Лекция 16

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

В этой лекции мы введём слабую производную и рассмотрим нужные нам пространства С. Л. Соболева.

§ 0. План лекции

1. Определение пространства $L^p_{loc}(D)$.
2. Определение слабой производной.
3. Пример и контрпример.
4. Слабые производные произведения функций и сложной функции.
5. Определение пространства $H^1(D)$.
6. Определение пространства $H^1_0(D)$.
7. Неравенство Фридрихса.
8. Эквивалентная норма на $H^1_0(D)$.
9. Сопряжённые пространства $(H^1(D))^*$ и $H^{-1}(D) = (H^1_0(D))^*$.
10. Эллиптический оператор и условия на коэффициенты.
11. Расширение оператора

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

12. Функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(D).$$

13. Общее представление функционала из $(H^1(D))^*$ и $H^{-1}(D) = (H^1_0(D))^*$.
14. Звёздочные нормы $\|\cdot\|_{1*}$ и $\|\cdot\|_*$.
15. Важные равенства для звёздочных норм.

16. Как действует расширение эллиптического оператора L.

17. Определение слабого решения задачи Дирихле.

§ 1. Слабая производная

Напомним определение пространств Лебега $L^p_{loc}(D)$, где $D \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое множество.

Определение 1. *Функция $u(x) \in L^p_{loc}(D)$ при $p \geqslant 1$, если для всякого компакта* [1] *$K \subset D$ измеримая на D функция $u(x) \in L^p(K)$.*

Дадим определение слабой производной.

Определение 2. *Функция $v(x) \in L^p_{loc}(D)$ называется слабой производной ∂^α_x функции $u(x) \in L^p_{loc}(D)$ и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}^\infty_0(D)$ имеет место равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_D u(x)\partial^\alpha_x \varphi(x)\,dx = \int\limits_D v(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Слабая частная производная ∂^α_x порядка α функции u, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(D)$ такие, что

$$\int\limits_D u\partial^\alpha_x \varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_D v_1\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_D v_2\varphi\,dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_0(D)$. Тогда

$$\int\limits_D (v_1 - v_2)\,\varphi(x)\,dx = 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}^\infty_0(D)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $D = (0, 2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

[1] т. е. ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^N$.

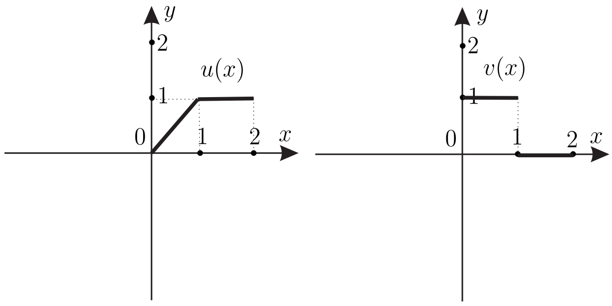

Рис. 1. Слабая производная $v(x)$ функции $u(x)$.

Покажем, что $u^{'} = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(D)$. Надо показать, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\,dx = \int_0^1 x\varphi^{'}\,dx + \int_1^2 \varphi^{'}\,dx = x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(x)\Big|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= -\int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\,dx,$$

где мы воспользовались тем, что

$$\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,2) \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(2) = 0.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $D = (0,2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Мы покажем, что производная $u^{'}$ не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(D)$ такой, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(D)$.

Предположим противное. Пусть (1.2) выполняется для некоторой функции $v \in L^1_{loc}(D)$ и всех функций $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(D)$. Тогда

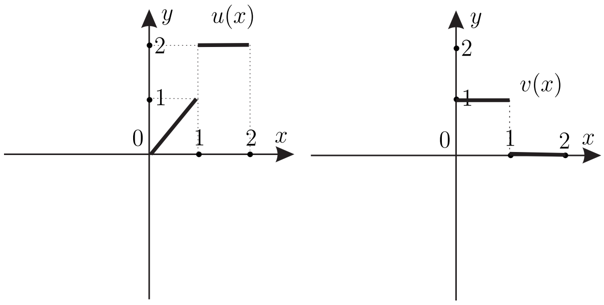

Рис. 2. Отсутствие слабой производной $v(x)$ функции $u(x)$.

$$-\int\limits_0^2 v\varphi\,dx = \int\limits_0^2 u\varphi'\,dx = \int\limits_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int\limits_1^2 \varphi'\,dx =$$

$$= x\varphi(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int\limits_0^1 \varphi\,dx + 2\varphi(x)\Big|_{x=1}^{x=2} = -\int\limits_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1), \quad (1.3)$$

где мы воспользовались тем, что $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$. Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ гладких функций таким образом, чтобы

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (1.3) и полагая $m \to +\infty$, в силу теоремы Лебега о предельном переходе получим предельное равенство

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty} \left[\int\limits_0^2 v\varphi_m\,dx - \int\limits_0^1 \varphi_m\,dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

Справедливы следующие формулы для слабых производных, которые мы собрали в виде двух лемм.

Лемма 2. *Пусть функции $u(x), v(x) \in L^p_{loc}(D)$ имеют слабые производные $\partial_x u(x), \partial_x v(x) \in L^p_{loc}(D)$ и граница ∂D области D достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула*:

$$\partial_x(uv) = u\partial_x v + v\partial_x u \ ^{1)}, \quad (1.4)$$

понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(D)$ имеет место равенство

$$\int\limits_D \partial_x(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_D u(x)\partial_x v(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_D v(x)\partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

[1] Символом ∂_x мы обозначаем какую–либо частную производную $\partial/\partial x_k$ при $k \in \overline{1, N}$.

Лемма 3. *Пусть функция* $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и* $f^{'}(t) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и функция* $u(x) \in L^p_{loc}(D)$ *имеет слабую производную* $\partial_x u(x) \in L^p_{loc}(D)$. *Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial_x f(u)(x) = f^{'}(u)\partial_x u(x)\ ^{1)}. \tag{1.5}$$

Замечание 1. Заметим, что формально под условия леммы 3 не попадает сложная функция

$$f = f(t) = t^n, \quad f(u(x)) = u^n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

но тем не менее

$$\partial_x f(u(x)) = f^{'}(t)\Big|_{t=u(x)} \partial_x u(x),$$

если существует слабая производная $\partial_x u(x) \in L^p_{loc}(D)$ функции $u(x) \in \in L^p_{loc}(D)$. Действительно, достаточно $(n-1)$–раз применить формулу слабой производной произведения функций (1.4).

§ 2. Пространства $H^1(D)$ и $H_0^1(D)$

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вещественные пространства С. Л. Соболева:

$$H_0^1(D) \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(D), \quad H^1(D) \stackrel{\text{def}}{=} W^{1,2}(D),$$

$$H^{-1}(D) \stackrel{\text{def}}{=} W^{-1,2}(D) = (W_0^{1,2}(D))^*.$$

Дадим определение пространства Соболева $H^1(D)$.

Определение 3. *Функция* $u(x) \in H^1(D)$, *если* $u(x) \in L^2(D)$, *а ее слабые частные производные* $v_i(x) = \partial_{x_i} u(x) \in L^2(D)$ *при всех* $i = = \overline{1, N}$, *причем это пространство банахово относительно нормы* [2]

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_D \left[|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N |v_i(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2}.$$

Дадим определение пространства Соболева $H_0^1(D)$.

Определение 4. *Пополнение векторного пространства* $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ *по норме банахового пространства* $H^1(D)$ *называется банаховым пространством* $H_0^1(D)$.

[1] Символом ∂_x мы обозначаенм какую–либо частную производную ∂_{x_k} при $k = \overline{1, N}$.

[2] Это согласуется с определением слабой производной, поскольку $L^2(D) \subset \subset L^2_{loc}(D)$.

Замечание 2. Отметим, что нормой на векторном пространстве $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ является также величина

$$\||D_x u|\|_2, \quad D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}),$$

где ∂_{x_k} — это соответствующие слабые частные производные по переменной x_k. И если рассмотреть пополнение $\mathbb{C}_0^\infty$ мы получим банахово пространство $\mathcal{D}^{1,2}(D)$ относительно указанной нормы. Оказывается как было доказано в 10-й Лекции–Семинаре [1]) в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_2 \leqslant c_1 \||D_x u|\|_2 \quad \text{для всех} \quad u(x) \in H_0^1(D)$$

это пространство совпадает с банаховым пространством $H_0^1(D)$.

Далее мы изучим свойства пространства $H^{-1}(D)$ сопряженного к банаховому пространству $H_0^1(D)$. Введем следующие обозначения:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(D) \otimes H_0^1(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H_0^1(D)$ и

$$H^{-1}(D) \stackrel{\text{def}}{=} (H_0^1(D))^*;$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : (H^1(D))^* \otimes H^1(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1(D)$ и $(H^1(D))^*$.

Рассмотрим эллиптический оператор L, определённый следующей формулой:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \quad (2.1)$$

Пусть $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(D)$. Причем частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N}$$

в слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$$

понимается в слабом смысле (точнее из $L^2(D) \subset L^1_{loc}(D)$). Тогда при $u(x) \in H_0^1(D)$ имеем

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(D). \quad (2.2)$$

---

[1]) Линейный и нелинейный функциональный анализ. Том II. М. О. Корпусова и А. А. Панина

Теперь введем функционал, порождаемый функцией $f(x) \in L^2(D)$, обозначаемый также как и частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

причем это не слабая производная, а производная регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $f(x) \in L^2(D) \subset \mathcal{D}'(D)$, стандартной формулой

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_D f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx, \quad \varphi(x) \in H_0^1(D) \tag{2.3}$$

и, в частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(D)$$

— это слабая производная функции $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Замечание 3. Отметим, что величина

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

не является слабой производной, поскольку $f(x) \notin H_0^1(D)$, а всего лишь $f(x) \in L^2(D)$.

Лемма 4. *Функционал (2.3) является линейным и непрерывным в сильной топологии пространства $H_0^1(D)$. Иначе говоря,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(D). \tag{2.4}$$

Доказательство.

Действительно, для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H_0^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(D) \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

имеем, в частности,

$$\| |D_x\varphi_m - D_x\varphi| \|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\left| \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_m - \varphi \right\rangle \right| \leqslant \int\limits_D |D_x\varphi_m - D_x\varphi|\, |f(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_D |D_x\varphi_m - D_x\varphi|^2 \, dx \right)^2 \left(\int\limits_D |f(x)|^2 \, dx \right)^2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Стало быть, равенством

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

определен линейный и непрерывный функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{над пространством} \quad H_0^1(D) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \big(H_0^1(D)\big)^* = H^{-1}(D).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 5. *Всякий функционал над банаховым пространством $H^1(D)$ порождается функциями $f_j(x) \in L^2(D)$ при $j = \overline{0, N}$ по формуле*

$$\langle f^*, \varphi\rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D f_j(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D f_0(x)\varphi(x)\,dx, \tag{2.5}$$

причем для некоторого однозначно определенного элемента $g(x) \in \in H^1(D)$ имеет место равенство в слабом смысле

$$f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x).$$

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, пространство $H^1(D)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(g(x), \varphi(x))_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx$$

для всех $\varphi(x), g(x) \in H^1(D)$. С другой стороны, для всякого элемента $f^*(x) \in \big(H^1(D)\big)^*$ согласно теореме Рисса–Фреше найдется такой единственный элемент $g(x) \in H^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (g(x), \varphi(x))_1 = \sum_{j=1}^N \int\limits_D f_j(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx,$$

где

$$f_j(x) = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(D), \quad j = \overline{1, N}.$$

Шаг 2. Наконец, для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H^1(D) \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

имеем

$$\|\varphi_m - \varphi\|_2 \to +0, \quad \||D_x\varphi_m - D_x\varphi|\|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_D f_j(x)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_j}\right]dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_D\left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_j}\right|^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_D f_j^2(x)\,dx\right)^{1/2}\to+0,$$

$$\left|\int\limits_D g(x)[\varphi_m(x)-\varphi(x)]\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_D|\varphi_m(x)-\varphi(x)|^2\,dx\right)^2\left(\int\limits_D|g(x)|^2\,dx\right)^2\to+0$$

при $m\to+\infty$. Следовательно, формулой (2.5) задается линейный и непрерывный функционал над пространством $H^1(D)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для всякого элемента $f^*\in H^{-1}(D)$ найдется такой единственный элемент $g(x)\in H^1_0(D)$, что имеет место явное представление*

$$\langle f^*,\varphi\rangle\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=1}^N\int\limits_D f_j(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx,\quad f_j(x)=\frac{\partial g(x)}{\partial x_j},\quad g(x)\in H^1_0(D)\tag{2.6}$$

для всех $\varphi(x)\in H^1_0(D)$.

Следствие 2. *Множество $H^{-1}(D)=(H^1_0(D))^*$ всех линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством $H^1_0(D)$, является банаховым относительно нормы* [1])

$$\|f^*\|_{1*}\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{\||D_x\varphi|\|_2=1}\left|\sum_{j=1}^N\int\limits_D f_j^*(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx\right|,$$

где

$$f_j^*(x)=\frac{\partial g(x)}{\partial x_j},\quad j=\overline{0,N}.$$

---

[1]) Стандартная $*$–норма.

Пространство $\left(H^1(D)\right)^*$ *является банаховым относительно нормы*

$$\|f^{1*}\|_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\left(\||D_x\varphi|\|_2^2+\|\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left|\sum_{j=1}^N \int\limits_D f_j^*(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D f_0(x)\varphi(x)\,dx\right|,$$

где

$$f_j^*(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x), \quad g(x)\in H^1(D), \quad j=\overline{0,N}.$$

Справедлива следующая лемма:
Лемма 6. *Имеет место следующие равенства*:

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2}=1} |\langle f^*,\varphi\rangle_1| = \\ = \left(\|g\|_2^2 + \||D_xg|\|_2^2\right)^{1/2}, \quad g(x)\in H^1(D) \quad (2.7)$$

для любого $f^*(x)\in (H^1(D))^*$ *и для всех* $\varphi(x)\in H^1(D)$;

$$\|f^*\|_* = \sup_{\||D_x\varphi|\|_2=1} |\langle f^*,\varphi\rangle| = \||D_xg|\|_2, \quad g(x)\in H_0^1(D) \quad (2.8)$$

для любого $f^*(x)\in H^{-1}(D)$ *и для всех* $\varphi(x)\in H_0^1(D)$.

Доказательство.

Докажем, например, равенство (2.7). Действительно, во–первых, имеет место следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\|D_x\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left[\sum_{j=1}^N \|\partial_j g\|_2\|\partial_j\varphi\|_2 + \|g\|_2\|\varphi\|_2\right]. \quad (2.9)$$

Во вторых, заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\left(\sum_{j=1}^N a_j^{1/2}b_j^{1/2} + a_0^{1/2}b_0^{1/2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^N a_j + a_0\right)\left(\sum_{j=1}^N b_j + b_0\right)$$

для всех $a_j\geqslant 0$, $b_j\geqslant 0$ при $j=\overline{0,N}$. Поэтому мы из (2.9) мы получим следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\||D_x\varphi|\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left(\||D_xg|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}\left(\||D_x\varphi|\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2\right)^{1/2} = \\ = \left(\||D_xg|\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, заметим, что имеет место неравенство снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\, dx \right|$$

для всех $\left(\|\varphi\|_2^2 + \||D_x\varphi\||_2^2\right)^{1/2} = 1$. Возьмем в этом неравенстве

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{\left(\||D_x g\||_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}}$$

и получим оценку снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left(\||D_x g\||_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

Равенство (2.7) доказано.

Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение оператора L, определенного формулой (2.1). Причем в слагаемом

$$b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

производная понимается в слабом смысле, о вот производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

примененная к выражению

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u(x) \in H^1_0(D),$$

понимается уже как функционал из $H^{-1}(D)$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что

$$a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} : H^1_0(D) \to L^2(D), \tag{2.10}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : H^1_0(D) \to H^{-1}(D), \tag{2.11}$$

$$b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} : H^1_0(D) \to L^2(D), \quad c(x)I : H^1_0(D) \to L^2(D). \tag{2.12}$$

Теперь заметим, что имеют место плотное вложение

$$H^1_0(D) \overset{ds}{\subset} L^2(D) \Rightarrow L^2(D) = \left(L^2(D)\right)^* \overset{ds}{\subset} \left(H^1_0(D)\right)^* = H^{-1}(D).$$

Таким образом, такое обобщение оператора L, формально записанного как и ранее, действует следующим образом:

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I : H_0^1(D) \to H^{-1}(D). \tag{2.13}$$

Наконец, мы можем определить так называемое слабое решение следующей однородной краевой задачи Дирихле:

$$Lu(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{2.14}$$

О п р е д е л е н и е 5. *Слабым решением однородной краевой задачи Дирихле* (2.14) *называется функция* $u(x) \in H_0^1(D)$, *удовлетворяющая равенству*

$$\langle Lu, \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(D), \tag{2.15}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *— это скобки двойственности между* $H_0^1(D)$ *и* $H^{-1}(D)$, *причём это равенство эквивалентно равенству*

$$\int_D \left[\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x) - c(x)u(x)\varphi(x)\right] dx = 0 \tag{2.16}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Рассмотренные пространства $H^1(D)$, $H_0^1(D)$ и соответствующие сопряженные используются при рассмотрении и нелинейных краевых задач с главным линейным оператором эллиптического типа второго порядка. Однако, при рассмотрении нелинейных в главном дифференциальных уравнений используются банаховы пространства $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$.