



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

---

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Тихонов Н.А., Токмачев М.Г.**

**Курс лекций  
«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»  
Часть 1**

Москва, 2013

ТИХОНОВ Н.А., ТОКМАЧЕВ М.Г.

**Основы математического моделирования** / Учебное пособие.

М.: Физический факультет МГУ, 2013.

Пособие по курсу «основы математического моделирования» написано на основе курса лекций, читавшегося в течение ряда последних лет на физическом факультете МГУ.

В пособии рассматриваются вопросы и методы математического моделирования, а также постановки и решения ряда классических и активно изучаемых в последнее время задач математической физики.

Текст разбит на главы и параграфы. Нумерация формул и рисунков в каждом параграфе своя. Рисункам присвоены номера в тех случаях, когда на них имеются последующие ссылки. В остальных случаях рисунки иллюстрируют рядом расположенный текст и не пронумерованы.

*Тихонов Николай Андреевич*

*Токмачев Михаил Геннадьевич*

## **ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова,  
119991, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д.1, стр.2

© Физический факультет МГУ  
им. М.В.Ломоносова, 2013

© Тихонов Н.А.,  
Токмачев М.Г., 2013

## Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Введение</b>   | <b>4</b>  |
| <b>Глава 1. Некоторые классические задачи математической физики.</b>                    | <b>10</b> |
| §1. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)                                  | 10        |
| §2. Общая задача Коши для гиперболических уравнений.                                    | 13        |
| Постановка общей задачи Коши.   | 13        |
| Смысл функции Римана.   | 17        |
| Уравнение с постоянными коэффициентами.   | 18        |
| Задача Коши для уравнения колебаний.  | 19        |
| Функция влияния точечного импульса.   | 21        |
| §3. Перенос вещества в двухфазной среде. Динамика сорбции.                              | 21        |
| Постановка задачи.  | 21        |
| Линейный случай.  | 26        |
| Нелинейный случай.  | 27        |
| §4. Метод подобия. Задача Стефана   | 29        |
| Метод подобия   | 29        |
| Задача Стефана (задача о фазовом переходе)  | 31        |
| §5. Постановка задач с уравнением Гельмгольца в неограниченной области.                 | 35        |
| Условия излучения   | 37        |
| Математическая задача дифракции.  | 41        |
| Принцип предельного поглощения.   | 43        |
| Принцип парциального излучения  | 46        |
| §6. Математические модели жидких вязких сред.   | 51        |
| Основные уравнения.   | 52        |
| Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением.          | 55        |
| Внешняя задача гидродинамики.   | 56        |
| Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы. | 57        |
| <b>Глава 2. Нелинейные процессы</b>   | <b>61</b> |
| §1. Квазилинейное уравнение переноса.   | 61        |
| Линейное уравнение.   | 62        |
| Квазилинейное уравнение.  | 64        |
| Метод характеристик.  | 66        |
| Разрывы решения.  | 68        |
| §2. Нелинейное уравнение теплопроводности.  | 72        |
| Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении.  | 73        |
| Нелинейная модель горения.  | 76        |
| §3. Модель «Хищник-Жертва»  | 80        |

## Введение

Пусть изучается некоторый физический процесс или явление. Математическое моделирование состоит в том, что законы, в соответствии с которыми происходит этот процесс, описываются некоторыми уравнениями, то есть составляется математическая модель. Далее исследуются решения, получаемые с помощью модели, и таким образом теоретически изучается рассматриваемое явление.

Такой подход не нов и используется еще со времен Ньютона, когда физика перестала быть частью философии и встала на твердую математическую основу. Однако, как известно, аналитически решаются в основном лишь линейные уравнения. Поэтому была возможность исследовать лишь простейшие процессы или простейшие оценочные приближения. Ситуация изменилась с появлением компьютерной техники в 20 веке. Появилась возможность численно решать нелинейные уравнения и системы уравнений большой сложности. А это в свою очередь позволили детально рассматривать процессы во всех подробностях. Сейчас математическое моделирование представляет собой широко используемый метод исследования во всех областях науки.

Компьютерный эксперимент обладает рядом преимуществ. Во-первых, он дешев; во-вторых, он позволяет рассматривать изучаемый процесс в различных режимах его проведения, что важно в многовариантном случае; в-третьих, имеется возможность оценивать эффект, вносимый различными физическими факторами в общий результат и т.д. Часто возникает ситуация, когда реальный эксперимент вообще невыполним и моделирование является единственным способом изучения процесса. (Например, исследование параметров черных дыр.)

При изучении физической задачи с помощью математического моделирования, обычно проходят через следующие этапы:

1. Формулировка модели.
2. Исследование математической задачи.

3. Поиск алгоритма решения (аналитического или численного).
4. Создание компьютерной программы.
5. Исследование результатов и сопоставление их с имеющимися данными.
6. Доработка модели.

В данном курсе рассматриваются некоторые из них – формулировка модели, ее математическое исследование и изучение алгоритмов решения.

Формулировка модели существенно зависит от специфики конкретной задачи – поэтому рассмотрим лишь некоторые понятия и терминологию.

### *I. Задачи бывают прямые и обратные.*

А) Прямые – такие, которые изучались, например, в рамках курсов дифференциальных уравнений и методов математической физики. Задано уравнение и дополнительные условия и требуется найти его решение;

Б) Обратные – нахождение неизвестных характеристик модели по известному решению или известным его свойствам.

Обратные задачи бывают разного вида. Их условно можно разбить на группы:

1. Задачи обратные по самой постановке – например, задача поиска нефти. Требуется определить недоступные прямому наблюдению места расположения и объемы нефтяных пластов по проявлениям на поверхности земли: изменению гравитационной силы или отклику на электромагнитные возбуждения.

2. Задача определения функциональной структуры модели и значений ее параметров по опытным данным, как вспомогательный этап при решении прямой задачи. Пусть наша цель состоит в том, чтобы рассчитать прямой процесс. При этом часто заранее оптимальная структура модели однозначно не определена и значения части ее параметров неизвестны. Поэтому необходимо предварительно восстановить значения неизвестных параметров по имеющимся экспериментальным данным.

3. Задача синтеза или задача проектирования физической системы. Требуется так построить систему, чтобы иметь заданные характеристики на выходе. Например, выбрать последовательности нанесения отражающих слоев в задаче просветленной оптики или покрытия самолета-невидимки.

## **II. Модели могут формулироваться в разной форме.**

1. Как система дифференциальных и/или интегральных уравнений с соответствующими дополнительными (начальными и граничными) условиями.

2. В виде вариационных задач. Вариационная задача и ее уравнения Эйлера находятся в соответствии. В курсе вариационного исчисления стремились от вариационной задачи перейти к дифференциальной. Часто, при использовании численных методов, удобнее наоборот – от систем дифференциальных уравнений переходить к вариационным задачам. Например, в сложной системе вместо решения множества уравнений Ньютона бывает удобнее составить функцию Лагранжа и использовать принцип наименьшего действия.

3. Модель, в которой процесс описывается некоторыми уравнениями, называется детерминированной. Если модель описывается некоторыми вероятностными законами, она называется стохастической.

Исследование модели может проводиться аналитическими, асимптотическими или численными методами. Изучение поведения решения с помощью численных методов – не обязательный, но часто встречающийся элемент исследования задач.

## **III. Иерархия моделей.**

При моделировании любого процесса имеется иерархия моделей, описывающих процесс с различной степенью подробности путем учета различного количества физических факторов. Даже в простейшей задаче распространенного тепла можно рассматривать линейное уравнение с постоянными коэффициентами, а можно учитывать зависимость коэффициентов от температуры и конечную скорость распространения

тепла. Тем более, это актуально в многофакторных задачах. Например, в экологических задачах, задачах предсказания погоды и т.д.

Примером такой задачи является прогноз влажности на поле под сельскохозяйственной культурой. Все поле можно рассматривать как единое целое и писать соотношения баланса влаги для него. Можно почву разбить на слои и рассматривать баланс влаги в слоях – получим модель, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно учитывать множество факторов связанных с растениями, например, изменение интенсивности испарения жидкости с листьев в зависимости от внешней температуры, влажности и интенсивности солнечной радиации и т.д. Получаем очень широкий спектр моделей, в той или иной мере отражающих происходящее.

В этих задачах выбор удачной модели становится не просто важным, а центральным вопросом моделирования. Не надо думать, что наилучшая модель – та, которая учитывает максимально возможное количество факторов. Это не так, – с усложнением модели увеличивается количество неизвестных параметров, которые необходимо определить на основе имеющегося ограниченного опытного материала. Обратная задача определения параметров становится неустойчивой. Попытки прогнозировать процесс с помощью такой модели в условиях отличных от тех, в которых определялись параметры, приводят к ошибочным результатам.

Сложность модели должна быть согласована с объемом и точностью экспериментальных данных. В случае, когда в системе присутствуют несколько факторов одного порядка, все они должны быть или одновременно учтены в модели, или отброшены.

#### *IV. Универсальность математических моделей.*

Часто совсем разные естественнонаучные задачи приводят к сходным математическим моделям. Например, задача о диффузии вещества, задача теплопроводности и задача об уровне грунтовых вод описываются одинаковыми уравнениями. Исследовав одну математическую задачу, часто можно сделать выводы о решении и других физических задач. С другой

стороны, если Вы работаете с некоторой задачей, то ее решения целесообразно сравнивать с известными решениями других физических задач, приводящих к той же математической модели.

Немецкий химик Лотке рассматривал процесс автокаталитических реакций. Примером такой реакции может служить реакция  $\text{CaO} + 2\text{HF} \xrightarrow{\text{H}_2\text{O}} \text{CaF}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ . В этой реакции для того, чтобы разорвать связь  $\text{H}^+ - \text{F}^-$  нужно присутствие полярных молекул воды растягивающих ионы в разные стороны. Тем самым скорость реакции зависит от наличия молекул воды – продукта реакции. Такие реакции называются автокаталитическими.

Исследовав реакцию  $A \xrightarrow{X} X \xrightarrow{Y} Y \longrightarrow B$  Лотке описал ее протекание уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1 XA - k_2 YX \\ \frac{dY}{dt} = \bar{k}_2 YX - k_3 Y \end{cases}$$

Он показал, что в этой реакции происходит колебательный процесс, в котором концентрация компонентов  $X$  и  $Y$  периодически изменяется.

Позже, занимаясь экологической задачей, исследователь Вольтер предположил, что изменение популяции животных в системе «хищник-жертва» описывается сходными уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = bxy - \gamma y \end{cases}$$

где  $x$  – численность потенциальных жертв, а  $y$  – хищников. Используя результаты Лотке Вольтер пришел к выводу, что колебательный процесс изменения численности популяции должен иметь место и в системе «хищник-жертва».



Из универсальности математических моделей следует универсальность результатов. Если несколько, разных по физической природе процессов описываются сходной математической моделью, то очевидно, что полученные с помощью этой модели результаты применимы ко всем этим процессам.

При постановке математической задачи, тем более, если в нее входят несколько уравнений и различные дополнительные условия, важно провести изучение математического обоснования ее постановки. Это включает в себя:

- исследование внутренней непротиворечивости (не слишком ли много условий мы наложили на решение), т.е. вопрос существования решения;
- выяснения вопроса единственности решения (не слишком ли мало дополнительных условий мы задали);
- выяснение вопроса устойчивости решения при изменении наложенных дополнительных условий.

# Глава 1. Некоторые классические задачи математической физики.

## §1. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)

Задачей Гурса называется задача гиперболического типа, в которой начальные условия заданы на характеристиках.

Ранее в курсе ММФ изучалась задача  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  с начальными условиями, заданными при  $t = 0$ . Характеристиками этого уравнения являются прямые  $x = \pm at$ . Поэтому, начальные условия задавались не на характеристиках, и, следовательно, рассматривавшаяся задача не являлась задачей Гурса.

Рассмотрим простейшую задачу Гурса:

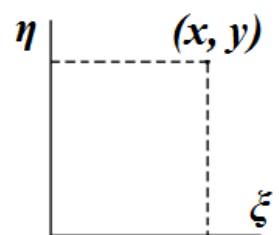
$$\begin{cases} u_{xy} = f(x, y), & x > 0, y > 0 \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u(0, y) = \varphi_2(y) \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \end{cases} \quad (1)$$

Проинтегрировав дважды исходное уравнение, получим решение этой задачи:

$$\int_0^x \int_0^y u_{\xi\eta} d\xi d\eta = u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0),$$

Откуда

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2)$$



Рассмотрим общую задачу Гурса (в области  $x > 0, y > 0$ ):

$$\begin{cases} u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u(0, y) = \varphi_2(y) \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а также  $a, b, c$  и  $f$  - непрерывно-дифференцируемые функции. Перепишем уравнение (3) в следующем виде:

$$u_{xy} = f(x, y) - (a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u) \quad (4)$$

Рассматривая правую часть уравнения (4), как неоднородность в уравнении (1), получаем из (2) следующую формулу:

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^y [f(\xi, \eta) - a(\xi, \eta)u_\xi - b(\xi, \eta)u_\eta - c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta \quad (5)$$

Сделав переобозначение

$$F(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

и дифференцируя (5) по  $x$  и по  $y$ , приходим к системе интегральных уравнений типа Вольтера

$$\begin{cases} u(x, y) = - \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta + F(x, y) \\ u_x(x, y) = - \int_0^y [a(x, \eta)u_\xi + b(x, \eta)u_\eta + c(x, \eta)u] d\eta + F_x(x, y) \\ u_y(x, y) = - \int_0^x [a(\xi, y)u_\xi + b(\xi, y)u_\eta + c(\xi, y)u] d\xi + F_y(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

относительно функций  $u(x, y)$ ,  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$ .

Как известно, уравнение Вольтера  $z(x) = \int_0^x K(x, \xi)z(\xi)d\xi + f(x)$  может быть решено методом последовательных приближений. Для этого рассматривают рекуррентную последовательность  $z_n$ , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} z_{n+1} = Az_n + f \\ z_0 \equiv 0 \end{cases}, \quad (7)$$

где  $Az_n = \int_0^x K(x, \xi)z_n(\xi)d\xi$ . В курсе интегральных уравнений было доказано, что последовательность  $z_n$  равномерно сходится к некоторой функции  $z$ , которая будет являться решением рассматриваемого интегрального уравнения. Доказательство строится на последовательных оценках для разности  $(z_{i+1} - z_i)$ .

В нашем случае, вводя вектор-функции  $U = \{u, u_x, u_y\}$  и  $\Gamma = \{F, F_x, F_y\}$ , систему уравнений (6) можно переписать в векторном виде:

$$U = AU + \Gamma, \quad (8)$$

где оператор  $A$  определяется правой частью (6). Аналогично случаю одного уравнения Вольтера, решение (8) может быть получено с помощью метода последовательных приближений. Вектор-функция  $U$  может быть найдена, как предел сходящейся последовательности  $U_n$ , определяемых из рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} U_{n+1} = AU_n + \Gamma \\ U_0 \equiv 0 \end{cases} \quad (9)$$

При этом  $U_n \rightarrow U$  равномерно, т.е. каждая из компонент вектор-функции  $U_n$  равномерно сходится к соответствующей компоненте вектор-функции  $U$ . Решение (6) существует и единственно.

Метод доказательства этих утверждений такой же, как и для (7), однако в многомерном случае оценки сложнее. Более подробно их можно изучить в учебниках [1, 2].

Непосредственным дифференцированием первого из уравнений (6) по  $x$  и  $y$  легко проверить, что функция  $u(x, y)$  - решение (6) удовлетворяет условиям (3). Следовательно, решение (3) существует. Решение задачи (3) единственно. Действительно, мы нигде не предполагали специального вида решения. Поэтому, для любого решения (3) можно провести преобразования, сделанные выше и прийти к системе уравнений (6), решение которой единственно.

## §2. Общая задача Коши для гиперболических уравнений.

### *Постановка общей задачи Коши.*

$$\begin{cases} Lu = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \\ u|_C = \varphi(x, y) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = \psi(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

В этой задаче характеристиками уравнения будут прямые  $x = const$  и  $y = const$ . На контур  $C$  наложим следующие условия:

- 1)  $C$  – гладкая кривая;
- 2)  $C$  – не является характеристикой;
- 3) Любая характеристика пересекает контур  $C$  один раз (Рис.1).

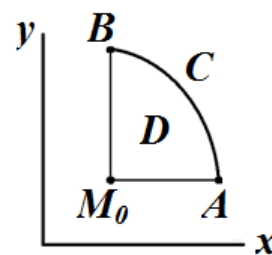


Рис.1

Оператор  $K$  вида

$$Kv = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv \quad (2)$$

называется сопряженным к оператору  $L$ .

$$\text{Нетрудно проверить, что } vLu - uKv = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} P = uv_x - vu_x - 2buv \\ Q = vu_y - uv_y + 2a uv \end{cases} \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (3) по области  $D$ , и используя формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned} \int_D (vLu - uKv) dx dy &= \frac{1}{2} \int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (Qdy + Pdx) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{M_0}^A Pdx + \frac{1}{2} \int_B^{M_0} Qdy + \frac{1}{2} \int_{AB} (Qdy + Pdx) \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим по отдельности интегралы, входящие в правую часть (5)

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^A Pdx &= \int_{M_0}^A (uv_x - vu_x - 2buv) dx = \int_{M_0}^A (uv_x + uv_x - 2buv) dx + vu \Big|_A^{M_0} = \\ &= 2 \int_{M_0}^A uRv dx + vu \Big|_A^{M_0}, \end{aligned}$$

где  $Rv = v_x - bv$

Аналогично, вводя оператор  $Tv = v_y - av$ , преобразуем второй интеграл в правой части (5):

$$\int_B^{M_0} Qdy = -2 \int_B^{M_0} Tvudy + vu|_B^{M_0}$$

Используя (5) и полученные выражения имеем:

$$\begin{aligned} (vu)|_{M_0} &= \frac{vu|_B + vu|_A}{2} - \int_{M_0}^A uRvdx + \int_B^{M_0} uTvdy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{AB} (Pdx + Qdy) + \int_D (vLu - uKv) dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

На функцию  $v$  пока не было наложено никаких условий кроме гладкости. Поэтому можно выбрать функцию  $v$  так, чтобы максимально упростить правую часть (6).

Потребуем, чтобы было выполнено:

$$\begin{cases} Kv = 0 \\ Rv = v_x - bv = 0 \text{ на } M_0A \\ Tv = v_y - av = 0 \text{ на } BM_0 \\ v = 1 \quad \text{в точке } M_0 \end{cases} \quad (7)$$

Функцией Римана  $v = v(M, M_0)$  называется функция, являющаяся решением задачи (7).

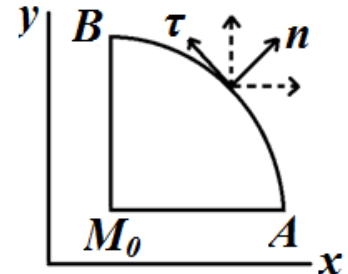
Задача (7) является задачей с данными на характеристиках – задачей Гурса. Эта задача была рассмотрена ранее. Ее решение существует и единственно.

Считая функцию Римана известной, подставим ее в выражение (6) и получим решение задачи (1) в виде:

$$u(M_0) = \frac{vu|_A + vu|_B}{2} + \int_D v f dx dy - \frac{1}{2} \int_{AB} (P dx + Q dy) \quad (8)$$

Для расчета последнего интеграла в (8) по контуру  $C$  между точками  $A$  и  $B$ , нужно представить частные производные функции  $u$  в следующем виде:

$$\begin{cases} u_x = u_\tau \cos(x, \tau) + u_n \cos(x, n) \\ u_y = u_\tau \cos(y, \tau) + u_n \cos(y, n) \end{cases}$$



Значения  $u_n$  и  $u_\tau$  определяются условиями на кривой  $C$  в задаче (1).

Формула (8) является обобщением формулы Даламбера. Из формулы (8) видно, что значение  $u(M_0)$  определяется условиями на участке  $AB$  кривой  $C$  и значениями  $f$  внутри характеристического (криволинейного) треугольника  $M_0AB$ .

Обратимся к требованию, наложенному выше на кривую  $C$ . Допустим, что характеристика пересекает контур  $C$  в двух точках. Тогда решение может не существовать.

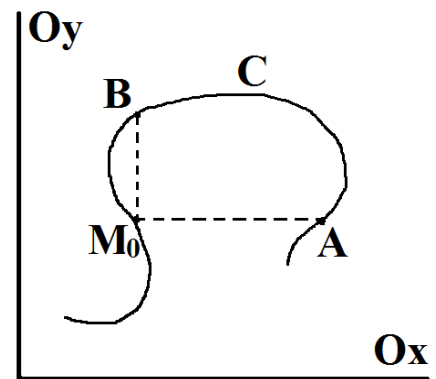


Рис. 2

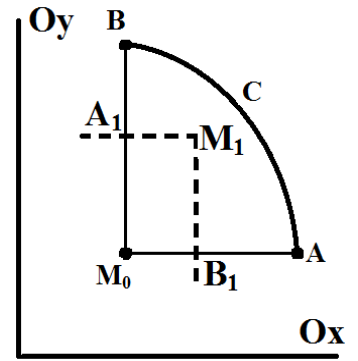
Действительно, рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2.

В точке  $M_0$  решение, с одной стороны, полностью определено условиями, заданными в криволинейном треугольнике  $M_0AB$ ; с другой стороны  $M_0 \in C$ , поэтому решение в этой точке определено вторым соотношением в (1). Если эти значения не совпадают, то решение не существует.



### Смысл функции Римана.

Функция Римана  $v(M, M_1)$  была определена в (8), как решение задачи с дифференциальным оператором  $\hat{K}$ . Рассмотрим решение  $w = w(M, M_1)$  следующей задачи с оператором  $L$ :



$$\begin{cases} Lw = 0 \\ (w_x + bw)|_{M_1A_1} = 0 \\ (w_y + aw)|_{M_1B_1} = 0 \\ w(M_1) = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Наша задача – показать, что функции  $v(M, M_1)$  и  $w(M, M_1)$  совпадают, т.е. решение (9) есть функция Римана. Имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_{M_0B_1M_1A_1} (vLw - wKv) dx dy = \int_{M_0}^{B_1} P dx + \int_{A_1}^{M_0} Q dy + \int_{M_1}^{A_1} [wv_x - vw_x - 2bvw] dx + \\ &+ \int_{B_1}^{M_1} [vw_y - wv_y + 2awv] dy = 2(vw)|_{M_0} - ((vw)|_{B_1} + (vw)|_{A_1}) + ((vw)|_{A_1} + (vw)|_{M_1}) \\ &- ((vw)|_{M_1} - (vw)|_{B_1}) \end{aligned}$$

Приведя подобные члены в правой части, получим:  $(vw)|_{M_0} = (vw)|_{M_1}$ . Это равенство, с учетом условий  $w(M_1) = 1$  и  $v(M_0) = 1$ , дает  $w|_{M_0} = v|_{M_1}$ . Отсюда имеем  $v(M_0, M_1) = w(M_0, M_1)$ . Таким образом, функция Римана есть решение задачи (9).

Для выяснения физического смысла функции Римана рассмотрим (обобщенное) решение задачи (1) с правой частью в виде дельта-функции и нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} Lu = \delta(M, M_1) \\ u|_C = \frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0 \end{cases} \quad (10)$$

По физическому смыслу задачи (10), ее решение является функцией влияния в точке  $M$  точечного импульса сообщенного в точке  $M_1$ . Из (8) следует, что решением этой задачи будет функция Римана  $u = v(M, M_1) = w(M, M_1)$ . Таким образом, функция Римана – это функция влияния точечного импульса.

### **Уравнение с постоянными коэффициентами.**

Пусть коэффициенты  $a(x, y)$  и  $b(x, y)$  равны тождественно нулю, а  $c = const$ . Тогда задача (9), определяющая функцию Римана, преобразуется в задачу:

$$\begin{cases} w_{xy} + cw = 0 \\ w = 1 \text{ на } M_0A \text{ и } M_0B \end{cases} \quad (11)$$

Найдем ее решение. Пусть точки  $M$  и  $M_0$  имеют координаты  $M = M(x, y)$ ,  $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ . Будем искать решение задачи (11) в виде  $w = g(\sqrt{(x-x_0)(y-y_0)})$ . Введем обозначение  $z = \sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}$ . Тогда

$$g_x = g_z z_x = g_z \frac{y-y_0}{2z}$$

$$g_{xy} = g_{zz} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4z^2} + g_z \left( \frac{1}{2z} - \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4z^3} \right) = \frac{g_{zz}}{4} + \frac{g_z}{4z}$$

С учетом условия  $g(0) = 1$  задача (11) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} g_{zz} + \frac{g_z}{z} + 4cg = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Ее решением является функция Бесселя нулевого порядка:  
 $g(x, y) = J_0\left(2\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)}\right)$ . Таким образом, найдена функция Римана для случая  $a = b = 0$ ,  $c = const$ .

### **Задача Коши для уравнения колебаний.**

Рассмотрим задачу Коши на бесконечной прямой для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(z) \\ u_t|_{t=0} = \psi(z) \end{cases} \quad (13)$$

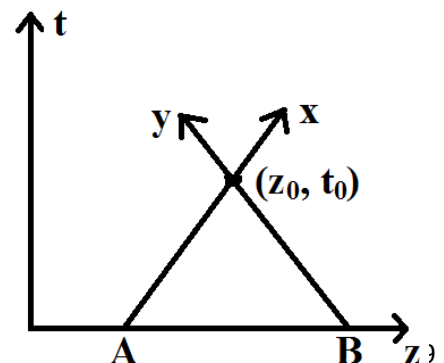
где  $a, b, g - const$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Будем искать решение в виде  $u = Ue^{(bz-at)/2}$

Подставив такой вид функции  $u(z, t)$  в систему (13), получим следующую систему уравнений относительно  $U(z, t)$ :

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{zz} + cU &= 0 \\ U|_{t=0} &= \varphi(z)e^{-bz/2} = \varphi_1(z) \\ U_t|_{t=0} &= \left(\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z)\right)e^{-bz/2} = \psi_1(z) \end{aligned} \quad (14)$$

где  $c = g + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ . Делаем замену

переменных:  $x = t + z$ ,  $y = t - z$ .



Соответственно:  $t = \frac{x+y}{2}$ ,  $z = \frac{x-y}{2}$ .

В переменных  $x, y$  уравнение задачи (14) приобретает вид:

$$U_{xy} + \frac{c}{4}U = 0 \quad (15)$$

Для него функция Римана построена в предыдущем пункте. Она равна

$$v = J_0\left(\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)}\right) = J_0\left(\sqrt{c}\sqrt{(t-t_0)^2 - (z-z_0)^2}\right). \quad \text{Формула (8)}$$

определяет решение задачи (15):

$$\begin{aligned} U(z_0, t_0) &= \frac{(Uv)|_A + (Uv)|_B}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B [(-U_x v + v_x U) dx + (U_y v - v_y U) dy] = \\ &= \frac{U|_A + U|_B}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B \left[ \left( -\frac{U_t + U_z}{2} v + \frac{v_t + v_z}{2} U \right) dz - \left( \frac{U_t - U_z}{2} v - \frac{v_t - v_z}{2} U \right) dz \right] = \\ &= \frac{U|_A + U|_B}{2} + \frac{1}{2} \int_A^B [(vU_t - Uv_t) dz] = \frac{\varphi_1(z_0 - t_0) + \varphi_1(z_0 + t_0)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \left[ \psi_1(z) J_0\left(\sqrt{c}\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}\right) - \varphi_1(z) \frac{J_1\left(\sqrt{c}\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}} \sqrt{ct_0} \right] dz \end{aligned} \quad (16)$$

Выражая с помощью (14) функции  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  через  $\varphi$  и  $\psi$ , получаем решение задачи (13).

Если  $a = b = g = 0$ , то  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\psi = \psi_1$ . Поскольку  $J_0(0) = 1$ , а  $J_1(0) = 0$  то формула (16) переходит в формулу Даламбера:

$$u(z_0, t_0) = \frac{\varphi(z_0 - t_0) + \varphi(z_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \psi(z) dz$$

### **Функция влияния точечного импульса.**

Функция влияния точечного импульса определяется, как решение (в классе обобщенных функций) задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \delta(z - z_0) \end{cases} \quad (17)$$

Используя (16) получаем:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \left\{ \frac{1}{2} \int_{z-t}^{z+t} \delta(\eta - z_0) e^{-\frac{b}{2}\eta} J_0 \left( \sqrt{c} \sqrt{t^2 - (\eta - z)^2} \right) d\eta \right\} = \\ &= \begin{cases} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}(z-z_0)} \frac{J_0 \left( \sqrt{c} \sqrt{t^2 - (z - z_0)^2} \right)}{2}, & \text{для } |z - z_0| < t \\ 0 & \text{, для } |z - z_0| > t \end{cases} \quad (18) \end{aligned}$$

где  $c = g + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ .

Если  $a = b = g = 0$ , то  $u(z, t) = \frac{1}{2} H(t - |z - z_0|) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{для } |z - z_0| < t \\ 0, & \text{для } |z - z_0| > t \end{cases}$

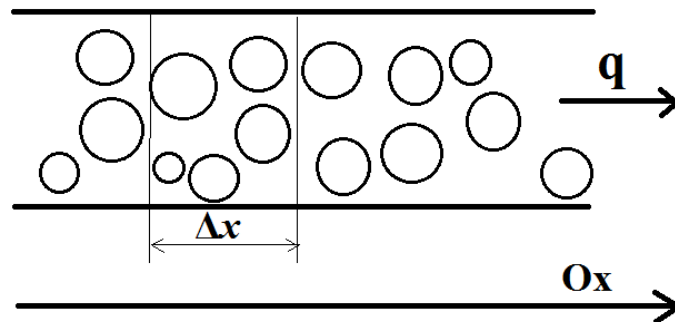
### **§3. Перенос вещества в двухфазной среде. Динамика сорбции.**

#### ***Постановка задачи.***

Сорбент – это вещество, способное собирать на своей поверхности некоторый компонент из окружающей среды. Таким веществом, например, является уголь в противогазе, или гранулы в фильтре для очистки питьевой

воды. Явление сорбции распространено в природных и технологических процессах. Рассмотрим задачу сорбции в простейшем виде.

Пусть имеется колонка, заполненная гранулами сорбента. По колонке слева направо с постоянной скоростью  $q$  движется поток жидкости (или газа), который переносит растворенное в нем изучаемое вещество - целевой компонент. Этот компонент может селективно осаждаться на поверхности гранул сорбента.

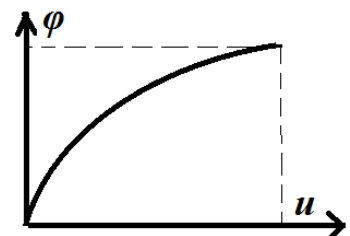


Введем следующие обозначения:

$u(x, t)$  - концентрация компонента в межзерновом пространстве (количество компонента в межзерновом пространстве на единицу объема колонки);

$a(x, t)$  - концентрация компонента, сорбированного на поверхности гранул (количество сорбированного компонента на единицу объема колонки).

Функция  $a = \varphi(u)$ , связывающая концентрацию компонента в фазе сорбента с его концентрацией в фазе раствора при условии их равновесия (равновесные концентрации) называется изотермой сорбции. С ростом концентрации компонента количество свободных мест на поверхности сорбента, куда могут садиться его молекулы, убывает. Поэтому кривая  $\varphi(u)$  выходит на насыщение.



Обычно рассматривают одну из двух изотерм: в случае малых концентраций - изотерму Генри  $a = \Gamma u$ , где  $\Gamma$  константа – наклон кривой

$\varphi(u)$  на начальном участке; в случае значительных концентраций – изотерму Ленгмюра  $a = \varphi(u) = \frac{k_1 u}{u + k}$ .

Поскольку изотерма является взаимно-однозначной функцией, можно рассматривать и обратную изотерму в виде  $u = \psi(a)$ . Обратные изотермы будут соответственно задаваться следующими функциями:

$$\text{для изотермы Генри } u = \psi(a) = \frac{a}{\Gamma}$$

$$\text{и для изотермы Ленгмюра } u = \psi(a) = \frac{ka}{k_1 - a}.$$

Рассмотрим некоторый малый участок  $\Delta x$  и запишем уравнение баланса рассматриваемого компонента за время  $\Delta t$ :

$$\int_x^{x+\Delta x} [a(\eta, t + \Delta t) + u(\eta, t + \Delta t) - a(\eta, t) - u(\eta, t)] d\eta = \int_t^{t+\Delta t} q[u(x, \tau) - u(x + \Delta x, \tau)] d\tau \quad (1)$$

Полагаем, что функции  $u(x, t)$  и  $a(x, t)$  имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда, поделив равенство (1) на  $\Delta x \Delta t$ , устремив  $\Delta x$  и  $\Delta t$  к нулю, получим уравнение баланса вещества в дифференциальном виде:

$$a_t + u_t + qu_x = 0 \quad (2)$$

Учтем, что сорбция вещества происходит не мгновенно, а за некоторое время. Скорость изменения концентрации сорбированного вещества пропорциональна разности текущей и равновесной концентраций. Дополняя уравнение (2) кинетическим уравнением, и задавая начальные и граничные условия, можно поставить простейшую задачу сорбции в области  $x > 0$ ,  $t > 0$ :

$$\begin{cases} a_t + u_t + qu_x = 0 \\ a_t = \beta(u - \psi(a)) \\ a|_{t=0} = u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

где  $\beta$  кинетический коэффициент.

Выражение  $\tau = t - x/q$  называется локальным временем. Значение  $\tau$  «запаздывает» относительно  $t$  на время переноса вещества от границы до рассматриваемой точки  $x$ . Рассмотрим  $u$  как функцию переменных  $\tau, x$ .

Тогда

$$\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial t} + q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + q \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial \tau} + q \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} \left( -\frac{1}{q} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q \frac{\partial u}{\partial x}$$

Таким образом, при переходе к локальному времени, выполнено:  $u_t + qu_x = qu_x$ . Это делает первое уравнение (3) более простым. Вообще, переход к локальному времени является типичным приемом в задачах переноса вещества.

Для решения задачи (3) введем новые переменные:

$$\tau = \beta \left( t - \frac{x}{q} \right), \quad \xi = \beta \frac{x}{q}$$

При этом область  $x > 0, t > 0$  переходит в область  $\xi > 0, \tau > -\xi$ .

Система уравнений (3) преобразуется в систему:

$$\begin{cases} a_\tau + u_\xi = 0 \\ a_\tau = u - \psi(a) \\ a|_{\tau=-\xi} = u|_{\tau=-\xi} = 0 \\ u|_{\xi=0} = u_0 \end{cases} \quad (4)$$

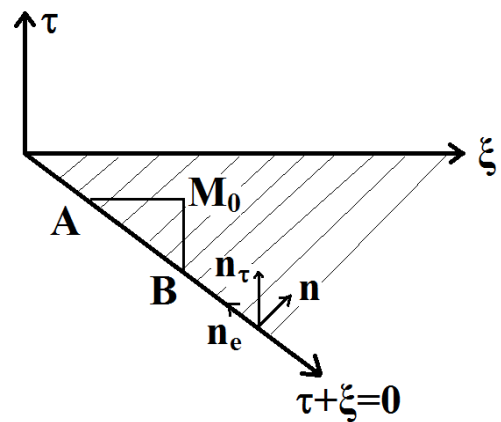


Рис. 1



Продифференцировав второе уравнение системы (4) по  $\xi$  и используя первое уравнение, имеем:

$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_{\tau} + \psi'(a)a_{\xi} = 0 \\ a|_{\tau+\xi=0} = 0, \quad a_{\tau}|_{\tau+\xi=0} = (u - \psi(a))|_{\tau+\xi=0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим произвольное решение (5) в области  $-\xi \leq \tau \leq 0$  (заштрихованной на рис.1). При любой фиксированной функции  $a$ , можно рассматривать  $\psi'(a)$ , как заданный переменный коэффициент  $k$ . Далее, на прямой  $\xi + \tau = 0$  выполнено:  $a_{\tau} = a_n \cos(\pi/4) + a_l \cos(\pi/4)$ , где  $l$  вектор вдоль прямой, а  $n$  по нормали к ней. (См. рис. 1). Отсюда и из граничных условий (5), получаем:  $a_n|_{\xi+\tau=0} = 0$ . В результате, в заштрихованной области имеем задачу:

$$\begin{cases} a_{\xi\tau} + ka_{\xi} + a_{\tau} = 0 \\ a = a_n = 0 \text{ при } \xi + \tau = 0 \end{cases}$$

Согласно формуле (8) из §2, значение  $a$  в любой точке  $M_0$ , принадлежащей заштрихованной области, определяется заданными (нулевыми в данном случае) условиями на отрезке  $AB$  – основании характеристического треугольника  $M_0AB$ . Отсюда  $a$  равно нулю всюду в заштрихованной области. По непрерывности  $a = 0$  при  $\tau = 0$ .

На границе  $\xi = 0$ , согласно (4), выполнено:

$$a_{\tau} = u_0 - \psi(a), \quad a_{\tau=0} = 0 \quad (6)$$

Обозначим решение этой задачи, как  $Q(\tau)$ . Тогда в области  $\xi > 0, \tau > 0$  получаем задачу:

$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_{\tau} + \psi'(a)a_{\xi} = 0 \\ a|_{\tau=0} = 0, \quad a|_{\xi=0} = Q(\tau) \end{cases} \quad (7)$$

к исследованию решения которой мы и перейдем.

Рассмотрим линейный случай - задачу с изотермой Генри, и нелинейный случай – задачу с изотермой Ленгмюра.

### *Линейный случай.*

Пусть  $\varphi(u) = \Gamma u$ , соответственно  $\psi(a) = a/\Gamma$ . Для этого случая решаем задачу (6) и подставляем найденную функцию  $Q(\tau)$  в (7). Получаем задачу Гурса:

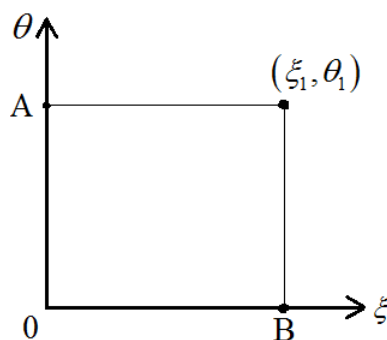
$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_{\tau} + a_{\xi} / \Gamma = 0 \\ a|_{\tau=0} = 0, \quad a|_{\xi=0} = \Gamma u_0 (1 - e^{-\tau/\Gamma}) \end{cases}$$

Для простоты записи введем новую переменную  $\theta = \tau/\Gamma$  и выберем без ограничения общности (задача линейна) значение  $u_0$  таким, что  $\Gamma u_0 = 1$ . Тогда в области  $\theta > 0, \tau > 0$  имеем:

$$\begin{cases} a_{\theta\xi} + a_{\theta} + a_{\xi} = 0 \\ a|_{\theta=0} = 0, \quad a|_{\xi=0} = 1 - e^{-\theta} \end{cases} \quad (8)$$

Делаем замену функции:  $a = ze^{-(\theta+\xi)}$ . Вычисляя производные  $z$  по  $\xi$  и  $\theta$ , подставляя их в (8), получаем:

$$\begin{cases} z_{\xi\theta} - z = 0 \\ z|_{\theta=0} = 0, \quad z|_{\xi=0} = e^{\theta} - 1 \end{cases}$$



Функция Римана для этой задачи была

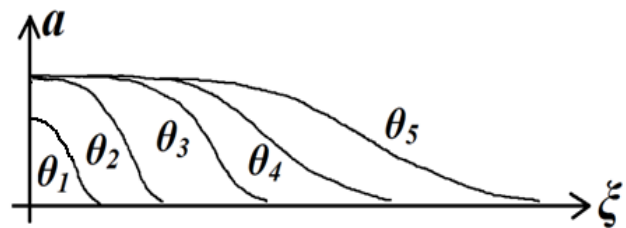
построена в §2. Она имеет вид:  $v(\xi, \theta, \xi_1, \theta_1) = I_0 \left( 2\sqrt{(\xi - \xi_1)(\theta - \theta_1)} \right)$ , где  $I_0$  - функция Инфельда нулевого порядка. Согласно (8) из §2 имеем:

$$\begin{aligned}
z(\theta_1, \xi_1) &= \frac{(zv)_A + (zv)_B}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B [(zv)_\xi - v z_\xi] d\xi + (v z_\theta - z v_\theta) d\theta = \\
&= \frac{e^{\theta_1} - 1}{2} - \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^0 [v z_\theta - z v_\theta]_{|\xi=0} d\theta = \frac{e^{\theta_1} - 1}{2} + \frac{[zv]_{\theta=0, \xi=0} - [zv]_{\theta=\theta_1, \xi=0}}{2} + \int_0^{\theta_1} [v z_\theta]_{|\xi=0} d\theta = \\
&= \int_0^{\theta_1} e^\theta I_0(2\sqrt{\xi_1(\theta_1 - \theta)}) d\xi
\end{aligned}$$

Отсюда находим, что решение задачи (7) выражается формулой:

$$\begin{aligned}
a(\theta_1, \xi_1) &= z e^{-(\theta_1 + \xi_1)} = \int_0^{\theta_1} e^{-(\theta_1 - \theta)} e^{-\xi_1} I_0(2\sqrt{\xi_1(\theta_1 - \theta)}) d\theta = \\
&= e^{-\xi_1} \int_0^{\theta_1} e^{-\theta} I_0(2\sqrt{\xi_1 \theta}) d\theta
\end{aligned}$$

На рисунке изображен вид решения для нескольких моментов времени  $\theta$ . Значение концентрации целевого компонента в фазе сорбента на границе (входе в сорбционную колонку) со временем возрастает до 1, фронт распространения компонента продвигается вдоль колонки, расплываясь.



### Нелинейный случай.

Рассмотрим случай изотермы Ленгмюра

$$a = \varphi(u) = \frac{k_1 u}{u + k}$$

Коэффициент  $k_1$  - это максимальное количество компонента в сорбированной фазе, соответствующее  $u \rightarrow \infty$ . ( $0 \leq a < k_1$ ). Обратная

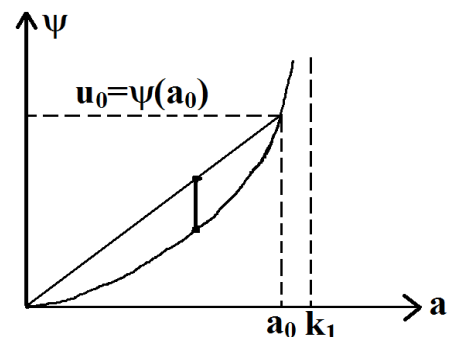


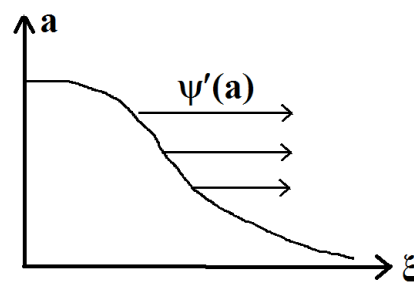
Рис. 2.

зависимость равновесного значения  $u$  от  $a$  имеет вид  $u = \psi(a) = \frac{ka}{k_1 - a}$ .

Последняя зависимость показана на рисунке. Находим  $\psi'(a) = \frac{k_1 k}{(k_1 - a)^2} > 0$ ,

$$\psi'' = \frac{2k_1 k}{(k_1 - a)^3} > 0.$$

Рассмотрим качественный характер решения уравнений задачи (4) в этом случае. Пусть профиль  $a$ , как функции  $\xi$ , имеет вид плавно убывающей функции. Тогда,  $u \approx \psi(a)$ . Из первого уравнения  $a_\tau + u_\xi = 0$  получаем:  $a_\tau + \psi'(a)a_\xi = 0$ . Это - квазилинейное уравнение.



Как известно из курса дифференциальных уравнений (и будет нами обсуждаться в §1 Главы 2), в этом уравнении  $\psi'(a)$ - коэффициент, стоящий при  $a_\xi$  - имеет смысл скорости переноса со временем значения  $a$  вдоль оси  $\xi$ . Поскольку  $\psi'(a)$ растущая функция  $a$ , то большие значениям  $a$  переносятся быстрее. Фронт становится более крутым. Однако из уравнения кинетики следует, что  $a_\tau = -u_\xi = u - \psi(a) < u_{\max}$ . Следовательно, крутизна фронта ограничена. Решение выходит на режим бегущей волны  $a = f(\xi - v\tau)$ , когда образуется некоторый установившийся профиль, переносимый вдоль оси  $\xi$ . Численное моделирование процесса, подтверждает приведенные качественные соображения.

Определим вид функции  $f$ . Для этого рассмотрим решение в форме бегущей волны  $a = f(\xi - v\tau)$  следующей задачи на бесконечном участке  $-\infty < \xi < \infty$ :

$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_\tau + \psi'(a)a_\xi = 0 \\ a|_{\xi=-\infty} = a_0, a|_{\xi=\infty} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя искомый вид решения в условия (9) получаем:

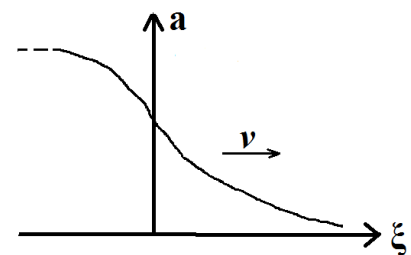
$$\begin{cases} -vf'' - vf' + \psi'(f)f' = 0 \\ f(-\infty) = a_0, \quad f'(-\infty) = f'(\infty) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (10) от  $-\infty$  до  $\infty$ , имеем:  $va_0 = \psi(a_0)$ . Отсюда находим скорость переноса:  $v = \frac{\psi(a_0)}{a_0}$ . Интегрируя уравнение (10) от  $\alpha$  до  $\infty$ , получаем:  $vf'(\alpha) + vf(\alpha) - \psi(f(\alpha)) = 0$ . Используя найденное значение  $v$ , имеем:

$$\frac{\psi(a_0)}{a_0} \frac{df}{d\alpha} = \psi(f) - \frac{\psi(a_0)}{a_0} f.$$

Это уравнение определяет профиль бегущей волны  $f(\alpha)$ . Значение правой части уравнения равно длине вертикального отрезка между прямой и кривой, соединяющих точку 0 с точкой  $(a_0, \psi(a_0))$ , на рис. 2.

Видно, что производная  $\frac{df}{d\alpha}$  отрицательна, мала при  $a \approx 0$  и  $a \approx a_0$  и возрастает по модулю в средней части интервала значений  $a$ .



Итак, сравнивая результаты, полученные для линейного и нелинейного случаев, видим, что в линейном случае фронт волны концентрации представляет собой продвигающийся по сорбционной колонке расплывающийся профиль. В нелинейном случае образуется бегущая волна постоянного профиля. Образование подобных структур имеет место во многих нелинейных задачах.

## §4. Метод подобия. Задача Стефана

### *Метод подобия*

В некоторых физических задачах уравнения и дополнительные условия сохраняются, если переменные  $x_i$  изменить в некоторой пропорции.

В этом случае целесообразно применять метод подобия, позволяющий уменьшать число переменных, взяв в качестве новых переменных комбинацию старых. Рассмотрим этот прием на примере известной нам одномерной задачи теплопроводности в бесконечной области  $-\infty < x < \infty$ :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что при умножении переменной  $t$  на  $k^2$  и переменной  $x$  на  $k$  все уравнения сохраняются. Поэтому можем искать решение в виде функции переменной  $\frac{x}{\sqrt{t}}$ . Обозначим  $\frac{x}{2a\sqrt{t}} = z$ . Ищем решение в форме  $u = f(z)$ .

Тогда первое уравнение системы (1) будет выглядеть так:  
 $-f' \frac{z}{2t} = a^2 f'' \frac{1}{4a^2 t}$ , а вся система (1) приводится к виду:

$$\begin{cases} f'' = -2zf' \\ f(-\infty) = 0 \\ f(\infty) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Задача (2) легко решается. Имеем:  $f' = Ce^{-z^2}$ . Отсюда  $f(z) = C \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx$ .

Константу  $C$  определяем подстановкой решения в правое граничное условие:  $f(\infty) = 1 = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = C\sqrt{\pi}$ . Следовательно,  $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

Таким образом:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 + \Phi(z)) \quad (3)$$

где  $\Phi$  - интеграл ошибок. И, наконец, возвращаясь к исходным переменным, получаем известное решение задачи:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left( 1 + \Phi \left( \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right)$$

Если исходное уравнение нелинейно, то взаимосвязь между переменными помогает свести уравнение в частных производных к уравнению в обыкновенных производных. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = (k(u)u_x)_x \\ u(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

Заменой  $\frac{x}{2\sqrt{t}} = z$  система приводится к виду:

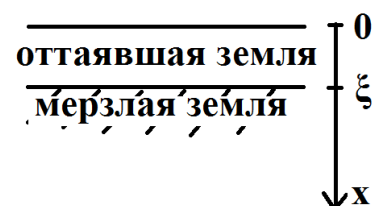
$$\begin{cases} (k(f)f')' = -2zf' \\ f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Полученное уравнение в системе (5) также является нелинейным, поэтому аналитически его решить не представляется возможным. Однако исследовать и численно решить задачу (5) заметно легче, чем исходную задачу (4).

### **Задача Стефана (задача о фазовом переходе)**

Задачей Стефана называется задача о распространении тепла в двух соприкасающихся областях, граница между которыми может перемещаться вследствие фазового перехода.

Рассмотрим эту задачу на примере процесса оттаивания мерзлой земли. Пусть везде в почве, ниже дневной поверхности, начальная температура



отрицательная и равная  $C_- < 0$ , а на поверхности, начиная с момента времени  $t = 0$ , температура положительная, постоянная и равная  $C_+ > 0$ . С течением времени земля прогревается вглубь и при достижении нулевой температуры – оттаивает. Требуется определить температурный профиль почвы и скорость движения границы, отмеченной на рис. координатой  $\xi$ , на которой температура равна нулю и происходит переход воды из фазы льда в фазу жидкости.

Физические коэффициенты у замерзшей и оттаявшей земли различны. Поэтому для описания теплопереноса в этих зонах будем рассматривать отдельно температуру  $u_1$  - для  $x < \xi$  и  $u_2$  - для  $x > \xi$ .

Учтем, что фазовый переход требует затрат тепла. Пусть  $\lambda$  - скрытая теплота плавления. Тогда процесс можно описать следующей моделью:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi < x < \infty \\ u_1(\xi, t) = u_2(\xi, t) = 0 \\ \left( k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=\xi} = -\lambda \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \xi \Big|_{t=0} = 0 \\ u_1 \Big|_{x=0} = C^+ > 0, \quad u_2 \Big|_{t=0} = C^- < 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Исходя из соображений подобия, будем искать решение в виде  $u_i = f_i(z)$ , где  $i = 1, 2$ , а  $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ . Обозначим значение  $z$ , соответствующее границе фазового перехода, как  $\alpha$ . Тогда

$$\xi = 2\alpha\sqrt{t} \quad (7)$$

Подставляя такой вид решения в (6), получим следующую систему уравнений:



$$\begin{cases} a_1^2 f_1'' = -2zf_1', 0 < z < \alpha \\ a_2^2 f_2'' = -2zf_2', \alpha < z < \infty \\ f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0 \\ \left. (k_1 f_1' - k_2 f_2') \right|_{z=\alpha} = -2\lambda\alpha \\ f_1(0) = C^+ > 0 \\ f_2(\infty) = C^- < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение последней задачи будем искать в виде:

$$\begin{cases} f_1 = C^+ + p_1 \Phi\left(\frac{z}{a_1}\right) \\ f_2 = C^- + p_2 \left[ 1 - \Phi\left(\frac{z}{a_2}\right) \right] \end{cases}$$

При таком выборе формы решения, функции  $f_i$  удовлетворяют уравнениям теплопроводности (См. переход от (2) к (3)), а также выполнены условия при  $z=0$  и  $z=\infty$ . Для определения значений параметров  $p_i$  и  $\alpha$  используем оставшиеся третье и четвертое уравнение системы (8). Получаем:

$$\begin{cases} C^+ + p_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a_1}\right) = 0 \\ C^- + p_2 \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{a_2}\right) \right] = 0 \\ \frac{k_1 p_1}{a_1} e^{-\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2} + \frac{k_2 p_2}{a_2} e^{-\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^2} = -2\lambda\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Выражая  $p_1$  и  $p_2$  из первых двух уравнений этой системы и подставляя их в третье уравнение, получаем алгебраическое уравнение для определения параметра  $\alpha$ :

$$\frac{k_1 C^+}{a_1} \frac{e^{-\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)} + \frac{k_2 C^-}{a_2} \frac{e^{-\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^2}}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)} = \lambda \alpha \sqrt{\pi} \quad (10)$$

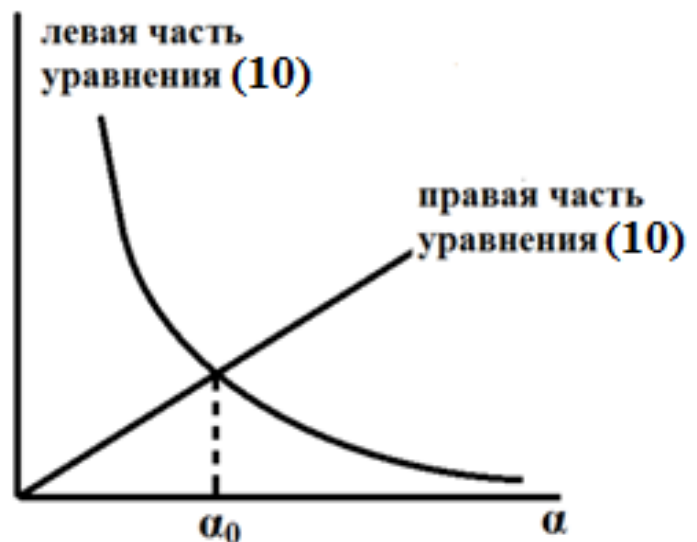
Заметим, что с ростом  $\alpha$  числитель первого слагаемого убывает, а знаменатель – растет. Таким образом, первое слагаемое левой части уравнения (10) монотонно убывает с ростом  $\alpha$ . Нетрудно также проверить, что и второе слагаемое также монотонно убывает (оно является отрицательным и монотонно растет по модулю). Для этого рассмотрим следующий интеграл, являющийся с точностью до константы обратным ко второму слагаемому (10):

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(x)] e^{x^2} = \int_x^{\infty} e^{-\alpha^2 + x^2} d\alpha = \int_x^{\infty} e^{-(\alpha-x)(\alpha+x)} d\alpha \leq \int_x^{\infty} e^{-(\alpha-x)2x} d\alpha = \frac{1}{2x}$$

Его производная отрицательна:

$$\frac{dI}{dx} = -1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(x)] e^{x^2} 2x < 0$$

Мы получили, что второе слагаемое в (10) является отрицательным ( $C_- < 0$ ) и монотонно растет по модулю с ростом  $\alpha$ . В связи с этим, оба слагаемых в левой части уравнения (10) монотонно убывают, а правая часть уравнения является возрастающей функцией. Значит уравнение (10) имеет единственное решение.



По найденному из уравнения (10) значению параметра  $\alpha$ , получаем из (7) закон движения фазовой границы. Зная  $\alpha$ , находим из (9) коэффициенты  $p_1$  и  $p_2$ , что определяет функции  $f_i$  - решение исходной задачи.

## §5. Постановка задач с уравнением Гельмгольца в неограниченной области.

Уравнением Гельмгольца называется уравнение вида:

$$\Delta u + cu = f$$

Постановка задач в неограниченной области с этим уравнением и свойства решения существенно зависят от знака коэффициента  $c$ .

Типичной физической задачей, приводящей к уравнению Гельмгольца с отрицательным значением  $c$ , является следующая задача. Рассмотрим уравнения диффузии вещества с его распадом при наличии стационарных источников.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u - ku + F(M)$$

С течением времени решение выходит на стационарный режим, при котором  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Ему соответствует уравнение Гельмгольца

$$\Delta u - \chi^2 u = f \tag{1}$$

где  $\chi^2 = \frac{k}{a^2}$ , а  $f = \frac{F}{a^2}$ .

В курсе «Методов математической физики» было показано, что для уравнения (1) справедлив принцип максимума. Он гласит, что в замкнутой области решение не может достигать положительного максимума или отрицательного минимума во внутренней точке.

На базе принципа максимума легко доказать, что решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = f \\ u \rightarrow 0 \text{ равномерно по углу} \\ r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

единственно.

Действительно, пусть  $u_1$  и  $u_2$  - два различных решения задачи (2), а  $w = u_1 - u_2$ . Функция  $w$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Delta w - \varepsilon^2 w = 0 \\ w \Rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Пусть  $w \neq 0$  в некоторой точке  $M_0$ . Рассмотрим сферу  $C_R$  большого радиуса  $R$ , с центром в начале координат, включающую  $M_0$  внутрь себя. Из принципа максимума и условий на бесконечности следует:  $|w(M_0)| \leq \max_{M \in C_R} |w(M)| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$ . Отсюда  $w(M_0) = 0$ . Поскольку  $M_0$  произвольная точка, то  $w \equiv 0$  и решение задачи (2) единственно.

Теперь обратимся к уравнению Гельмгольца с положительным коэффициентом  $c = k^2$ :

$$\Delta u + k^2 u = f \quad (3)$$

Уравнение такого типа может получиться при решении задачи колебаний:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v + F(M) e^{i\omega t}$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде  $v = u(M) e^{i\omega t}$ . При подстановке  $v$  в уравнение и сокращения на  $e^{i\omega t}$  для функции  $u(M)$

получим:  $\Delta u + k^2 u = -\frac{F}{a^2}$ , где  $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$ , то есть уравнение вида (3).

Для уравнения (3) принцип максимума не справедлив.

Пусть функция  $f$  финитная, т.е. отличная от нуля только в некоторой конечной области  $D$ . С помощью объемных потенциалов можно построить два решения, стремящиеся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Действительно, фундаментальными решениями однородного уравнения (3) будут:

$$U(M, P) = \frac{e^{\pm ikR_{MP}}}{R_{MP}}. \text{ Следовательно, решениями (3) являются функции}$$

$$u_{1,2}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{\pm ikR_{MP}}}{R_{MP}} f(P) dV_P. \text{ При любом выборе знака в показателе}$$

экспоненты решение убывает, когда точка удаляется от области  $D$ . Получаем, что условия  $u \rightarrow 0$   $r \rightarrow \infty$  не достаточно для выделения единственного решения.

### **Условия излучения**

Рассмотрим однородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w \tag{4}$$

Будем искать его решение в виде  $w(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}$ . Нетрудно

проверить, что после подстановки указанного вида решения в уравнение, для

функции  $v(r, t)$  получим:  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ . Решением последнего уравнения

являются произвольные функции от переменных  $(r \pm at)$ . Поэтому

$w_1(r, t) = \frac{f_1(r + at)}{r}$  и  $w_2(r, t) = \frac{f_2(r - at)}{r}$  являются решениями уравнения

(4).

Функция  $w_1(r, t)$  представляет собой возмущение, уходящее от источника в центре на бесконечность - физически реальное решение. Функция  $w_2$  является, наоборот, сходящейся волной.

Считая временную зависимость гармонической, получаем  $w_1(r, t) = u_1(M) e^{i\omega t} = \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\omega t}$  и  $w_2(r, t) = u_2(M) e^{i\omega t} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t}$ .

Соответственно, существуют два решения однородного уравнения (3):  $\frac{e^{-ikr}}{r}$  и  $\frac{e^{ikr}}{r}$ .

Чтобы выделить решение  $u_1$ , соответствующее  $w_1$ , можно использовать следующее условие:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + iku_1 = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5)$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial r} u_1(r) + iku_1 = \left[ -ik \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right] + ik \frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{e^{-ikr}}{r^2} = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_2(r) + iku_2 = \left[ ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right] + ik \frac{e^{ikr}}{r} = O\left(\frac{1}{r}\right). \text{ Следовательно, условию (5)}$$

решение  $u_2$  не удовлетворяет.

Теперь покажем, что решение задачи

$$\Delta u + k^2 u = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (6)$$

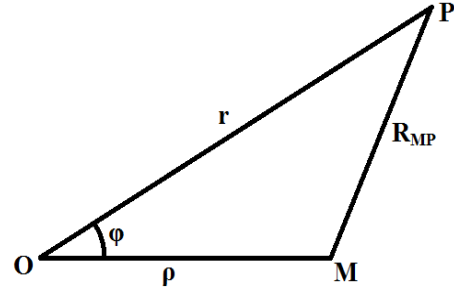
$$u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

единственно. Последние два условия в задаче (6) называются условиями излучения Зоммерфельда.

Вначале рассмотрим фундаментальное решение уравнения (3):

$$U(M, P) = \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}}.$$

Фиксируем точку  $M$ , а точку  $P$  будем удалять от нуля. При этом  $\rho$  постоянно, а  $r$  и  $R = R_{MP}$  увеличиваются. Имеем:



$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi} = r \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r} \cos \varphi}$$

Т.к.  $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \bar{o}(x)$ , то при  $r \rightarrow \infty$  справедливо:  $R = r \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)\right)$ .

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}} = \frac{1 - (\rho/r) \cos \varphi}{\sqrt{1 + (\rho/r)^2 - 2(\rho/r) \cos \varphi}} = 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Проверим, что для фундаментального решения  $U(M, P) = \frac{e^{-ikR}}{R}$

выполнены условия Зоммерфельда:

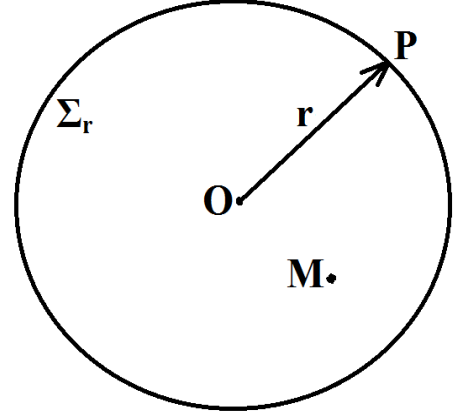
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) + ik \frac{e^{-ikR}}{R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-ikR}}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial r} + ik \frac{e^{-ikR}}{R} = \\ &= \left( -ik \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR}}{R^2} \right) \left( 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right) + ik \frac{e^{-ikR}}{R} = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Теперь докажем единственность решения задачи (6).

Пусть  $u_1(M)$  и  $u_2(M)$  - два разных решения этой задачи. Тогда функция  $z = u_1 - u_2$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned}\Delta z + k^2 z &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial r} + ikz &= \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \\ z &= \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$



Фиксируем произвольную точку  $M$  и возьмем сферу большого радиуса  $r$  так, что  $M$  лежит внутри сферы. Напишем 3-ю формулу Грина:

$$4\pi z(M) = \int_{\Sigma_r} \left( \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \frac{\partial z}{\partial n}(P) - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right) z \right) d\sigma_P$$

Т.к.  $\frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{P \in \Sigma_r} = \frac{\partial z}{\partial r} \Big|_{P \in \Sigma_r}$ , то

$$\begin{aligned}4\pi z(M) &= \int_{\Sigma_r} \left( \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \left( -ikz + \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \right) - \left( -ik \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} + \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \right) z \right) d\sigma_P = \\ &= \int_{\Sigma_r} \left( \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) - \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) z \right) d\sigma_P = \int_{\Sigma_r} \bar{o}\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma_P\end{aligned}$$

Площадь сферы  $\Sigma_r$  с ростом  $r$  растет, как  $r^2$ . Поэтому

$$4\pi z(M) = \int_{\Sigma_r} \bar{o}\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma_P \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad \text{Следовательно } z(M) = 0. \quad \text{В силу}$$

произвольного выбора точки  $M$ , получаем  $z \equiv 0$ , что означает единственность решения задачи (6).



*Замечание 1:*

Условия  $\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$ ,  $u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$  позволяют отобрать

единственное решение уравнения  $\Delta u + k^2 u = f$  в неограниченной области.

Условия  $\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$ ,  $u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$  также позволяют выделить

единственное (другое) решение. В этом смысле они равноценны. Если же к

уравнению  $\Delta u + k^2 u = f$  мы пришли, описывая пространственную часть

решения уравнения колебаний (в случае, когда колебания гармонические по

времени), то знак перед слагаемым  $iku$  в условиях излучения должен быть

согласован с выбором знака у временной гармоники. А именно, если

решение уравнения колебаний ищется в виде  $v = u(M)e^{i\omega t}$ , то физически

разумное, расходящееся от источников решение, соответствует условию

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right).$$

*Замечание 2:*

В двумерном случае условия излучения имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), u = \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

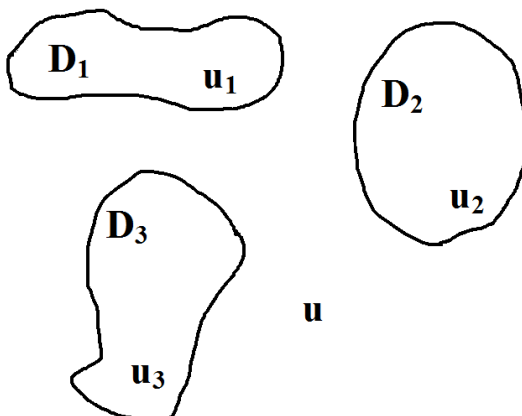
### ***Математическая задача дифракции.***

Задача дифракции возникает при изучении рассеяния различного вида волн (сейсмических, звуковых, электромагнитных) на препятствиях.

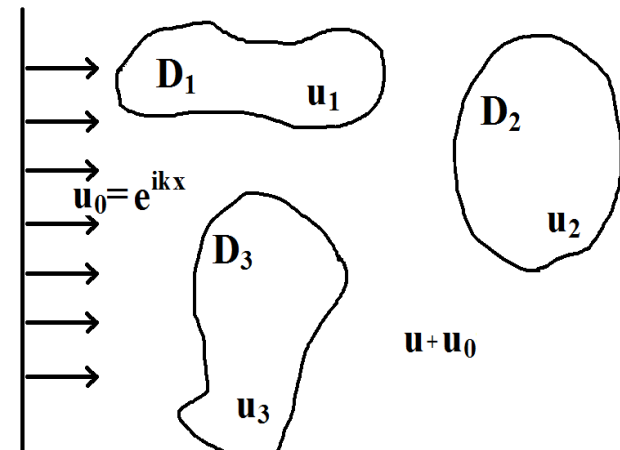
Пусть в неограниченном пространстве  $D$  расположены области  $D_i$ , в которых физические характеристики отличны от характеристик в  $D$ . Пусть под действием источников возникают колебания  $v$ , гармонические по времени. Пусть  $u$  - пространственная часть функции  $v$ , то есть  $v = u(M)e^{i\omega t}$ . Обозначим функцию  $u$  внутри  $D_i$  как  $u_i$ . На границе  $\Sigma_i$  областей  $D_i$  должны сопрягаться значения  $u$  и  $u_i$ , а также (с некоторыми коэффициентами) их нормальные производные. Например, пусть рассматриваются электромагнитные колебания, а  $v$  - потенциал электрического поля. Тогда при переходе через границу области остается непрерывными потенциал ( $u|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i}$ ) и нормальная составляющая индукции электрического поля, равная  $\varepsilon E_n = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma_i}$ . Следовательно,

$$\text{выполнено } \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma_i} = \varepsilon_i \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\Sigma_i}.$$

Общая система для определения функций  $u_i$  состоит из уравнений Гельмгольца, условий на границах областей  $D_i$  и условий излучений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = f \quad \text{при } M \notin D_i \\ \Delta u_i + k^2 u_i = f_i \quad \text{при } M \in D_i \\ u|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i} \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma_i} = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\Sigma_i} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o} \left( \frac{1}{r} \right) \\ u = \underline{O} \left( \frac{1}{r} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{D}_1 \quad u_1 \\ \text{D}_2 \quad u_2 \\ \text{D}_3 \quad u_3 \\ \mathbf{u} \end{array}$$


Другая задача – это поиск результата рассеяния на препятствиях падающей из бесконечности волны. Обозначим пространственную часть этой волны, как  $u_0 = e^{ikx}$ . Тогда имеем задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{при } M \notin D_i \\ \Delta u_i + k^2 u_i = 0 \quad \text{при } M \in D_i \\ (u_0 + u)|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i} \\ \alpha \left( \frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Sigma_i} = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o} \left( \frac{1}{r} \right) \\ u = \underline{O} \left( \frac{1}{r} \right) \end{array} \right.$$


The diagram shows three obstacles labeled  $D_1$ ,  $D_2$ , and  $D_3$ . A plane wave  $u_0 = e^{ikx}$  is incident from the left. The total field is  $u + u_0$ . The field in each region is  $u_1$ ,  $u_2$ , and  $u_3$ .

Единственность решения задач в рассмотренных постановках доказывается, например, в учебнике [1].

### ***Принцип предельного поглощения.***

Условия Зоммерфельда можно использовать, если источник излучения находится в локализованной области. Если же источники или препятствия, от которых происходит отражение, уходят на бесконечность, то требуются другие принципы выделения единственного решения. Рассмотрим один из них – принцип предельного поглощения.

Вначале приведем наводящие соображения. Если происходит процесс колебаний с затуханием, то приходящие из бесконечности волны, чтобы дойти до области начала координат, должны иметь на бесконечности большую амплитуду. Поэтому, чтобы отсечь эту физически нереальную часть решения, достаточно наложить условие малости решения на бесконечности. Рассмотрим следующую задачу в неограниченной области. Пусть функция  $v$  является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v - F(M) e^{i\omega t}$$

Ищем решение задачи в виде  $v = u(M) e^{i\omega t}$ . Тогда получим:

$$\Delta u + \left( \frac{\omega^2}{a^2} - i \frac{\gamma \omega}{a^2} \right) u = \frac{F}{a^2}$$

Делая замену  $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$ ,  $\beta = \frac{\gamma \omega}{a^2}$  и  $f = \frac{F}{a^2}$ , имеем:

$$\Delta u + (k^2 - i\beta)u = f$$

Согласно сказанному, для выделения единственного решения достаточно потребовать, чтобы  $u \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  равномерно относительно угла.

Теперь сформулируем принцип предельного поглощения.

Пусть требуется решить уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = f \tag{7}$$

где  $k$  - **вещественный** коэффициент. Пусть функция  $\bar{u}$  является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + (k^2 - i\beta) \bar{u} = f \\ \bar{u} \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty \end{cases} \tag{8}$$

Тогда, в качестве решения задачи (7) будем понимать функцию  $u = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{u}$ .

Проверим, что в случае, когда  $f$  финитная функция, принцип предельного поглощения выделяет то же решение, что и условия излучения Зоммерфельда.

Пусть  $q = q_1 + iq_2$  - комплексное число, такое что  $q^2 = k^2 - i\beta$ . Тогда уравнение задачи (8) переписывается в виде:

$$\Delta \bar{u} + q^2 \bar{u} = f \quad (9)$$

Имеем:  $q^2 = (q_1)^2 - (q_2)^2 + 2iq_1q_2 = k^2 - i\beta$ . Отсюда:

$$\begin{cases} k^2 = (q_1)^2 - (q_2)^2 \\ \beta = -2q_1q_2 \end{cases}$$

Эта алгебраическая система сводится к биквадратному уравнению. Решая его и учитывая, что  $q_1$  и  $q_2$  вещественные числа, находим:

$$\begin{cases} q_1 = \pm \sqrt{\frac{k^2 + \sqrt{k^4 + \beta^2}}{2}} \\ q_2 = \mp \sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2} - k^2}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

Решение (9) выписывается с помощью объемных потенциалов:

$$\bar{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{\pm i(q_1+iq_2)R}}{R} f dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{\mp q_2 R} e^{\pm i q_1 R}}{R} f dV$$

Поскольку знак  $\pm$  присутствует как в последнем уравнении, так и в (10), то можно в (10) знак зафиксировать, считая  $q_1 < 0$ ,  $q_2 > 0$ . Для выполнения условия  $\bar{u} \rightarrow 0$  на бесконечности, необходимо в показателе экспоненты  $e^{\mp q_2 R}$  выбрать знак  $-$ . Получаем, что решением задачи (8) будет функция

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-q_2 R} e^{i q_1 R}}{R} f dV$$

Переходя к пределу при  $\beta \rightarrow 0$  в (10) получаем:  
 $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_1 = -k$ ,  $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_2 = 0$ . Следовательно, согласно принципу предельного поглощения, в качестве решения уравнения (7) мы должны выбрать  
 $u = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-ikR}}{R} f dV$ . Нетрудно проверить, что такое решение удовлетворяет условиям излучения  $\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$ ,  $u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ .

### ***Принцип парциального излучения***

Условия Зоммерфельда или принцип предельного поглощения, нужные для выделения единственного решения, не удобны в использовании при численном расчете задачи с помощью компьютерной программы, поскольку требуется искать решение в бесконечном пространстве и определять его характер при  $r \rightarrow \infty$ . Рассмотрим принцип парциального излучения позволяющий, в определенных случаях, свести задачу к расчету в ограниченной области.

### ***Задача в волноводе***

Пусть в волноводе имеется вставка, в которой диэлектрическая проницаемость и проводимость отличны от остальной части волновода.

Электромагнитные колебания описываются уравнениями Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} H = 0 \\ \operatorname{div} D = 4\pi \rho = 0 \\ j = \sigma E \\ D = \varepsilon E \end{array} \right.$$

Первое уравнение продифференцируем по времени и поделим на  $c$ . На второе уравнение подействуем оператором  $rot$ . Результат сложим. Получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c (\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E})$$

Полагая вектор  $\vec{E}$  - поляризованным, приходим к волновому уравнению с затуханием:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \Delta E$$

Считая проводимость  $\sigma$  стенок волновода бесконечно высокой, а токи конечными, из соотношения  $j = \sigma E$  получаем граничное условие:  $E|_{\Sigma} = 0$ , где  $\Sigma$  - поверхность волновода.

Решение  $E$  ищем в виде:  $E = u(M) e^{-i\omega t}$ . Тогда приходим к задаче для  $u$ :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

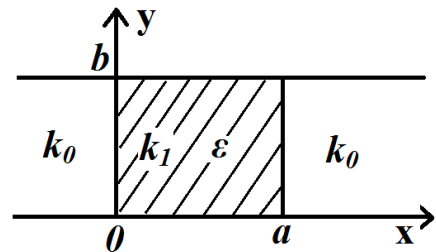
где  $k^2 = \bar{k}^2 + i\bar{k}^2$ ,  $\bar{k}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} > 0$  и

$\bar{k}^2 = \frac{4\pi\omega\sigma}{c^2} > 0$ . Для простоты будем рассматривать двумерный по

пространственным координатам случай.

Тогда  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . В области вставки, заштрихованной на

рисунке,  $0 < x < a$  и  $0 < y < b$ .



*Постановка парциальных условий излучения.*

Волну вида  $E = \psi(y)e^{i\gamma x}e^{-i\omega t}$  будем называть регулярной. Ей соответствует  $u(M) = \psi(y)e^{i\gamma x}$ . У движущихся слева направо регулярных волн  $\text{Re } \gamma > 0$ . У волн, движущихся в противоположном направлении,  $\text{Re } \gamma < 0$ . Подставляя амплитуду волны  $u(M) = \psi(y)e^{i\gamma x}$  в систему (11), получим задачу Штурма-Лиувилля для нахождения функции  $\psi(y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi + (k^2 - \gamma^2) \psi = 0 \\ \psi(0) = \psi(b) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Решая эту задачу, находим последовательность собственных значений и собственных функций  $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}$ ,  $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right)$ ,  $n \in N$ .

Заметим, что  $\gamma_n^2 = k^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$  лежит либо в первой, либо во второй четверти комплексной плоскости. Поэтому, извлекая квадратный корень, получаем, что само число  $\gamma_n$  лежит либо в первой, либо в третьей четверти комплексной плоскости. Таким образом,  $\gamma_n = \gamma_n^1 + i\gamma_n^2$ , где  $\gamma_n^1 \gamma_n^2 > 0$ . Будем выбирать из двух получившихся чисел  $\gamma_n$  такое, чтобы  $\gamma_n^1 > 0$  и  $\gamma_n^2 > 0$ .

Пусть слева на вставку падает заданная регулярная волна, пространственная часть которой  $u_0 = Ae^{i\gamma_n^0 x} \psi_{n_0}(y)$ . Требуется поставить задачу для  $u$  так, чтобы от вставки расходились отраженные волны, но не было других приходящих извне волн, кроме заданной. Условия, оставляющие только отраженные волны, были предложены А.Г. Свешниковым. Задача выглядит следующим образом:



$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ \int_0^b \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n u \right) \Big|_{x=0} \psi_n(y) dy = 2iA\gamma_{n_0} \delta_{nn_0} \\ \int_0^b \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n u \right) \Big|_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 \end{cases} \quad (13)$$

где  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\delta_{nn_0}$  - символ Кронекера.

Два последних соотношения в (13) называются парциальными условиями излучения. Первое из них отсекает все другие волны, движущиеся в сечении  $x=0$  слева направо, кроме заданной падающей гармоники. Действительно, в этом уравнении для  $u = C_n \psi_n(y) e^{i\gamma_n x}$ , где  $n \neq n_0$ , подынтегральное выражение при  $x=0$  равно  $2C_n i\gamma_n \psi_n^2(y)$ . Следовательно, интеграл будет равен нулю лишь при  $C_n = 0$ . Аналогично, последнее условие в (13) оставляет в сечении  $x=a$  только волны, уходящие от вставки.

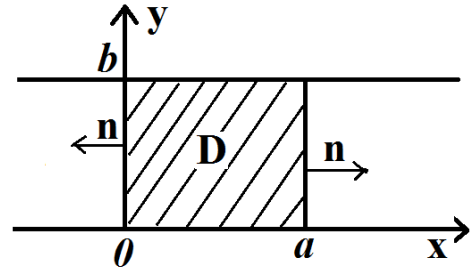
Покажем (взяв для простоты случай  $\bar{k}_2 > 0$ ), что решение задачи (13) единственно. Действительно, пусть существуют два различных решения  $u_1$  и  $u_2$ . Тогда разность этих решений  $w = u_1 - u_2$  будет удовлетворять однородной системе (13):

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 \\ w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0 \\ \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial x} + i\gamma_n w \right) \Big|_{x=0} \psi_n(y) dy = 0 \\ \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial x} - i\gamma_n w \right) \Big|_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Умножим первое уравнение (14) на комплексно-сопряженную к  $w$  функцию  $w^*$ , проинтегрируем по области  $D$  и применим первую формулу Грина:

$$0 = \int_D (\Delta w + k^2 w) w^* dV = \left( -\int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} dy - \int_D |\nabla w|^2 dV \right) + \int_D k^2 |w|^2 dV \quad (15)$$

Знак «минус» в первом интеграле правой части (15) появился при учете направления нормали к поверхности (см. рисунок).



Так как  $\psi_n$  - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (11), то они образуют полную систему функций.

Разложим по ним функцию  $w$  на границе области  $D$ :  $w|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n$  и

$w|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \psi_n$ . Поскольку  $\psi_n$  вещественны, то  $w^*|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n$  и

$w^*|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \psi_n$ .

Используя эти разложения и последние соотношения в (14), имеем:

$$\begin{aligned} & -\int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} dy = -\sum_n C_n^* \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \psi_n dy + \sum_n D_n^* \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} \psi_n dy = \\ & = -\sum_n C_n^* \int_0^b (-iw) \Big|_{x=0} \psi_n dy + \sum_n D_n^* \int_0^b (iw) \Big|_{x=a} \psi_n dy = \\ & = i \sum_n C_n^* \int_0^b \left( \sum_m C_m \psi_m \right) \gamma_n \psi_n dy + i \sum_n D_n^* \int_0^b \left( \sum_m D_m \psi_m \right) \gamma_n \psi_n dy \end{aligned}$$

Т.к.  $\{\psi_n\}$  - ортонормированная система, то  $\int_0^b \psi_m \psi_n dy = \delta_{nm}$ . Имеем:

$$-\int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} dy = i \sum_n \gamma_n |C_n|^2 + i \sum_n \gamma_n |D_n|^2$$

Используя полученное равенство, преобразуем (15). Получаем:

$$\int_D (\Delta w + k^2 w) w^* dV = \int_D (k^2 |w|^2 - |\nabla w|^2) dV + i \sum_n \gamma_n (|C_n|^2 + |D_n|^2) = 0$$

Приравнивая нулю мнимую часть, имеем

$$\int_D (k^2 |w|^2) dV + \sum_n \gamma_n (|C_n|^2 + |D_n|^2) = 0$$

Откуда  $w \equiv 0$ , а значит, решение (13) единственно.

## §6. Математические модели жидких вязких сред.

Силы, возникающие при движении жидкости, делятся на два основных типа: *массовые* и *поверхностные*. Силы, распределенные по объему и пропорциональные массам частиц, называются *массовыми* (напр. сила тяжести). Если  $\vec{F}$  - вектор массовой силы, отнесенный к единице массы, то на элемент объема  $d\tau$  действует сила  $\vec{F} \rho d\tau$ , где  $\rho$  – плотность жидкости.

На элемент поверхности  $dS$  любого выделенного объема жидкости, по нормали к поверхности, действует сила давления  $P_n = dS \cdot p$ , где  $p$  давление. При движении *вязкой жидкости*, кроме того, действует касательная к поверхности составляющая, называемая *силой внутреннего трения (силой вязкости)*, которая проявляет себя в виде сопротивления жидкости процессу деформации.

*Идеальной жидкостью* называется жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения.

### Основные уравнения.

Изменение массы жидкости в некотором объеме  $V$  происходит за счет выхода или входа потока  $\rho \vec{v}_n$  через поверхность  $S$ . Отсюда

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} d\tau = - \int_S \rho \vec{v}_n d\sigma = - \int_V (\operatorname{div} \rho \vec{v}) d\tau$$

В силу произвольности объема  $V$ , получаем уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (1)$$

В случае несжимаемой жидкости, при  $\rho = \text{const}$ , из (1) имеем:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

Далее мы будем рассматривать изменение скорости потока. При этом справедливо соотношение:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i v_i \right)$$

где  $v_i$  составляющая скорости в направлении  $\vec{e}_i$ . Следовательно

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \quad (3)$$

В случае идеальной (то есть невязкой) жидкости закон Ньютона для элементарного объема  $V$  имеет вид:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \int_V \rho F d\tau - \int_S \mathbf{n} p d\sigma = \int_V \rho F d\tau - \int_V \nabla p d\tau$$

В силу произвольности объема  $V$ , получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (4)$$

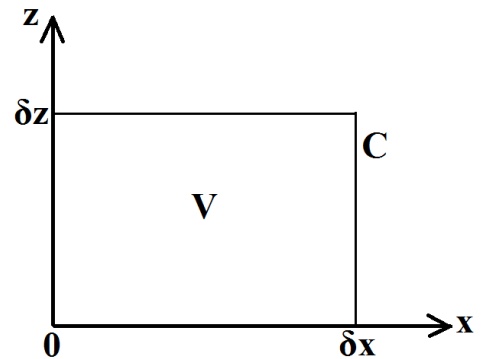
Это уравнение называется уравнением Эйлера. В случае, когда плотность жидкости меняется с давлением (баротропная среда), чтобы получить замкнутую систему, уравнение (4) нужно дополнить уравнением состояния  $\rho = \Phi(p)$ .

В случае вязкой среды в правую часть (4) добавляется слагаемое, учитывающее силу вязкого трения в жидкости. Для несжимаемых жидкостей, в случае, когда сила внутреннего трения пропорциональна разности скоростей слоев, между которыми возникает трение, движение жидкости описывается уравнением Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \quad (5)$$

где  $\nu$  так называемый кинематический коэффициент вязкости. Он связан с коэффициентом вязкости  $\mu$  соотношением  $\nu = \mu / \rho$ .

Поясним последнее слагаемое в (5). Рассмотрим для простоты двумерный случай. Выделим малую область с объемом  $V$  и границей  $C$ , как показано на рисунке. Составляющая величины  $\int_V \mu \Delta \vec{v} dx dz$  в направлении  $\vec{e}_z$  равна:



$$\begin{aligned} \mu \int_V \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dx dz &= \mu \int_C \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} dz - \frac{\partial v_z}{\partial z} dx \right) = \\ &= \int_0^{\delta z} \left( \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=\delta x} - \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dz + \int_0^{\delta x} \left( \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=0} - \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=\delta z} \right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

Величины  $\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=\delta x}$  и  $\left( -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$  определяют плотность силы

вязкости на границах  $x = 0$  и  $x = \delta x$  в направлении  $\vec{e}_z$ , а первый интеграл в правой части (6) суммарную силу вязкости на этих границах.

Если рассмотреть некоторый элемент раствора, то величина  $\frac{\partial v_z}{\partial z}$  описывает вытягивание элемента в направлении  $z$  (с одновременным сжатием в направлении  $x$ , в силу постоянства объема). Для преодоления сил вязкости при деформации элемента раствора нужно приложить внешнюю силу в направлении вытягивания. Считая эту силу равной  $\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$ , получаем, что последний интеграл в (6) описывает силы, действующие на верхнюю и нижнюю границы элемента, изображенного на рисунке, в направлении  $\vec{e}_z$ . Поэтому  $\int_V \mu \Delta v_z dx dz$  равен результирующей силе вязкости в направлении  $\vec{e}_z$ , действующей на часть раствора, заключенную в объеме  $V$ . Аналогичное соотношение имеет место по направлению  $\vec{e}_x$ . Таким образом, величина  $\nu \Delta \vec{v}$  представляет собой плотность сил вязкости, деленную на  $\rho$ .

Условия, задаваемые на границах области, зависят от характеристик границы. Если жидкость граничит с неподвижной твердой стенкой  $S_T$  с уравнением поверхности  $G(x, y, z) = 0$ , то граничное условие имеет вид

$$v_n = (\vec{v}, \vec{n}) = 0, \quad \vec{r} \in S_T,$$

Если же стенка движется со скоростью  $\vec{v}_T$ , то нормальная составляющая скорости частиц жидкости в любой точке на поверхности должна равняться нормальной составляющей скорости движения поверхности:

$$(\vec{v}, \vec{n}) = (\vec{v}_T, \vec{n}), \quad \vec{r} \in S_T.$$

Если жидкость вязкая, то на поверхности  $S_T$  выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\vec{v} = \vec{v}_T, \quad \vec{r} \in S_T$$

**Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением.**

Пусть в горизонтальной цилиндрической трубе радиуса  $a$  происходит ламинарное (слоистое) движение вязкой несжимаемой жидкости в направлении оси  $Z$  совпадающей с осью трубы. Пусть в момент времени  $t = 0$  жидкость покоилась, а при  $t > 0$  на торцах трубы, при  $z = 0$  и  $z = L$ , создается разность давлений  $\delta p$ . При продольном движении жидкости  $v_x = v_y = 0$ ,  $v = v_z$ . В отсутствие сил тяжести при этом из уравнения Навье-Стокса следует, что  $p = p(z)$ . Получаем из (5):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v \quad (7)$$

Кроме того, при  $v_x = v_y = 0$  из (2) имеем:  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . Поскольку  $v$  не зависит от  $z$ , то (7) может быть выполнено лишь в случае, когда  $\frac{\partial p}{\partial z}$  также

не зависит от  $z$ , то есть  $\frac{\partial p}{\partial z} = const$ . Учитывая условия задачи, получаем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\delta p}{L}. \text{ Обозначим } -\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma.$$

Вводя полярную систему координат и учитывая осевую симметрию решения, получаем задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma \quad (0 \leq r \leq a, \quad t \geq 0) \quad (8)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad v(a, t) = 0$$

Решение задачи (8), очевидно, можно искать в виде суммы стационарного, не зависящего от времени, слагаемого  $w(r)$  и добавки  $u(r, t)$ , описывающей переходной процесс от начального условия к стационарному процессу:  $v(r, t) = u(r, t) + w(r)$

Для  $w$  имеем условия:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma = 0 \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$w(r, 0) = 0$$

Решением этой задачи является функция:

$$w(r) = \frac{\gamma}{4\nu\rho} (a^2 - r^2) \quad (9)$$

Течение с профилем скорости (9) называется *плоскопараллельным течением Пуазейля*.

Для функции  $u(r, t)$  получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (0 \leq r < a, \quad t \geq 0) \quad (10)$$

$$u(a, t) = 0, \quad u(r, 0) = -\frac{\gamma}{4\rho\nu} (a^2 - r^2)$$

Задача (10), представляет собой задачу I-го рода с уравнением теплопроводности в круге. Ее решение можно найти, например, методом разделения переменных.

### ***Внешняя задача гидродинамики.***

Одной из основных проблем механики жидкостей является задача обтекания тела конечного размера однородным неограниченным потоком. Пусть  $S_T$  - поверхность тела,  $D_e$  - внешняя часть пространства по отношению к телу. Требуется найти решение системы (2), (5) соответствующее течению, переходящему на бесконечности в однородный поток, движущийся со скоростью  $U_\infty$  вдоль оси  $X$ . На бесконечности имеем условие



$$\vec{v} \rightarrow \vec{e}_x U_\infty, \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если жидкость вязкая, то на поверхности  $S_T$  выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\vec{v} = \vec{v}_T, \quad \vec{r} \in S_T, \quad t \geq t_0. \quad (12)$$

Если обтекаемое тело покоится, то, очевидно, справедливо граничное условие

$$\vec{v} = 0, \quad \vec{r} \in S_T, \quad t \geq t_0.$$

В уравнения (5) входят первые производные по времени. Поэтому следует задать начальное распределение скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z), \quad \vec{r} \in S_T \cup D_e, \quad t = t_0. \quad (13)$$

Совокупность уравнений (2), (5), краевых условий (11), (12) и начальных условий (13) составляют нестационарную начально-краевую задачу об обтекании тела вязким потоком.

### ***Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы.***

Безвихревым или потенциальным движением называется движение, для которого выполнено условие  $rot \vec{v} = 0$ . Это является необходимым и достаточным условием существования потенциала скорости  $\varphi(t, x, y, z)$ , так что справедливо представление:  $\vec{v} = grad \varphi$ . Если жидкость несжимаема, то  $div \vec{v} = 0$  и  $\Delta \varphi = div grad \vec{v} = 0$ . Функция  $\varphi(t, x, y, z)$  является гармонической по пространственным переменным.

Определим распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении со скоростью  $\vec{v}_0(t)$  сферы радиуса  $a$ , считая обтекание сферы потенциальным.

Так как движение потенциально и жидкость несжимаема, то потенциал  $\phi$  вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа по пространственным переменным. Поскольку жидкость граничит с движущейся сферой, то нормальная составляющая скорости частиц жидкости на поверхности сферы равна нормальной составляющей скорости движения поверхности сферы  $S$

$$(\vec{v}, \vec{n})|_S = (\text{grad}\phi, \vec{n})|_S = \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S = (\vec{v}_0(t), \vec{n}).$$

На бесконечности выполняется условие:

$$\vec{v} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \rightarrow \infty.$$

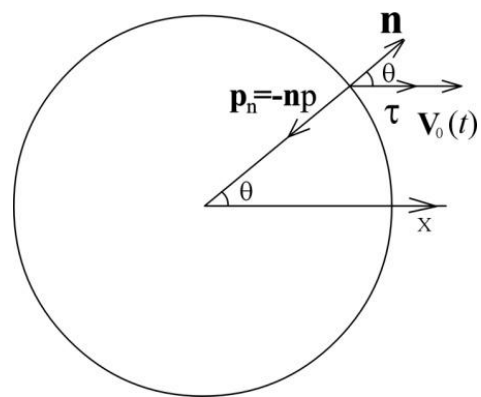
Значит

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для определения потенциала скорости в области  $D_e$  вне движущейся сферы имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0, \quad (x, y, z) \in D_e, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S &= (\vec{v}_0(t), \vec{n}), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (x, y, z) \rightarrow \infty,$$



В эту задачу  $t$  входит как параметр.

Выберем сферическую систему координат  $(r, \theta, \lambda)$ ,  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$0 \leq \lambda \leq 2\pi$  так, чтобы начало отсчета совпадало с центром сферы, а угол  $\theta$  совпадал с углом между направлением движения сферы и направлением нормали к поверхности.

В каждый момент времени  $t = t_0$  можно определить распределение скоростей в жидкости относительно этой системы координат, решив задачу (14) при фиксированном значении  $t = t_0$ . В выбранной системе координат система (14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} &= 0, \quad (r, \theta, \lambda) \in D_e, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0(t_0) \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, решение этой задачи в любой момент времени  $t$  определено с точностью до константы. Поэтому  $\varphi$  определено с точностью до произвольной функции времени  $C(t)$ . Как известно из курса ММФ ограниченное на бесконечности решение задачи (15) имеет вид

$$\varphi(r, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{-(n+1)} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) + C(t_0).$$

Поскольку  $P_1^0(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ , то граничное условие в (15) можно записать как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Отсюда ясно, что отличны от нуля только члены с  $n = 1, m = 0$ . Приравнивая соответствующие члены при  $r = a$ , находим коэффициент  $A_{10}$ .

Получаем  $\varphi(r, \theta, t_0) = -\frac{v_0(t_0)a^3}{2r^2} \cos \theta + C(t_0)$  для любого момента времени  $t = t_0$ .

Поскольку в сферической системе координат выражение для скорости имеет вид

$$\vec{v}(r, \theta, \lambda, t) = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{e}_\lambda \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},$$

где  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$ ,  $\vec{e}_\lambda$  - орты сферической системы координат, то

$$\vec{v}(r, \theta, t) = \vec{e}_r \frac{v_0(t)a^3}{r^3} \cos \theta + \vec{e}_\theta \frac{v_0(t)a^3}{2r^3} \sin \theta.$$

Заметим, что потенциал скорости определен с точностью до произвольной функции времени, а распределение скоростей определяется однозначно.

## Глава 2. Нелинейные процессы

В предыдущей главе изучались линейные задачи. Для них существуют общие методы решения. Для нелинейных задач ситуация гораздо сложнее. В нелинейном случае не действует принцип суперпозиции, поэтому нельзя искать решение в виде разложения по фундаментальной системе решений, нельзя использовать метод Фурье и т.д. Нелинейное уравнение в аналитическом виде решается лишь в отдельных частных случаях, поэтому обычно приходится решать задачу численно.

Нелинейные процессы имеют некоторые характерные черты, отличные от линейных случаев. Для этих задач возможно формирование крутых фронтов решений, возникновение разрывов, образование локальных структур и другие особенности. Эти черты мы проследим в последующем изложении.

### §1. Квазилинейное уравнение переноса.

Уравнения в частных производных первого порядка часто встречаются в задачах, в которых рассматривается перенос вещества. Пусть, например, в направлении оси  $x$  переносится вещество, концентрация которого  $u$ . Перенос происходит со скоростью  $q$ , которая может зависеть от координат  $x$ ,  $t$  и концентрации  $u$ . Последнее, например, имеет место в задаче расчета движения воды под действием силы тяжести в песке, где при малой влажности движения не происходит, а при большой скорости стекания существенна. Рассмотрим баланс вещества в слое от  $x$  до  $x + \Delta x$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  (в единичном сечении перпендикулярном  $x$ ). Поток вещества  $Q = q \cdot u$ . Имеем:

$$\int_x^{x+\Delta x} [u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t)] d\xi = \int_t^{t+\Delta t} [Q(x, \tau) - Q(x + \Delta x, \tau)] d\tau \quad (1)$$

Делим последнее уравнение на  $\Delta x \Delta t$ . Считая  $u$  и  $q$  непрерывно дифференцируемыми функцией своих переменных, перейдем к пределу при

$\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta t \rightarrow 0$ . Получим дифференциальный аналог уравнения баланса:

$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ . Если  $q$  не зависит от  $u$ , то, раскрывая производную  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,

приходим к линейному уравнению  $\frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} + gu = 0$ , где  $g = \frac{\partial q}{\partial x}$ . Если  $q$

зависит от  $u$ , то получаем квазилинейное уравнение  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + gu = 0$ , где

$a = q + u \frac{\partial q}{\partial u}$  и  $g$  зависят от  $u$ .

### **Линейное уравнение.**

Вначале кратко напомним некоторые результаты из курсе дифференциальных уравнений, относящиеся к линейным задачам переноса.

Рассмотрим в области  $D$  переменных  $x, y, t$  задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y, t)u = f(x, y, t) \\ u|_{\Sigma} = \varphi(x, y, t) \end{cases} \quad (2)$$

где  $a, b, g$  и  $f$  непрерывно дифференцируемые функции,  $a^2 + b^2 \neq 0$ ,  $\Sigma$  - кусочно-гладкая поверхность, лежащая в  $D$ . Для решения этой задачи составляются уравнения характеристик:

$$dt = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad (3)$$

Решения (3) называются характеристиками. Если рассмотреть характеристику, проходящую через точку  $(x_0, y_0, t_0)$ , то она удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a(x, y, t) & x|_{t=t_0} &= x_0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= b(x, y, t) & y|_{t=t_0} &= y_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Характеристики являются кривыми в пространстве переменных  $(x, y, t)$ . При сделанных относительно  $a$  и  $b$  предположениях они заполняют собой всю область  $D$ , нигде не пересекаясь. Каждой из них можно приписать два параметра, определяющих выбор характеристики в трехмерном пространстве координат. Например, в качестве таких параметров можно выбрать значения  $x_0$  и  $y_0$  в (4). Кроме того, как известно, уравнения (3) имеют два первых интеграла, то есть такие функции  $\Psi_{1,2}(x, y, t)$ , которые сохраняют на решениях (3) постоянные значения. Для точек  $(x, y, t)$ , лежащих на фиксированной характеристике  $\Psi_1 = C_1, \Psi_2 = C_2$ . Поэтому имеется однозначное соответствие точек  $(x, y, t)$  и значений  $(C_1, C_2, t)$ . Последние можно выбрать, как новые координаты.

Фиксируем некоторую характеристику  $\gamma$  и посчитаем производную  $u$  по  $t$  вдоль нее. Используя (3), получим

$$\frac{du}{dt}|_{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}. \text{ Следовательно, задача}$$

(2) в новых координатах имеет вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{du}{dt} + gu = f \right) \Big|_{C_{1,2}=\text{const}} \\ u(M^*) = \varphi(M^*) \end{cases} \quad (5)$$

где  $M^*$  - точка пересечения выбранной характеристики с поверхностью  $\Sigma$ . Таким образом, задача свелась к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Решаем эту задачу, после этого делаем обратный переход к старым координатам и получаем решение задачи (2).

В случае, когда каждая характеристика в  $D$  пересекает поверхность  $\Sigma$ , причем только один раз, решение (5), а, следовательно, и (2) существует и единственно. Если какая то характеристика не пересекает  $\Sigma$ , то решение на ней не единственно. Если характеристика пересекает  $\Sigma$  более одного раза, то решение (2) может не существовать.

*Замечание 1.* Если  $g = f = 0$ , то уравнение задачи (2), эквивалентно  $\left(\frac{du}{dt} = 0\right) \Big|_{C_{1,2} = \text{const}}$ , то есть представляет собой закон сохранения  $u$  вдоль характеристики.

*Замечание 2.* В уравнении (2) присутствуют производные  $u$  по независимым переменным. Тем самым, под решением (2) понимается гладкая функция. После перехода к (5) требование непрерывности решения при переходе от одной характеристике к другой снимается. Если функция  $\varphi$  имеет разрывы, то можно рассматривать решения (5), как обобщенные решения (2), имеющие разрывы вдоль характеристик, проходящих через точки разрыва функции  $\varphi$ .

### ***Квазилинейное уравнение.***

Обратимся к задаче Коши для случая квазилинейного уравнения. Для простоты рисунков рассмотрим случай двух независимых переменных. Пусть кривая, на которой заданы дополнительные условия, определяется соотношением  $\Phi(x, t) = 0$ . Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = R(x, t, u) \\ u|_{\Phi(x, t) = 0} = \varphi(x, t) \end{cases} \quad (6)$$

где функции  $a(x, t, u)$  и  $R(x, t, u)$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов.



Будем искать решение этой задачи, полагая, что оно удовлетворяет уравнению

$$v(x, t, u) = 0 \quad (7)$$

где  $v(x, t, u)$  некоторая, подлежащая определению, функция. При этом предполагаем, что  $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$ . Из (7), можно определить частные производные:

$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} / \frac{\partial v}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial u}$ . Используя (6), получим задачу, которой удовлетворяет функция  $v$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a(x, t, u) \frac{\partial v}{\partial x} + R(x, t, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \\ v(x, t, \varphi(x, t))|_{\Phi(x, t)=0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

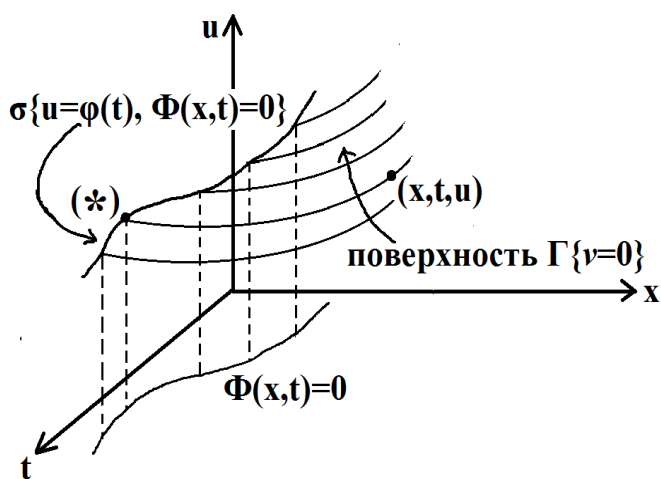
Уравнение задачи (8) является линейным относительно функции  $v(x, t, u)$ , поскольку коэффициенты  $a(x, t, u)$  и  $R(x, t, u)$  от нее не зависят. Соответствующие уравнения характеристик имеют вид:

$$dt = \frac{dx}{a(x, t, u)} = \frac{du}{R(x, t, u)} \quad (9)$$

В рассматриваемом случае характеристики являются кривыми в пространстве  $x, t, u$ , включающим в качестве координат не только независимые переменные  $x, t$ , но и  $u$ . Этим характеристики квазилинейного уравнения отличаются от линейного случая, где они были кривыми в пространстве только независимых переменных. Из (9) имеем два первых интеграла:  $\Psi_1(x, t, u)$  и  $\Psi_2(x, t, u)$ .

Уравнение (8) выражает собой закон сохранения  $v$  вдоль характеристик.

Рассмотрим характеристики, на которых  $v=0$ . Они образуют некоторую поверхность  $\Gamma$  в пространстве  $(x,t,u)$ . На этой поверхности лежит кривая  $\sigma$ , на которой заданы дополнительные значения, задаваемые вторым соотношением в (8). На  $\sigma$  точки  $(x,t,u)$  связаны условиями:  $\Phi(x,t)=0, u=\varphi(x,t)$ .



Выберем произвольную точку  $(x,t,u)$  на поверхности  $\Gamma$ . Проведем через эту точку характеристику до пересечения кривой  $\sigma$ . Обозначим точку пересечения, как  $(x^*,t^*,u^*)$ . Значение  $u^*=\varphi(x^*,t^*)$ . Поскольку первые интегралы сохраняют свои значения на характеристиках, то получаем:

$$\begin{cases} \Psi_1(x,t,u) = \Psi_1(x^*,t^*,\varphi(x^*,t^*)) \\ \Psi_2(x,t,u) = \Psi_2(x^*,t^*,\varphi(x^*,t^*)) \\ \Phi(x^*,t^*) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Исключая  $x^*$  и  $t^*$  из этой системы, получаем алгебраическое соотношение, связывающее  $u, x, t$  между собой, т.е. решение задачи (6).

### Метод характеристик.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases} \quad (11)$$

Пусть  $\bar{u}$  некоторое решение уравнения (11). Зафиксируем его. Тогда  $a$  представляет собой определенную функцию от  $x$  и  $t$ :

$a = a(x, t, \bar{u}(x, t)) = \bar{a}(x, t)$ . Рассмотрим решение линейного уравнения  $u_t + \bar{a}(x, t)u_x = 0$ . Согласно *замечанию 1* любое решение  $u$  такого уравнения сохраняется на кривых, удовлетворяющих соотношению  $dt = \frac{dx}{a}$ .

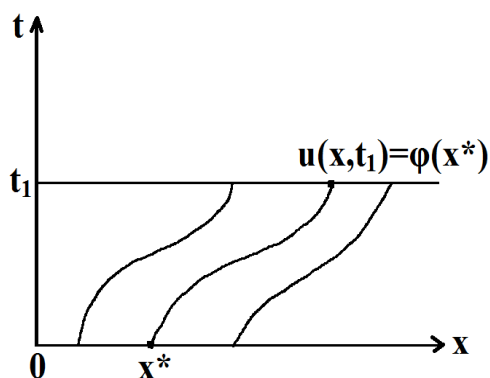
В том числе, сохраняется и  $\bar{u}$ . Поскольку в качестве  $\bar{u}$  можно выбрать любое решения уравнения (11), то получаем, что любое решение  $u$  постоянно на кривой  $\frac{dx}{dt} = a(x, t, u)$ .

Выберем некоторое  $x^*$ . Согласно (11)  $u(x^*, 0) = \phi(x^*)$ . Учитывая сказанное, получаем, что  $u$  постоянно и равно  $\phi(x^*)$  на кривой

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t, \phi(x^*)) \quad x|_{t=0} = x^* \quad (12)$$

В случае, когда  $a = a(u)$  из (12) получаем  $u(x, t) = \phi(x^*)$  для  $x = x^* + a(\phi(x^*))t$ .

Итак, метод характеристик заключается в следующем. Для построения решения задачи (11) при некотором  $t_1 > 0$  нужно через различные точки  $x^*$ , лежащие на прямой  $t = 0$  провести кривые, удовлетворяющие (12), до пересечения с прямой  $t = t_1$ . В точках пересечения значения  $u(x, t_1) = \phi(x^*)$ .



Заметим, что уравнение задачи (11) является квазилинейным уравнением. Его характеристики – кривые в пространстве  $(x, t, u)$  – определяется условиями:

$$dt = \frac{dx}{a(x, t, u)}, \quad u = const$$

### Разрывы решения.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть мы решаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases} \quad (13)$$

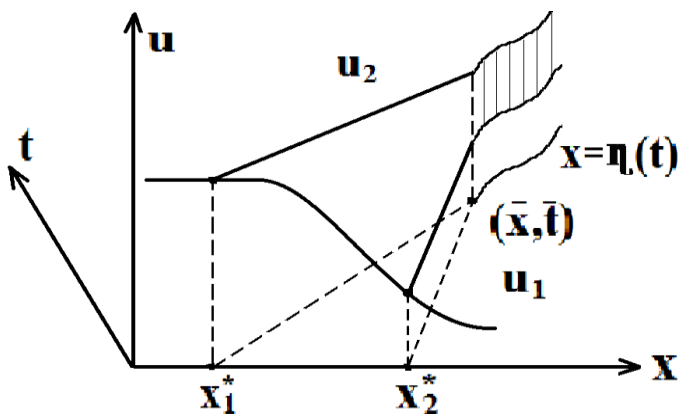
где  $\phi$  - монотонно убывающая функция  $x$ , а  $a$  монотонно растущая функция  $u$ . Согласно (12) проекции характеристик квазилинейного уравнения (13)

имеют наклон:  $\frac{dx}{dt} = a(\phi(x^*))$ , где

$x^*$  координата пересечения проекции с осью  $t=0$ . При указанном характере изменения  $\phi$

и  $a$  значение  $\frac{dx}{dt}$  тем меньше, чем

больше  $x^*$ . Это означает, что при некотором  $\bar{t}$  наступит пересечение проекции характеристик (См. рис).

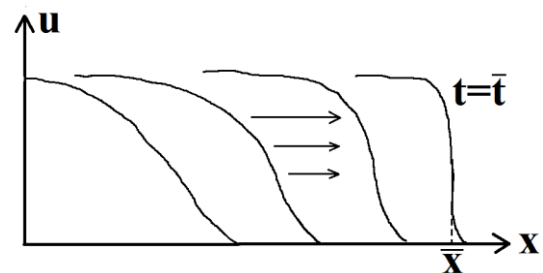


Пусть в точке  $(\bar{x}, \bar{t})$  пересеклись проекции характеристик, на которых  $u = u_1 = \phi(x_1^*)$  и  $u = u_2 = \phi(x_2^*)$ . (Характеристики прошли «на разной высоте  $u$ » над плоскостью координат  $(x, t)$  в трехмерном пространстве  $(x, t, u)$ ).

Тогда, согласно (7),  $v(\bar{x}, \bar{t}, u_1) = v(\bar{x}, \bar{t}, u_2) = 0$ . Это означает, что при некотором  $u_3 \in (u_1, u_2)$  будет нарушено условие  $\frac{\partial v}{\partial u}(\bar{x}, \bar{t}, u_3) \neq 0$ , используя которое строился метод решения задачи (6).

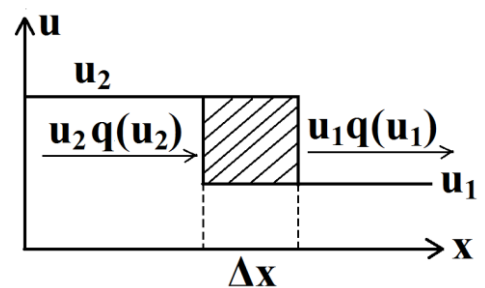
Рассмотренная ситуация типична для квазилинейных уравнений. Для таких уравнений производная  $\frac{dx}{dt}$  на характеристиках зависит не только от выбора точки  $(x, t)$ , как в случае линейных уравнений, но и от решения  $u$  на рассматриваемой характеристике. Поэтому проекции характеристик на плоскость  $(x, t)$  могут пересекаться.

На следующем рисунке показано изменение профиля решения (13) от  $x$  для различных моментов  $t$ . Чем больше  $u$ , тем с большей скоростью происходит перемещение этого значения вдоль  $x$ . В момент  $\bar{t}$  в точке  $\bar{x}$  фронт становится отвесным – происходит образование разрыва решения и ударной волны.



При  $t > \bar{t}$  классического решения, всюду гладкого по  $x$ , не существует. Следует рассматривать так называемое обобщенное решение. Обобщенное решение при  $t > \bar{t}$  представляет собой классические решения, прилегающие с двух сторон к некоторой кривой разрыва решения  $x = \eta(t)$ . Кривая  $x = \eta(t)$  определяется законом сохранения (1), на базе которого получено дифференциальное уравнение (13).

А именно, пусть разрыв, на одном берегу которого  $u = u_1$ , а на другом  $u = u_2$ , за время  $\Delta t$  продвинулся на  $\Delta x$ . Тогда изменение количества вещества (заштрихованная зона на рисунке) равно разности входящего и выходящего потоков:



$$(u_2 - u_1)\Delta x = (q(u_2)u_2 - q(u_1)u_1)\Delta t.$$

Отсюда скорость движения разрыва  $v_{разр} = \frac{d\eta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$  задается

уравнением:

$$v_{разр} = \frac{q(u_2)u_2 - q(u_1)u_1}{u_2 - u_1} \quad (14)$$

Последнее уравнение называется условием Гюгонио. Оно выражает собой условие сохранения вещества на фронте ударной волны.

### Пример.

Рассмотрим методологию решения задачи на примере задачи о протекании воды сквозь песок. Пусть  $x$  - вертикальная координата, возрастающая вниз;  $t$  - время;  $u(x, t)$  - влажность песка;  $q$  - скорость стекания воды под действием силы тяжести. Скорость  $q$  зависит от влажности. Пусть  $q = \frac{u}{2}$ , а влажность  $u$  меняется от нуля до некоторого максимального значения  $u_{\max}$ , которое определяется пористостью песка. Для гладкой функции  $u(x, t)$  соотношение баланса количества воды (1), приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q(u)u) = 0$$

С учетом конкретного вида функции  $q(u)$  получаем квазилинейное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Рассмотрим задачу на бесконечном участке  $-\infty < x < \infty$ . Пусть в начальный момент времени

$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{при } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Требуется найти решение задачи (15), (16) при  $t > 0$ .

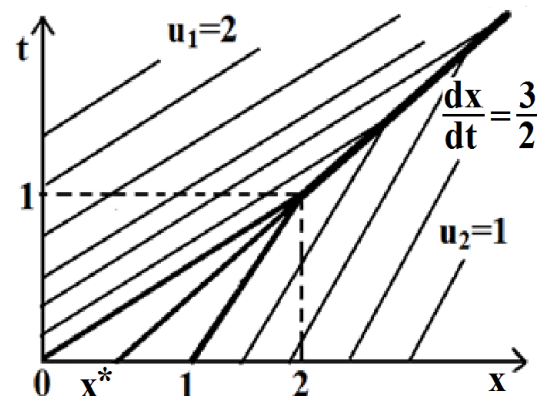
Решим поставленную задачу. Для классического решения наклон проекции характеристик на плоскость  $(x,t)$  определяется соотношениями (12). В рассматриваемом примере имеем:  $u(x,t) = \phi(x^*)$  для  $x = x^* + \phi(x^*)t$ .

Отсюда

$$\begin{aligned} u = 2, & \quad x - x^* = 2t & \quad \text{при } x^* < 0 \\ u = 2 - x^*, & \quad x - x^* = (2 - x^*)t & \quad \text{при } 0 \leq x^* \leq 1 \\ u = 1, & \quad x - x^* = t & \quad \text{при } 1 < x^* \end{aligned} \quad (17)$$

При  $t = 1$  все проекции характеристик, для которых  $0 \leq x^* \leq 1$  сходятся в точке  $x = 2$ . При  $t > 1$  мы должны искать обобщенное решение, состоящее из двух классических, сшитых по линии разрыва  $x = \eta(t)$ . Линия разрыва начинается в точке  $(t=1, x=2)$  и определяется условием Гюгонио (14):

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{(u_2/2) \cdot u_2 - (u_1/2) \cdot u_1}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 + u_1}{2} = \frac{3}{2}$$



Проекция характеристик сходятся с двух сторон к линии разрыва решения.

## §2. Нелинейное уравнение теплопроводности.

В курсе ММФ изучалась задача Коши для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом  $a$ :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1)$$

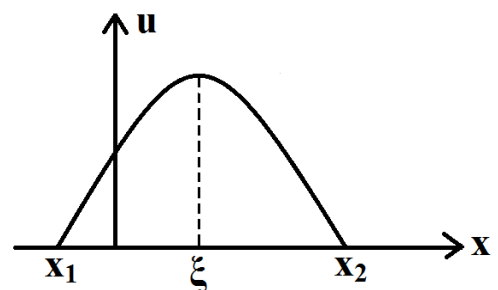
Была построена функция влияния точечного источника

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{at}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \quad \text{и получено решение:}$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot G(x, \xi, t) d\xi.$$

Как известно, функция  $G$  описывает температуру в точке  $x$ , если в точке  $\xi$  в момент  $t = 0$  был произведен нагрев. Видно, что  $G > 0$  даже при малых  $t > 0$  сразу для всех  $\xi$  и  $x$ . Это нереально с точки зрения физики, поскольку процесс распространения тепла в природе идет с конечной скоростью, вследствие конечной скорости движения молекул. Этот фактор не отражен в модели (1) – модель рассчитана на описание процессов теплопередачи в пространственно - временных масштабах, в которых ограниченностью скорости передачи тепла можно пренебречь.

Но возникает следующий вопрос. Решение было построено в предположении наличия непрерывных производных по  $x$ . Может быть это было сделано «в угоду математике», а на самом деле можно было бы искать финитное решение, с разрывной производной, отличное от нуля лишь в некоторой расширяющейся со временем окрестности точки  $\xi$ , в которой был произведен нагрев. А именно, в виде, изображенном на рисунке. Легко убедиться, что это не так. Действительно,





поток тепла  $q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$ . Поэтому в точках  $x_1$  и  $x_1$  на рисунке нарушено физическое условие непрерывности теплового потока. В силу этого условия, в задаче (1) нельзя искать решение, имеющее разрыв производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  при  $t > 0$ .

Ситуация меняется если рассматривать задачу с нелинейным уравнением  $u_t = (k(u)u_x)_x$ , где  $k(u) = 0$  при  $u = 0$ . В этом случае разрыва теплового потока в точках  $x_1$  и  $x_1$ , изображенных на рисунке не происходит. С обеих сторон этих точек предельное значение потока  $q = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$  равно нулю.

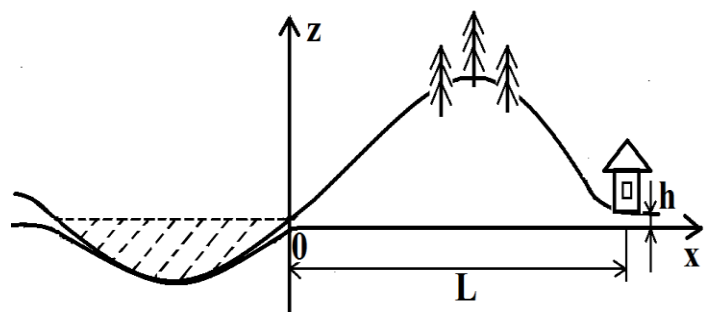
Следовательно, в случае указанного нелинейного уравнения можно искать финитные решения, что будет продемонстрировано в последующих пунктах.

### **Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении.**

Рассмотрим такую задачу. Пусть имеется озеро и деревня, так как изображено на рисунке. Под ними расположен гидроупорный слой (глина), показанный жирной линией.

Пусть  $u(x, t)$  - уровень грунтовой воды над гидроупором в области  $x > 0$ .

Пусть весной, к моменту  $t = 0$  вода в озере поднялась до нулевой отметки и продолжает прибывать по закону  $u(0, t) = kt$ . Ставится вопрос о том, как быстро затопление дойдет до деревни, расположенной на высоте  $h$  над гидроупором и имеющей координату  $x = L$ .



Сначала получим уравнение, описывающее изменение  $u$ . Рассмотрим вертикальное сечение земли от дневной поверхности до гидроупора. Плотность горизонтального потока

воды равна  $q = -D \frac{\partial P}{\partial x}$ , где  $P$  –

давление, а  $D$  – коэффициент проводимости среды. Рассмотрим некоторую высоту  $0 < z < u$ .

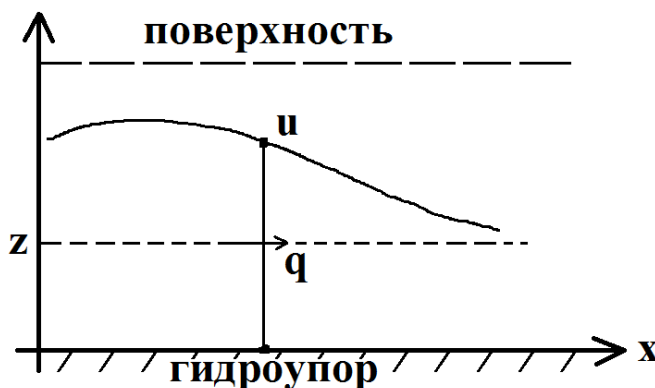
Давление на этой высоте равно  $P(z) = \rho g(u - z)$  где,  $\rho$  –

плотность воды, а  $g$  – ускорение свободного падения. Следовательно,

$q = -D \rho g \frac{\partial u}{\partial x}$  и от  $z$  не зависит. Поэтому полный поток, идущий через

сечение будет равен  $Q = -D \rho g \cdot u \frac{\partial u}{\partial x}$ . Интегральное уравнение баланса

воды в слое от  $x$  до  $x + \Delta x$  за время от  $t$  до  $t + \Delta t$  будет:



$$\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon \cdot (u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t)) d\xi =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} D \rho g \cdot \left( u(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, \tau + \Delta \tau)}{\partial x} u(x, \tau + \Delta \tau) \right) d\tau$$

где  $\varepsilon$  – порозность среды. Делим уравнение на  $\Delta x$  и  $\Delta t$  и устремляем их к нулю. Получаем дифференциальное уравнение, описывающее высоту уровня грунтовой воды над гидроупором, называемое уравнением Буссинеска:

$$u_t = \frac{D \rho g}{\varepsilon} (uu_x)_x$$

Сделаем замену переменной  $\tau = \frac{\varepsilon}{D \rho g} t$ , (т.е. введем новый масштаб

времени). Обозначаем  $\frac{k \varepsilon}{\rho g D}$ , как  $K$ . Получаем математическая модель

процесса:

$$\begin{cases} u_\tau = (uu_x)_x \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, \tau) = K\tau \end{cases} \quad (2)$$

Согласно предыдущему пункту, мы имеем право искать решение, имеющее перелом производной при  $u = 0$ . Ищем решение задачи (2) в автомодельном виде движущейся волны

$$\begin{cases} u = f(v\tau - x) & \text{при } v\tau - x > 0, \\ u = 0 & \text{при } v\tau - x \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

где  $v$  постоянная скорость, подлежащая определению. Подставив такой вид решения в (2), получаем уравнение в обыкновенных производных для определения функции  $f(\alpha)$ , где  $\alpha = v\tau - x$ :

$$vf' = (ff')$$

Интегрируем это уравнение от нуля до некоторого  $\alpha < 0$ . Имеем:  $vf = ff'$ . Откуда  $f' = v$ . Из граничного условия задачи (2), находим функциональный вид  $f$ :  $u(0, \tau) = K\tau = f(v\tau - 0)$ . Отсюда  $f(\alpha) = \frac{K\alpha}{v}$ .

Используя равенство  $f' = v$ , имеем:  $\frac{K}{v} = v$ . Следовательно  $v = \sqrt{K}$ , а  $f(\alpha) = \alpha\sqrt{K}$ . Получаем решение задачи (2):

$$\begin{cases} u(x, \tau) = K\tau - \sqrt{K}x & \text{при } x < \sqrt{K}\tau \\ u(x, \tau) = 0 & \text{при } x \geq \sqrt{K}\tau \end{cases}$$

Наводнение дойдет до деревни при  $\tau$ , которое определяется равенством  $h = K\tau - \sqrt{K}L$ .

### ***Нелинейная модель горения.***

Часто мощность источников тепла зависит от температуры. Например, в плохо горящем костре выделение тепла дровами слабое, а когда костер разгорится, то те же дрова выделяют много энергии. Передача тепла часто имеет конвективный характер. При этом коэффициент теплопроводности зависит от интенсивности конвективных процессов - тем самым от температуры.

$$\text{Рассмотрим уравнение } u_t = \left(u^2 u_x\right)_x + u^\beta \quad (4)$$

Будем искать автомодельные решения этого уравнения для разных значений параметра  $\beta$ .

1) Пусть  $\beta = 3$

В этом случае уравнение (4) заменой  $u(x,t) = \frac{\theta(x)}{\sqrt{T-t}}$  приводится к уравнению в обыкновенных производных:  $\theta\theta'' + 2\theta'^2 + \theta^2 = 1/2$ . Его решением является функция  $\theta(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ . Обозначим  $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ , как  $x_0$ .

Получаем, что решением задачи:

$$\begin{cases} u_t = \left(u^2 u_x\right)_x + u^3 \\ u(x,0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{T}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) & \text{при } |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{при } |x| > x_0 \end{cases} \end{cases}$$

является функция:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{T-t}}, & \text{при } |x| \leq x_0 \\ 0, & \text{при } |x| > x_0 \end{cases} \quad (5)$$

Выражение (5) описывает структуру фиксированной ширины, величина которой бесконечно возрастает за конечное время. Решения, обладающие последним свойством, называются решениями с обострением.

2) Пусть  $\beta = 2$

В этом случае сделаем другую замену, а именно  $u(x, t) = \frac{\theta(\xi)}{T-t}$ , где  $\xi = x\sqrt{T-t}$ . Такая замена приводит уравнение (4) к уравнению в обыкновенных производных.

$$\left(\theta^2 \theta'\right)' + \theta^2 + \frac{\theta' \xi}{2} - \theta = 0 \quad (6)$$

Из (6) видно, что функция  $\theta(\xi)$  является четной, поэтому  $\theta'(0) = 0$ .

При  $\xi = 0$  уравнение (6) преобразуется к виду:  $\theta^2 \theta'' + \theta^2 - \theta = 0$ . Выбрав  $\theta(0) > 1$ , получаем, что вторая производная  $\theta''(0)$  отрицательна, следовательно, в точке  $\xi = 0$  расположен максимум.

Существует решение  $\theta(\xi)$ , удовлетворяющее уравнению (6), положительное на некотором интервале  $(\xi_0, -\xi_0)$  и равное нулю при  $\xi = \xi_0$ . Само решение и значение  $\xi_0$  можно найти численно.

При  $\theta \rightarrow 0$ , пренебрегая в (6) малыми членами, имеем:  $2\theta\theta' + \frac{\xi}{2} \approx 0$ .

Решение последнего уравнения ведет себя, как  $\theta(\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}$ .

Следовательно,  $\theta'(\xi_0 - 0) < 0$ .

Строим решение  $u(x,t) = \frac{\theta(x\sqrt{T-t})}{T-t}$ , где  $\theta(\xi)$  определяется на интервале  $(\xi_0, -\xi_0)$  из (6) и  $\theta(\xi) \equiv 0$  при  $\xi > \xi_0$ . Такая функция  $u(x,t)$  имеет разрыв производной по  $x$  в точке  $x = \frac{\xi_0}{\sqrt{T-t}}$ , где решение обращается в ноль.

Найденное решение, образует локальную структуру, которая расширяется пропорционально  $\frac{1}{\sqrt{T-t}}$ , и неограниченно возрастает в центре за конечное время.

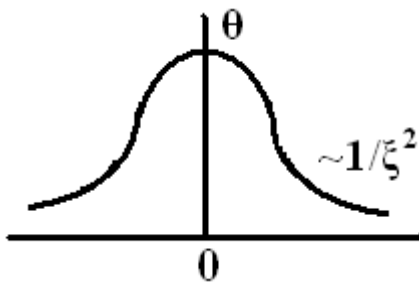
3) Пусть  $\beta = 4$

В этом случае сделаем замену  $u(x,t) = \frac{\theta(\xi)}{(T-t)^{1/3}}$ , где  $\xi = \frac{x}{(T-t)^{1/6}}$ .

При этом уравнение (4) преобразуется к виду:

$$(\theta^2 \theta')' + \theta^4 = \frac{\theta' \xi}{6} + \frac{1}{3} \theta$$

Качественный вид решения этого уравнения представлен на рисунке.



Имеем нелокальный процесс с обострением в центре структуры. Можно показать, что при  $x \neq 0$  решение растет, оставаясь конечным.

### ***Модель большого взрыва.***

Баренблаттом и Зельдовичем была рассмотрена и исследована следующая, одномерная по пространственным координатам, модель большого взрыва,

положившего начало движения вещества во вселенной. Пусть в начальный момент времени масса вселенной  $M$  была сосредоточена в одной точке  $x = 0$ . Распространение вещества после взрыва авторы описали моделью:

$$\begin{cases} u_t = (u^2 u_x)_x \\ u(0, x) = \delta(x)M \end{cases} \quad (7)$$

Сделаем замену координат  $\xi = \frac{x^2}{\sqrt{t}}$  и будем искать решение в автомодельном виде:  $u(x, t) = \frac{\theta(\xi)}{t^{1/4}}$ , где  $\theta(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция. Нетрудно проверить, что для такого  $u$ , при любом выборе  $\theta(\xi)$ , выполнено:  $u_t = \left(-u \frac{x}{4t}\right)_x$ . Уравнение (7) приводится к

виду:  $\left(-u \frac{x}{4t}\right)_x = (u^2 u_x)_x$ . Интегрируя это уравнение по  $x$ , используя

искомый вид  $u$ , получаем:  $-\frac{\theta}{t^{1/4}} \frac{x}{4t} = \frac{2x}{t^{5/4}} \theta^2 \theta'$ . Отсюда  $8\theta\theta' = -1$ .

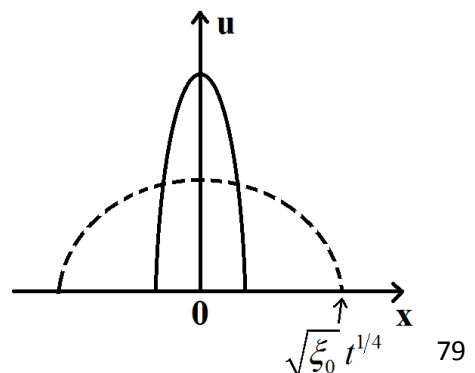
Ищем решение последнего уравнения в виде финитной функции, имеющей разрыв производной при  $\theta = 0$ . Таким решением является функция  $\theta(\xi) = \max\left[\frac{1}{2}\sqrt{\xi_0 - \xi}, 0\right]$ .

Мы получили следующее решение задачи (7):

$$\theta(\xi) = \max\left[\frac{1}{2}\sqrt{\xi_0 - \xi}, 0\right].$$

Мы получили следующее решение задачи (7):

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi_0 - \frac{x^2}{\sqrt{t}}}}{t^{1/4}}, & \text{при } |x| < \sqrt{\xi_0} t^{1/4} \\ 0, & \text{при } |x| > \sqrt{\xi_0} t^{1/4} \end{cases}$$



где  $\xi_0$  - величина, определяющая границу возмущения. Ее можно определить из второго уравнения системы (7). Условие нормировки будет:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx = 2 \int_0^{\sqrt{\xi_0} t^{1/4}} \frac{\theta}{t^{1/4}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{\xi_0}} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi} / 2}{t^{1/4}} d(t^{1/4} \sqrt{\xi}) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{\sqrt{\xi_0}}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = \sqrt{\xi_0} \frac{3\pi}{8}.$$

Отсюда находим  $\xi_0$ , тем самым решение полностью определено.

### §3. Модель «Хищник-Жертва»

Рассмотрим модель Вольтера для задачи «хищник-жертва». Пусть  $x$  - число зайцев, а  $y$  - число волков. Изменение числа зайцев во времени происходит за счет двух факторов – рождения новых зайцев, что пропорционально количеству живущих зайцев, и смерти за счет встречи с волками. Количество встреч пропорционально произведению числа зайцев и волков. Соответственно, волкам для увеличения популяции и вскармливания молодого поколения требуется пища. Будем считать прирост количества волков пропорциональным количеству встреч их с зайцами. Кроме того, имеет место естественная убыль волков от старости и голода, которая тем больше, чем больше количество волков. Получаем модель:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = k_3 xy - k_4 y & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (9)$$

Исследуем решение (9). Поделив первое уравнение системы (9) на второе, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(k_1 - k_2 y)}{y(k_3 x - k_4)}$$



Иначе:

$$\frac{dx(k_3x - k_4)}{x} = \frac{dy(k_1 - k_2y)}{y}$$

Это уравнение с разделенными переменными. Решая его, получим:

$$\frac{e^{k_3x}}{x^{k_4}} \cdot \frac{e^{k_2y}}{y^{k_1}} = C \quad (10)$$

Здесь  $C$  – интеграл движения, то есть величина сохраняющее значение на решении уравнений (9). Условие  $C = const$  определяет линию уровня интегральной кривой в пространстве  $(x, y, C)$ .

Приравняв нулю правые части уравнений системы (9), можно найти точку покоя  $(x_n, y_n)$ . Имеем:

$$x_n = k_4 / k_3, \quad y_n = k_1 / k_2$$

Подставляя эти координаты в (10), находим значение интеграла движения, соответствующее точке покоя:

$$C_n = \frac{e^{k_3x_n}}{(x_n)^{k_4}} \frac{e^{k_2y_n}}{(y_n)^{k_1}}$$

Рассмотрим функции  $f(x) = \frac{e^{k_3x}}{x^{k_4}}$  и  $g(y) = \frac{e^{k_2y}}{y^{k_1}}$ . Легко видеть, что функция  $f$

неограниченно возрастает при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$ . Вычислим ее производную:

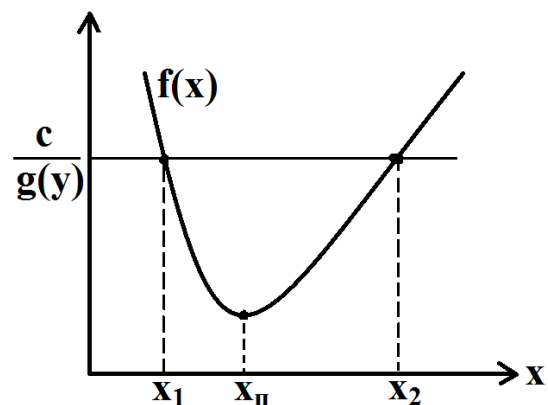
$\frac{df}{dx} = f \cdot \left( k_3 - \frac{k_4}{x} \right)$ . Отсюда следует, что  $f$  растет при  $x > x_n$  и убывает при

$x < x_n$ . Тем самым ее минимум достигается при  $x = x_n$ . Аналогично ведет

себя функция  $g(y)$ . Она имеет минимум при  $y = y_n$ . Поэтому поверхность

$C(x, y) = f(x)g(y)$  имеет характер прогнутой поверхности, имеющей минимум в точке покоя и бесконечно возрастающую к границам первого квадранта и бесконечности на плоскости  $(x, y)$ .

Фиксируем произвольное значение  $C > C_n$  и произвольное  $y$ , лежащее на линии уровня  $C = const$ . Значения  $x$ , соответствующие выбранному  $C$  и  $y$ , определяются условием  $f(x) = C / g(y)$ . Учитывая характер функции  $f(x)$ , показанный на рисунке, видим, что имеются два таких значения  $x$ . Таким образом, при  $C > C_n$  каждому  $y$  соответствуют два значения  $x$  лежащему на линии уровня  $C = const$ . Аналогично, каждому  $x$ , лежащему на линии уровня соответствуют два  $y$ .



При  $C > C_n$  получаем замкнутые линии уровня, лежащие в области  $x > 0, y > 0$ . Отсюда, если начальная точка  $(x_0, y_0)$  лежит в первом квадранте, то фазовая траектория не покидает первого квадранта, т.е.  $x(t) > 0$  и  $y(t) > 0$  в любой момент времени.

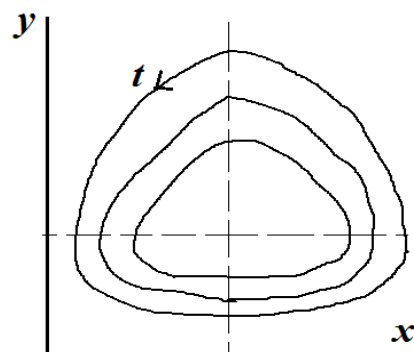
Если начальная точка не совпадает с точкой покоя, то из (9) следует, что либо  $\frac{\partial x}{\partial t} \neq 0$ , либо  $\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0$ . Иными словами  $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \neq 0$ .

Получаем непрерывное движение.

Направление движения на фазовой плоскости можно определить по нижней точке фазовой кривой, соответствующей  $x = x_n$ . При этом  $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ ,

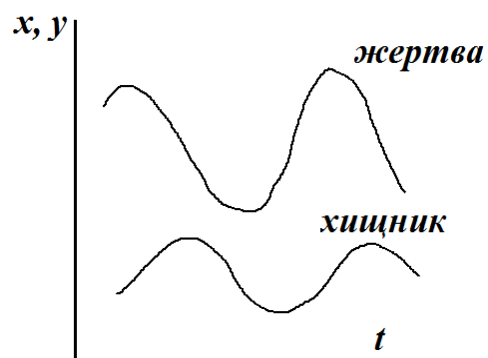
а  $\frac{\partial x}{\partial t} = x_n (k_1 - k_2 y) > 0$ , что задает направление

обхода против часовой стрелки.



Вид интегральных кривых показан на следующем рисунке.

Рассмотренная задача служит примером того, как в системе, описываемой нелинейными уравнениями, может возникнуть взаимодействие факторов, приводящее к возникновению устойчивой структуры решения. В данном случае, к появлению устойчивого циклического процесса.



## Литература.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1977.
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике, Москва, 1993.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие, СПб, 2011.
4. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения, Москва, 1980.
5. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры, Москва, 2002.
6. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование, Москва, 2002.