Лекция 18

МЕТОД АПРИОРНЫХ ОЦЕНОК

§ 0. План лекции

1. Постановка задачи для равномерно эллиптического оператора.

2. Определение слабого решение.

3. Теорема Брауэра.

4. Лемма об остром угле.

5. Выбор ортонормированного базиса в $H_0^1(D)$.

6. Галеркинские приближения и постановка задачи для галеркинских приближений.

7. Теорема о существовании галеркинских приближений.

8. Априорная оценка для галеркинских приближений.

9. Существование слабо сходящейся подпоследовательности.

10. Предельный переход в галеркинских приближениях.

11. Единственность слабого решения.

§ 1. Вывод априорной оценки.

Теперь мы рассмотрим слабую постановку следующей задачи Дирихле:

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = -f(x), \quad x \in D, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial D. \tag{1.2}$$

Предположим, что $a_{ij}(x) \in L^\infty(D)$ и, кроме того, предположим, что оператор L является равномерно эллиптическим, т. е.

$$\vartheta|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant M|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < \vartheta \leqslant M < +\infty \tag{1.3}$$

для почти всех $x \in D$. Дадим определение слабого решения:

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1.1) *называется функция* $u(x) \in H_0^1(D)$, *удовлетворяющая следующему равенству*:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_D a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx = \int_D f(x)\varphi(x)\,dx, \quad f(x) \in L^2(D) \tag{1.4}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Замечание 1. Отметим, что вывод интегрального равенства (1.4) аналогичен выводу основного интегрального равенства предыдущей лекции.

Вывод априорной оценки. Пусть $u(x) \in H_0^1(D)$ — это слабое решение задачи (1.4). Тогда возьмем в равенстве $\varphi(x) = u(x)$ и получим следующее неравенство:

$$\vartheta\||D_x u|\|_2^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_D a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dx = \int_D f(x)u(x)\,dx \leqslant \|f\|_2\|u\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant M_1\|f\|_2\||D_x u|\|_2, \tag{1.5}$$

из которого получаем

$$\||D_x u|\|_2 \leqslant \frac{M_1}{\vartheta}\|f\|_2. \tag{1.6}$$

§ 2. Существование приближений Галёркина

Прежде всего сформулируем следующую *теорему Брауэра*, доказываемую в курсе топологии:

Теорема Брауэра. *Пусть D — это выпуклое компактное подмножество из $\mathbb{R}^n$, а отображение*

$$A : D \to D$$

непрерывно. Тогда существует неподвижная точка этого отображения $A(a) = a \in D$.

Справедлива следующая вспомогательная *лемма об остром угле*:
Лемма 1. *Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее следующему условию*:

$$(Ta, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = (a_1^2 + \cdots + a_N^2)^{1/2} = R. \tag{2.1}$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, что

$$|a| \leqslant R \quad \textit{и} \quad Ta = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство.
Шаг 1. Допустим, что

$$Ta \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in K_R \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{a | a \in \mathbb{R}^n,\ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R\frac{Ta}{|Ta|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. Заметим, что K_R является выпуклым и компактным (замкнутым и ограниченным) множеством в $\mathbb{R}^n$.

В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R\frac{Ta}{|Ta|}. \tag{2.3}$$

Шаг 2. Из (2.3) вытекает, что $|a| = R$ и

$$(a, a) = -R\frac{(Ta, a)}{|Ta|} \Rightarrow (Ta, a) = -|Ta|\frac{|a|^2}{R} = -R|Ta|.$$

Стало быть, $(Ta, a) = -R|Ta| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(Ta, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

Лемма доказана.

Теперь мы воспользуемся *полным методом Галёркина* для доказательства существования слабого решения задачи.

Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — это базис пространства $H_0^1(D)$, составленный из собственных функций оператора Лапласа

$$\Delta w_k(x) + \lambda_k w_k(x) = 0, \quad x \in D, \quad w_k|_{\partial D} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N},$$

причем предположим, что выполнены условия ортонормированности
$$\int\limits_{\Omega} (D_x w_k, D_x w_l)\, dx = \delta_{kl}.$$
Определим *галёркинские приближения*
$$u_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1. \tag{2.4}$$
Дадим определение галёркинских приближений задачи (1.4).

Определение 2. *Галёркинским приближением задачи* (1.4) *называется функция* $u_m(x)$ *вида* (2.4), *удовлетворяющая равенству*: [1])
$$\int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx = \int\limits_D f(x) w_l(x)\, dx \quad \textit{для всех} \quad l = \overline{1, m}. \tag{2.5}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Галёркинское приближение задачи* (2.5) *при каждом* $m \in \mathbb{N}$ *существует.*

Доказательство.

Шаг 1. Действительно, рассмотрим следующие отображения:
$$A_l(c_m) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\, dx - \int\limits_D f(x) w_l(x)\, dx. \tag{2.6}$$
Пусть
$$A(c_m) = (A_1(c_m), ..., A_m(c_m)).$$
Воспользуемся тем, что $a_{ij}(x) \in L^\infty(D)$ удовлетворяет неравенству снизу (1.3)
$$\int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}\, dx \geqslant \vartheta |||D_x u_m|||_2^2.$$
Кроме того, справедливо следующее неравенство:
$$\left| \int\limits_D f(x) u_m(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_2 \|u_m\|_2 \leqslant \|f\|_2 M_1 |||D_x u_m|||_2 \leqslant$$
$$\leqslant \vartheta \frac{\varepsilon}{2} |||D_x u_m|||_2^2 + \frac{M_1^2}{\vartheta} \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_2^2.$$
Поэтому имеет место следующая цепочка выражений:

---
[1]) Здесь и ниже мы пользуемся правилом суммирования Эйнштейна.

$$(A(c_m), c_m) = \sum_{l=1}^{m} A_l(c_m) c_{ml} =$$

$$= \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}\, dx - \int\limits_D f(x) u_m(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \vartheta (1 - \varepsilon/2) \| |D_x u_m| \|_2^2 - \frac{M_1^2}{\vartheta} \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_2^2, \quad \varepsilon \in (0, 2).$$

Шаг 2. Заметим, что

$$\| |D_x u_m| \|_2^2 = \int\limits_D (D_x u_m, D_x u_m)\, dx =$$

$$= \sum_{k,l=1,1}^{m,m} c_{mk} c_{ml} \int\limits_D (D_x w_k, D_x w_l)\, dx = \sum_{k,l=1,1}^{m,m} c_{mk} c_{ml} \delta_{kl} = \sum_{l=1}^{m} c_{ml}^2.$$

Отметим, что

$$|c_m| = \left(\sum_{l=1}^{m} c_{ml}^2 \right)^{1/2} \Rightarrow R = |c_m| = \| |D_x u_m| \|_2.$$

Тогда при достаточно большом $R > 0$ отсюда вытекает цепочка неравенств

$$(A(c_m), c_m) \geqslant \vartheta (1 - \varepsilon/2) R^2 - \frac{M_1^2}{\vartheta} \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_2^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |c_m| = R > 0.$$

Тогда согласно лемме 1 найдётся c_m в замыкании шара $|c_m| < R$ такое, что

$$A(c_m) = \vartheta_m = (0, ..., 0),$$

а, значит, $c_m \in \mathbb{R}^m$ является решением системы уравнений галёркинских приближений (2.5).

Теорема доказана.

§ 3. Предельный переход

Докажем теперь вспомогательное утверждение

Лемма 2. *Из всякой равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограниченной последовательности $\{u_m\} \subset H_0^1(D)$*

$$\| |D_x u_m| \|_2 \leqslant c_3$$

можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_m}\}$:

$$\langle f, u_{m_m} \rangle \to \langle f, u \rangle \quad \text{при} \quad m \to +\infty \quad \text{для всех} \quad f \in H^{-1}(D),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $H_0^1(D)$ и $H^{-1}(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $H_0^1(D)$ является сепарабельным и рефлексивным, то и $H^{-1}(D)$ тоже является сепарабельным. Поэтому существует счётное всюду плотное множество $\{f_n\} \subset H^{-1}(D)$.

Шаг 2. Прежде всего заметим, что для каждого $f \in H^{-1}(D)$ имеет место следующая оценка:

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \Rightarrow |\langle f, u_m\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u_m\| \leqslant c_3 \|f\|_* \quad \text{при} \quad \|u_m\| \leqslant c_3.$$

Поэтому для $f_1 \in H^{-1}(D)$ найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_{n_1}}\} \subset H_0^1(D)$, что числовая последовательность $\langle f_1, u_{m_{n_1}}\rangle$ сходится. Для $f_2 \in H^{-1}(D)$ найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_{n_2}}\} \subset \subset \{u_{m_{n_1}}\}$, что числовая последовательность $\langle f_2, u_{m_{n_2}}\rangle$ сходится. Поэтому по индукции найдётся такая подпоследовательность $\{u_{m_k}\} \subset \{u_m\}$, что для каждого $f \in \{f_1, ..., f_k\}$ числовая последовательность $\langle f, u_{m_{n_k}}\rangle$ сходится.

Шаг 3. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&|\langle f, u_{m_n}\rangle - \langle f, u_{m_l}\rangle| \leqslant \\
&\quad \leqslant |\langle f - f_k, u_{m_n}\rangle| + |\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| + |\langle f - f_k, u_{m_l}\rangle| \leqslant \\
&\quad \leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{m_n}\| + |\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_l}\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant 2c_3 \|f - f_k\|_* + |\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

где сначала номер $k \in \mathbb{N}$ выбирается так, чтобы

$$2c_3 \|f - f_k\|_* < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем номера $n, l \geqslant k$ так, чтобы

$$|\langle f_k, u_{m_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_l}\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Шаг 4. Следовательно, числовая последовательность $\langle f, u_{m_n}\rangle$ фундаментальна в $\mathbb{R}^1$ для всякого фиксированного $f \in H^{-1}(D)$ и тогда в силу слабой замкнутости рефлексивного банахова пространства $H_0^1(D)$ найдётся такое $u \in H_0^1(D)$, что

$$\langle f, u_{m_n}\rangle \to \langle f, u\rangle \quad \text{при} \quad m_n \to +\infty.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Отметим, что из курса «Функциональный анализ. Том II» известно, что скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot\rangle$ между сопряженными гильбертовыми пространствами $H_0^1(D)$ и $H^{-1}(D)$ имеют явное представление

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{N} \int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx.$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$ и при некотором $f(x) \in H_0^1(D)$.

Наконец, справедлива следующая основная теорема:

Теорема 2. *Слабое решение задачи Дирихле* (1.4) *существует и единственно.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим построенные галёркинские приближения $\{u_m\}$, которые по результату теоремы 1 существуют для каждого $m \in \mathbb{N}$. Для этих галёркинских приближений справедлива априорная оценка (1.6)

$$\| |D_x u_m| \|_2 \leqslant \frac{M_1}{\vartheta} \|f\|_2.$$

□ Действительно, умножим обе части равенства (2.5) на c_{ml} и просуммируем по $l = \overline{1, m}$. Тогда получим равенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u_m(x)}{\partial x_j}\, dx = \int_D f(x) u_m(x)\, dx, \tag{3.1}$$

из которого точно также как и в цепочке неравенств (1.5) выводим искомую априорную оценку. ⊠

Поэтому в силу леммы 2 существует такое $u(x) \in H_0^1(D)$ и такая подпоследовательность $\{u_{m_n}\} \subset \{u_m\}$, что

$$u_{m_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(D).$$

Рассмотрим следующий функционал:

$$\langle w^{l,j}, \varphi \rangle := \int_D \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx, \quad l = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Докажем, что функционал $w^{l,j} \in H^{-1}(D)$.

□ Действительно, линейность функционала очевидна. Докажем непрерывность. Пусть

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$\left|\langle w^{l,j}, \varphi_m - \varphi \rangle\right| \leqslant \int_D \sum_{i=1}^{N} \left| a_{ij}(x) \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_D \left| \sum_{i=1}^{N} \left| a_{ij}(x) \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_i} \right| \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D \left| \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant M_2 \| |D_x(\varphi_m - \varphi)| \|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Непрерывность доказана. ⊠

В силу этого результат имеет место следующее предельное свойство:

$$\int\limits_D f(x)w_l(x)\,dx = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_{m_n}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\,dx \to$$

$$\to \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial w_l(x)}{\partial x_j}\,dx \qquad (3.2)$$

при $m_n \to +\infty$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Отметим, что $\{w_l(x)\}$ — это базис гильбертова пространства $H_0^1(D)$, поэтому имеет место равенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx = \int\limits_D f(x)\varphi(x)\,dx$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$. Поэтому $u(x)$ — это слабое решение задачи Дирихле.

Шаг 2. Пусть существуют два слабых решения задачи Дирихле $u_1(x)$ и $u_2(x)$ из $H_0^1(D)$. Для их разности $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ справедлива следующее равенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(D).$$

Поэтому при $\varphi(x) = v(x)$ имеет место следующее неравенство:

$$\vartheta \int\limits_D |D_x v|^2\,dx \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_D a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\,dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = const \in H_0^1(D) \Rightarrow const = 0.$$

Следовательно, $u_1(x) = u_2(x)$.

Теорема доказано.