетрудно доказать (см. задачу 1), линейное пространство

$$\mathbb{B}_{t_0,T} \equiv C([t_0, t_0 + T], B)$$

является банаховым относительно нормы

$$\|y\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}} = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \|y(t)\|. \tag{7}$$

Следовательно, для фиксированного элемента $z_0 \in B$ «полоса»

$$\mathbb{B}^R_{t_0,z_0,T} \equiv \left\{ y(t) \in \mathbb{B}_{t_0,T} \mid \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \|y(t) - z_0\| \leqslant R \right\}$$

является замкнутым шаром в банаховом пространстве $\mathbb{B}_{t_0,T}$, а следовательно, полным метрическим пространством относительно расстояния, порождённого нормой $\|.\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}}$. Здесь параметры $t_0 \geqslant 0$, $z_0 \in B$, $R > 0$ произвольны.

**Лемма 3.** Пусть $t_0 \geqslant 0$, $R > 0$, $y_0 \in B$ произвольны. Тогда найдётся такое $T' > 0$, что при всех $T \in (0, T']$ решение интегрального уравнения (4) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ существует и единственно в классе $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$. (Иными словами, интегральное уравнение (4) имеет некоторое решение на промежутке $[t_0, t_0 + T]$, принадлежащее множеству $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$, а других решений *из этого множества* уравнение (4) не имеет.)

*Доказательство.*

Для доказательства воспользуемся методом сжимающих отображений. Введём оператор

$$\mathbb{A}_{t_0,y_0,T} : \mathbb{B}_{t_0,T} \to \mathbb{B}_{t_0,T}$$

(зависящий от $t_0 \geqslant 0$, $y_0 \in B$, $T > 0$ как от параметров) по формуле

$$\mathbb{A}_{t_0,y_0,T} z = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(\tau, z(\tau))\, d\tau. \tag{8}$$

(Тот факт, что при каждом значении параметров этот оператор действительно ставит в соответствие каждому элементу банахова пространства $\mathbb{B}_{t_0,T}$ некоторый элемент этого же пространства, следует из леммы 1 и непрерывности интеграла с переменным верхним пределом от ограниченной функции.)

Нам надо выбрать $T'$ таким образом, чтобы при всех $T \in (0, T']$ а) оператор $\mathbb{A}_{t_0,y_0,T}$ отображал каждый элемент множества $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$ снова во множество $\mathbb{B}^R_{t_0,y_0,T}$ и б) являлся в этом множестве сжимающим оператором. (В дальнейшем для сокращения записи параметры $t_0$, $y_0$, $T$ у оператора $\mathbb{A}$ опустим.)

Для а) проведём оценку

$$\|\mathbb{A}z(t) - y_0\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}} = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \left\| \int_{t_0}^{t} A(\tau, z(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \int_{t_0}^{t} \|A(\tau, z(\tau))\|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} \|A(\tau, z(\tau))\|\, d\tau \leqslant T \sup_{\substack{t\in[0;t_0+T]\\ s\in[0;\|y_0\|+R]}} \lambda(t,s).$$

Для б) проведём оценку

$$\|\mathbb{A}z_1(t) - \mathbb{A}z_2(t)\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}} = \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \left\| \int_{t_0}^{t} A(\tau, z_1(\tau))\, d\tau - \int_{t_0}^{t} A(\tau, z_2(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in[t_0,t_0+T]} \int_{t_0}^{t} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} \|A(\tau, z_1(\tau)) - A(\tau, z_2(\tau))\| d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} \mu(\tau, \max(\|z_1(\tau)\|, \|z_2(\tau)\|))\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant T \sup_{\substack{t\in[0;t_0+T]\\ s\in[0;\|y_0\|+R]}} \mu(t,s)\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{B}_{t_0,T}}.$$

Итак, для выполнения условий (а), (б) при некотором $T$ достаточно, чтобы для этого $T$ выполнялись условия

$$\begin{cases} T \sup\limits_{\substack{t\in[0;t_0+T]\\ s\in[0;\|y_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T \sup\limits_{\substack{t\in[0;t_0+T]\\ s\in[0;\|y_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{9}$$

Нам требуется, чтобы условия (9) выполнялись при всех $T \in (0, T']$ для некоторого $T'$. Выберем сначала $\bar{T}$ произвольно, затем подберём $T' \leqslant \bar{T}$ такое, что

$$\begin{cases} T' \sup\limits_{\substack{t\in[0;t_0+\bar{T}]\\ s\in[0;\|y_0\|+R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T' \sup\limits_{\substack{t\in[0;t_0+\bar{T}]\\ s\in[0;\|y_0\|+R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{10}$$

(это можно сделать, поскольку при фиксированном $\bar{T}$ в левых частях обоих неравенств (10) $T'$ умножается на константу). Но тогда тем более

$$\begin{cases} T' \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T'] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T' \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T'] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} T \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \lambda(t,s) \leqslant R, \\ T \sup\limits_{\substack{t \in [0; t_0 + T] \\ s \in [0; \|y_0\| + R]}} \mu(t,s) \leqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

для любого $T \in (0, T']$. Теперь утверждение леммы вытекает из принципа сжимающих отображений. ▲

В силу леммы 2 результат леммы 3 полностью переносится на задачу Коши (3). Сформулируем соответствующее утверждение.

**Лемма 4.** Пусть $t_0 \geqslant 0$, $R > 0$, $y_0 \in B$ фиксированы произвольным образом. Тогда найдётся такое $T' > 0$, что для всех $T \in (0, T']$ решение задачи Коши (3) на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ существует и единственно в классе $\mathbb{B}^R_{t_0, y_0, T}$.

Прямо сейчас выведем отсюда утверждение об отсутствии «разветвлений» решения задачи (2).

**Лемма 5.** Пусть $y_1(t)$, $y_2(t)$ — решения задачи (2) соответственно на промежутках $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Тогда одно из этих решений является продолжением другого (в частности, они совпадают, если $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$).

*Доказательство.* Предположим противное:

$$y_1(t) \not\equiv y_2(t) \quad \text{на } \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2.$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}^{\neq} \equiv \{t \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \mid y_1(t) \neq y_2(t)\}.$$

Сразу заметим: $0 \notin \mathcal{T}^{\neq}$ (в силу начального условия задачи (2)). Далее, множество $\mathcal{T}^{\neq}$ открыто как подмножество $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, поскольку является прообразом множества $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $t \mapsto \|y_1(t) - y_2(t)\|$, определённом на $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Положим

$$T^* = \inf \mathcal{T}^{\neq}.$$

Заметим: $T^* \notin \mathcal{T}^{\neq}$ (следовательно, $y_1(T^*) = y_2(T^*)$). В самом деле, если $T^* = 0$, это уже доказано ранее. Если же $T^* > 0$, то $T^*$ — граничная точка множества $\mathcal{T}^{\neq}$, а следовательно, $T^* \notin \mathcal{T}^{\neq}$, поскольку это множество открыто в $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Значит, в любой правой полуокрестности точки $T^*$ существует такое $t_1 > T^*$, что $t_1 \in \mathcal{T}^{\neq} \subset \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, причём пересечение любой правой полуокрестности точки $T^*$ с $\mathcal{T}^{\neq}$ непусто.

В силу замечания 2 функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ являются решениями задачи Коши

$$\begin{cases} y'(t) = A(t, y), \quad t \geqslant T^*; \\ y(T^*) = y_1(T^*) \end{cases} \tag{11}$$

на промежутке $[T^*, t_1]$. В силу непрерывности $y_1(t)$, $y_2(t)$ имеем

$$R_{12} = \max_{i=1,2} \sup_{t \in [T^*, t_1]} \|y_i(t) - y_1(T^*)\| < +\infty. \tag{12}$$

В силу леммы 4 существует такое $T' > 0$, что для любого $T \in (0, T']$ решение задачи Коши (11) на промежутке $[T^*, T^* + T]$, удовлетворяющее условию

$$\|y(t) - y_1(T^*)\| \leqslant R_{12}, \tag{13}$$

единственно. Взяв $T = \min(T', t_1 - T^*)$, получим противоречие, поскольку в силу (12) условие (13) выполнено, а $y_1 \not\equiv y_2$ в любой правой полуокрестности $T^*$. ▲

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основную теорему этой лекции.

**Теорема 1. (О непродолжаемом решении.)** Существует и единственно непродолжаемое решение $\tilde{y}(t) \in C^1(\mathcal{T}_0; B)$ задачи Коши (2). Оно удовлетворяет следующим условиям:
1) $\mathcal{T}_0 = [0; T_0)$, $0 < T_0 \leqslant +\infty$;
2) в случае $T_0 < +\infty$ верно предельное соотношение

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|\tilde{y}(t)\| = +\infty; \tag{14}$$

3) всякое другое решение задачи (2) является ограничением решения $\tilde{y}(t)$ на промежуток $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}_0$.

*Замечание 4.* В случае $T_0 = +\infty$ соотношение $\lim_{t \to +\infty} \|\tilde{y}(t)\| = +\infty$ может как выполняться, так и не выполняться.

*Доказательство.* В силу леммы 4 существует решение задачи Коши (2) хотя бы на некотором отрезке $[0, T]$. В силу леммы 5 из любых двух решений задачи Коши (2) одно является продолжением другого (в частности, они могут совпадать).

Рассмотрим теперь для каждого $T > 0$ все функции из $C^1([0; T]; B)$. Среди них или есть решение задачи (2) на промежутке $[0; T]$, или нет. Положим

$$\mathbb{T} = \{T > 0 : \exists \text{ решение задачи (2) из } C^1([0; T], B)\}, \quad T_0 = \sup \mathbb{T}.$$

Если $T_0 = +\infty$, то существует решение $\tilde{y}(t) \in C^1([0; +\infty), B)$. В самом деле, выбирая последовательность $T_n \uparrow +\infty$ и соответствующую ей последовательность решений $\{y_n(t)\}$, в силу леммы 5 получим, что при всех $n \in \mathbb{N}$ решение $y_{n+1}$ есть продолжение решения $y_n$. Поэтому функция

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y_n(t), & t \in [T_{n-1}; T_n), \quad n \geqslant 2, \\ y_1(t), & t \in [0; T_1) \end{cases}$$

и будет непродолжаемым решением, определённым на $[0; +\infty)$. Других же решений (не сводящихся к ограничению $\tilde{y}(t)$ на меньший промежуток) не будет в силу леммы 5.

Пусть теперь $T_0 < +\infty$. Тогда гипотетически возможны два случая: а) $T_0 \in \mathbb{T}$; б) $T_0 \notin \mathbb{T}$.

В случае а) существует решение $y(t) \in C^1([0; T_0], B)$. Но тогда в силу леммы 4, применённой к задаче (3) с $t_0 = T_0$, решение можно продолжить за точку $T_0$, причём обе односторонние производные $y'_-(T_0)$ и $y'_+(T_0)$ будут существовать и равняться $A(T_0; y(T_0))$: левая — по определению решения на $[0; T_0]$, правая — по определению решения задачи Коши с началом промежутка в точке $T_0$. Следовательно, мы получим решение на большем промежутке и придём к противоречию с определением $T_0$. Итак, случай а) исключается.

В случае б) рассуждениями, аналогичными проведённым для $T_0 = +\infty$, устанавливаем существование и единственность решения $y(t)$ задачи (2) на полуинтервале $[0; T_0)$. Случай б) распадается на два подслучая:

(б$_1$) $\overline{\lim}_{t \to T-0} \|y(t)\| = +\infty$ (т. е. решение неограничено в любой левой полуокрестности точки $T_0$);

(б$_2$) $\overline{\lim}_{t \to T-0} \|y(t)\| < +\infty$.

Покажем, что вариант (б$_2$) исключается. В самом деле, пусть функция $y(t)$ ограничена в некотором полуинтервале $(T_0 - \gamma; T_0)$:

$$\exists C \geqslant 0 \ \forall t \in (T_0 - \gamma; T_0) \ \ \|y(t)\| \leqslant C.$$

Тогда в силу $(A_4)$ имеем

$$\forall t \in (T_0 - \gamma; T_0) \ \ \|A(t, y(t))\| \leqslant \sup_{\substack{t \in [0; T_0] \\ s \in [0; C]}} \lambda(t, s) =: \mathcal{L}.$$

Но тогда из уравнения задачи (2) вытекает, что производная $y'(t)$ ограничена по норме величиной $\mathcal{L}$ при $t \in (T_0 - \gamma; T_0)$: $\|y'(t)\| \leqslant \mathcal{L}$. Следовательно (см. лекцию 1), функция $y(t)$ липшиц-непрерывна на $(T_0 - \gamma; T_0)$, а значит, удовлетворяет в точке $T_0$ слева условию Коши. Итак, существует предел

$$Y_0 = \lim_{t \to T_0 - 0} y(t).$$

Доопределим функцию $y(t)$ в точке $T_0$ значанием $Y_0$. Полученная функция $Y(t)$ будет непрерывной в точке $T_0$ слева. Тогда в силу леммы 1 этой лекции функция $A(t, Y(t))$ тоже непрерывна в точке $T_0$ слева, а следовательно,

$$\lim_{t \to T_0 - 0} A(t, y(t)) = \lim_{t \to T_0 - 0} A(t, Y(t)) = A(T_0, Y_0). \tag{15}$$

Но поскольку при $t < T_0$ верно равенство $y' = A(t, y(t))$, из (15) получаем соотношение

$$\lim_{t\to T_0-0} y'(t) = A(T_0, Y_0). \tag{16}$$

Однако отсюда в силу леммы о продолжении в точку следует, что функция $y(t)$ продолжима с $[0; T_0)$ на $[0; T_0]$ с сохранением непрерывной дифференцируемости (обозначим полученную функцию через $Y(t)$), причём $Y'(T_0) = A(T_0, Y_0)$, т. е. $Y(t)$ — решение на $[0, T_0]$ и мы приходим к противоречию с условием случая (б) (решения на $[0; T_0]$ не существует).

Таким образом, при $T_0 < +\infty$ реализуется лишь случай (б$_1$):

$$\overline{\lim_{t\to T_0-0}} \|y(t)\| = +\infty. \tag{17}$$

3. Установим теперь, что имеет место более сильное, чем (17), соотношение

$$\lim_{t\to T_0-0} \|y(t)\| = +\infty. \tag{18}$$

Итак, требуется доказать:

$$\forall M > 0\, \exists\delta > 0\ \forall t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0)\ \ \|y(t)\| > M.$$

Предположим противное:

$$\exists M > 0\, \forall\delta > 0\ \exists t \in (T_0 - \delta; T_0) \cap [0; T_0)\ \ \|y(t)\| \leqslant M. \tag{19}$$

Зафиксируем число $M$ из (19). В силу $(A_4)$ будем иметь

$$\forall t \in [0; T_0),\, \forall z \in B\ \bigl(\|z\| \leqslant 2M \Rightarrow \|A(t, z)\| \leqslant \sup_{\substack{t\in[0;T_0]\\ s\in[0;2M]}} \lambda(t, s) =: E\bigr). \tag{20}$$

Из (20) и уравнения $y'(t) = A(t, y)$ получаем:

$$\|y'(t)\| \leqslant E \quad \text{при} \quad \|y(t)\| \leqslant 2M, \quad t \in [0; T_0). \tag{21}$$

Выберем $\delta \leqslant \frac{1}{2}\frac{M}{E}$ и возьмём из (19) соответствующее $t = t^*$: $\|y(t^*)\| \leqslant M$, $T_0 - \delta < t^*$. В силу (17) существует такое $t^{**}$, что $T_0 - \delta < t^* < t^{**} < T_0$ и $\|y(t^{**})\| \geqslant 2M$. Но тогда в силу непрерывности функции $y(t)$ («прообраз замкнутого множества замкнут») существует такое $t^{***} \in (t^*; t^{**}]$, что

$$\|y(t^{***})\| = 2M, \quad \forall t \in (t^*; t^{***})\ \|y(t)\| < 2M,$$

откуда в силу (21)

$$\|y'(t)\| \leqslant E \quad \text{при всех} \quad t \in [t^*; t^{***}].$$

Однако в этом случае одновременно

$$\|y(t^{***}) - y(t^*)\| \leqslant |t^{***} - t^*| \cdot E < \delta \cdot E \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{E} \cdot E < M \quad \text{(см. лекцию 1)},$$
$$\|y(t^{***}) - y(t^*)\| \geqslant \|y(t^{***})\| - \|y(t^*)\| \geqslant M.$$

Полученное противоречие доказывает (18). ▲

*Замечание 5.* Функция $f(y) : B_1 \to B_2$ называется *ограниченно липшиц-непрерывной*, если существует такая функция $\mu(x) : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве, что

$$\forall y_1, y_2 \in B_1 \ \ \|f(y_1) - f(y_2)\|_2 \leqslant \mu(\max(\|y_1\|_1, \|y_2\|_2))\|y_1 - y_2\|_1.$$

Иными словами, это функция, липшиц-непрерывная в каждом шаре (возможно, со своей константой Липшица).

*Замечание 6.* Функция $f(y) : B_1 \to B_2$ называется *локально липшиц-непрерывной*, если для каждой точки $y_0 \in B_1$ существует такая окрестность $B_\delta(y_0)$, в которой данная функция является липшиц-непрерывной, т. е.

$$\forall y_0 \in B_1 \ \exists \delta > 0, \ \exists L > 0 \ \forall y_1 \in B_1 \ \|y_1 - y_0\|_1 < \delta \ \Rightarrow \ \|f(y_1) - f(y_0)\|_2 \leqslant L\|y_1 - y_0\|_1.$$

В теореме фигурирует ограниченно липшиц-непрерывная функция. Условие локальной липшиц-непрерывности является более слабым.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что линейное пространство $\mathbb{B} = C([a, b]; B)$, снабжённое нормой

$$\|y\|_{\mathbb{B}} = \sup_{t \in [a,b]} \|y(t)\|,$$

где $B$ — банахово пространство, является банаховым пространством.