

2. Математические модели теории нелинейных волн

1. Метод характеристик

Рассмотрим уравнение колебания на бесконечной прямой

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1)$$

решение которого имеет вид:

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad (2)$$

и рассмотрим два уравнения в частных производных первого порядка, решения которых имеют вид (3) и (4):

$$u_t^{(1)} + au_x^{(1)} = 0, \quad u^{(1)}(x, t) = f_1(x - at) \quad (3)$$

$$u_t^{(2)} - au_x^{(2)} = 0, \quad u^{(2)}(x, t) = f_2(x + at) \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) называются линейными уравнениями переноса. Их решения (функции $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$) переносят начальные профили $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вдоль оси x с постоянной скоростью a в положительном и отрицательном направлениях.

Если решение уравнений переноса является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своего аргумента, то оно удовлетворяет и уравнению колебаний (1).

При распространении волны не происходит искажения ее профиля по времени, то есть отсутствует эффект дисперсии волны. Это связано с постоянством скорости распространения волны, которое определяется постоянством параметров среды.

Однако во многих физических задачах приходится учитывать изменение свойств среды под действием распространяющихся в ней волн, что приводит к зависимости скорости распространения волн от решения. В этом случае необходимо рассматривать квазилинейное уравнение переноса:

$$u_t + F(u)u_x = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим задачу Коши на бесконечной прямой

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (6)$$

Решение ищем в виде $u(x, t) = f(x - u(x, t)t)$.

Тогда

$$\begin{aligned} u_x &= (1 - u_x t) f'(\xi), \\ u_t &= (-u - u_t t) f'(\xi) \end{aligned} \quad \xi = x - ut.$$

и получаем

$$-t(u_t + uu_x) f'(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ - любая дифференцируемая функция.

Решение задачи (6), (7) определяется из неявного уравнения

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t) \quad (8)$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) кривую, определяемую уравнением (9) – характеристику уравнения (6):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x, t)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u(x, t) \quad (9)$$

Если $x = x(t)$ - решение уравнения (9), то

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + u u_x \Big|_{x=x(t)} = 0$$

и $u(x(t), t)$ является константой на кривой $x = x(t)$ и, следовательно, $x = x(t)$ – прямая линия на плоскости (x, t) с наклоном

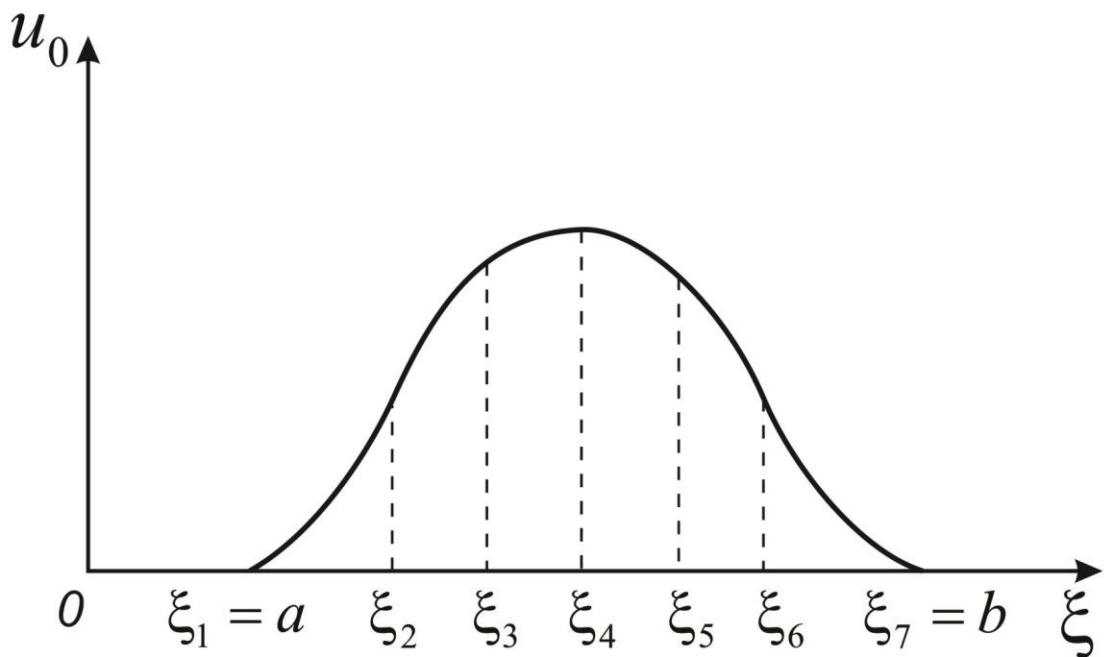
$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0)),$$

определяемым начальной функцией $u_0(\xi)$, $\xi = x(0)$.

Уравнение для этой прямой имеет вид:

$$\frac{t}{1} = \frac{x - \xi}{u_0(\xi)} \quad \Rightarrow \quad x = \xi + u_0(\xi) \cdot t$$

Мы получили однопараметрическое семейство прямых, зависящих от параметра ξ , на которых решение $u(x,t)$ уравнения (6) оказывается постоянным. Это позволяет по начальной функции $u_0(\xi)$ определить функцию $u(x,t)$ в любой момент времени t . Покажем, как это можно сделать практически.



Выберем точку

$$\xi_k \in [a, b]$$

и построим

соответствующую ей
характеристику Γ_{ξ_k} :

$$t = \frac{1}{u_0(\xi_k)} x - \frac{\xi_k}{u_0(\xi_k)}$$

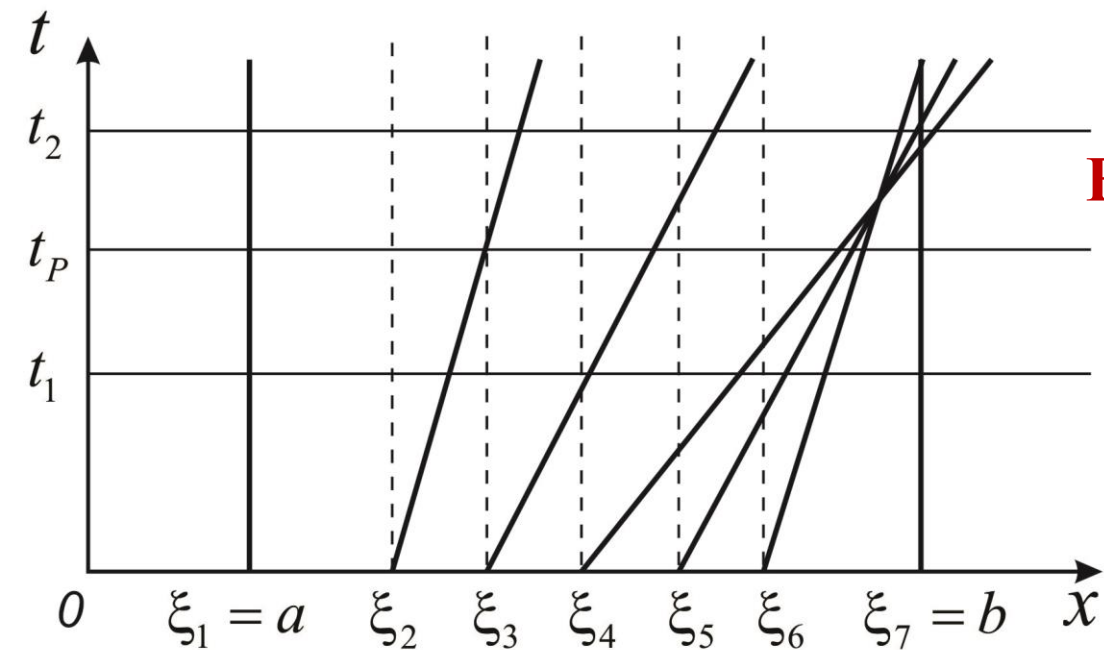
с углом наклона

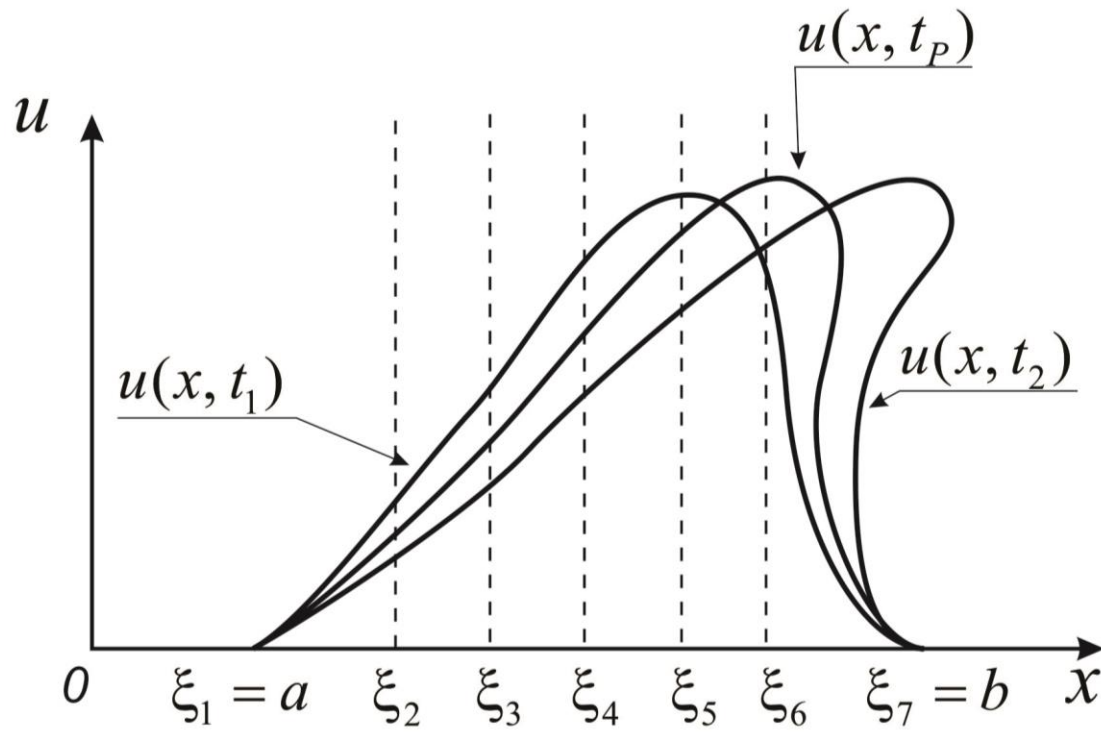
$$\operatorname{tg} \varphi = 1/u_0(\xi_k).$$

Всюду на характеристике

$$u_{\Gamma_{\xi_k}} = u_0(\xi_k).$$

Точка (x_k, t_1) – точка
пересечения прямой $t=t_1$
с характеристикой Γ_{ξ_k} .





Скорость переноса начального значения $u_0(\xi_k)$ вдоль характеристики Γ_{ξ_k} зависит от решения, **профиль $u_0(x)$ искажается – дисперсия бегущей волны. При $t \geq t_p$ характеристики пересекаются, профиль неоднозначный – опрокидывание волн.**

Причина явления опрокидывания волны заключается в том, что, согласно формуле (8)

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t) \cdot t) \quad (8)$$

чем выше амплитуда точки, тем с большей скоростью волна распространяется. Поэтому точки вершины волны обгоняют в своем движении точки ее подошвы.

Замечание. Возникновение неоднозначного профиля решения достаточно часто оказывается противоречащим сути физической модели, описываемой уравнением (6)

$$u_t + uu_x = 0, \quad (6)$$

согласно которой функция $U(x, t)$ является однозначной функцией.

Например, при рассмотрении волн в сплошных средах в одной точке физические параметры не могут иметь различные значения.

Для того, чтобы исключить неоднозначные решения необходимо расширить понятие решения уравнения (6)

$$u_t + uu_x = 0 \quad (6)$$

и вместо непрерывно дифференцируемых решения рассматривать разрывные.

При этом нужно придать новый смысл выражению «функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (6)».

Естественным является введение обобщенных решений так, как они вводятся в теории обобщенных функций.

2. Обобщенное решение . Условие на разрыве

Определение. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6) **в обобщенном смысле**, если для любого прямоугольника

$$\Pi_{xt} = \{(x,t) : x_1 < x < x_2, 0 < t_1 < t < t_2\}$$

и любой бесконечно дифференцированной и финитной в

Π_{xt} функции $\psi(x,t)$ справедливо интегральное тождество:

$$\int_{\Pi_{xt}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x \right\} dxdt = 0. \quad (10)$$

Замечание. Если $u \in C^{(1)}$, то **обобщенное решение** (10) удовлетворяет уравнению (6) **в обычном смысле**: проинтегрируем (10) по частям

$$\int_{\Pi_{xt}} \{u_t + uu_x\} \psi dxdt = 0. \quad (11)$$

В силу произвольности Π_{xt} и ψ из (11) получим (6).

Замечание. Для получения формулы (10) запишем уравнение (6) в следующем виде:

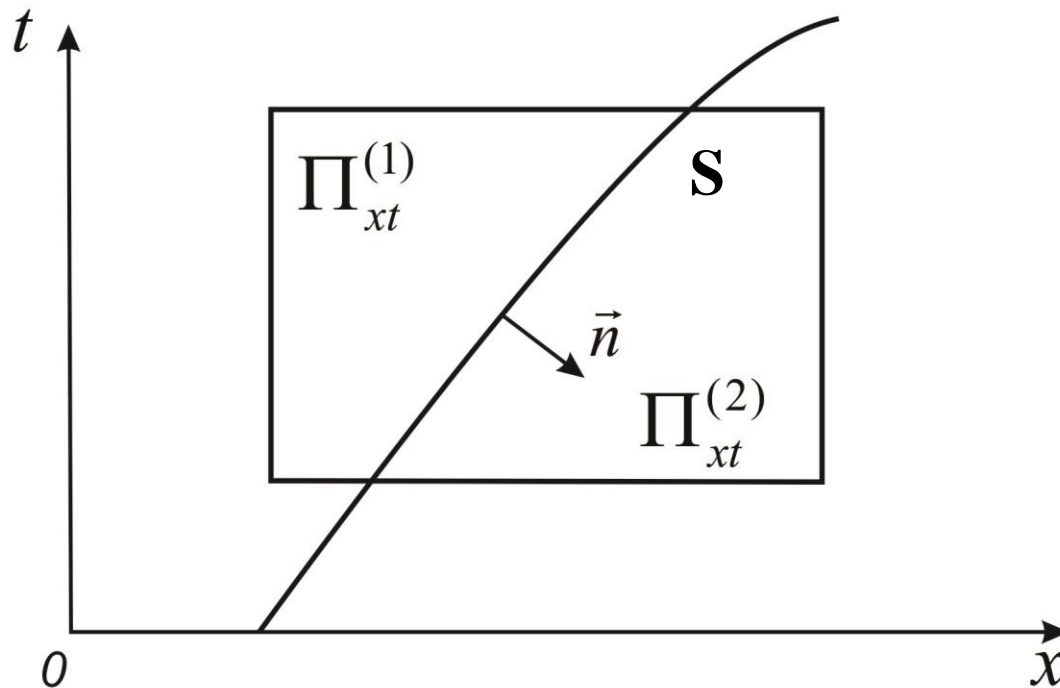
$$u_t + uu_x = u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0.$$

Умножим это уравнение на функцию ψ и проинтегрируем по прямоугольнику $\Pi_{x,t}$ по частям, учитывая финитность функции ψ :

$$\int_{\Pi_{x,t}} \left\{ u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x \right\} \psi dxdt = \int_{\Pi_{x,t}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2} u^2 \psi_x \right\} dxdt = 0.$$

Пусть $u(x,t)$ – **разрывное решение**, имеющее **единственный разрыв** на кривой $S = \{(x,t) : x = s(t)\}$:

Пусть $u(x,t) \in C^{(1)}$ при $(x,t) \in \Pi_{x,t}^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2$



Функция $u(x,t)$ в областях $\Pi_{x,t}^{(\ell)}$, $\ell = 1, 2$ удовлетворяет уравнению (6) в классическом смысле.

Проинтегрируем (10) по частям в области $\Pi_{x,t}^{(1)}$:

$$\int_{\Pi_{xt}^{(1)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt =$$

$$= \int_S \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^- + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^-)^2 \right\} ds$$
(12)

и в области $\Pi_{x,t}^{(2)}$:

$$\int_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt =$$

$$= - \int_S \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^+ + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^+)^2 \right\} ds,$$
(13)

где $\vec{n} = \left\{ \cos(\hat{nx}), \cos(\hat{nt}) \right\}$, u^+ , u^- - предельные значения $u(x,t)$ на кривой S при стремлении к ней справа и слева.

Замечание. При получении формул (12) и (13) была использована **формула интегрирования по частям:**

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \oint_{\Gamma} uv \cos \varphi_k ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx,$$

где $D \in R^m$ - область с гладкой (или хотя бы кусочно-гладкой границей) Γ , $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, φ_k - угол между осью Ox_k и внешней нормалью к поверхности Γ .

Формула справедлива для функций $u, v \in C^{(1)}(\bar{D})$.

Сложим (12) и (13):

$$\int_{\mathbf{s}} \psi \left\{ \cos(\hat{nt}) [u] + \cos(\hat{nx}) \left[\frac{u^2}{2} \right] \right\} ds = 0, \quad (14)$$

где $[u] = u^+ - u^-$. В силу произвольности $\psi(x, y)$ из (14) \Rightarrow

$$\cos(\hat{nt}) [u] + \cos(\hat{nx}) \left[\frac{u^2}{2} \right] \Big|_S = 0. \quad (15)$$

Так как

$$\cos(\hat{nt}) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad \cos(\hat{nx}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad (16)$$

то (15), (16) \Rightarrow

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}, \quad (17)$$

где $V_p = \dot{s}(t)$ - скорость распространения разрыва.

Формула (17) называется формулой Гюгонио – Ренкина или формулой условий на разрыве.

Формула (17) позволяет определить скорость распространения разрыва по значениям u^\pm , но не дает ответа на вопрос о положении разрыва $x=s(t)$.

Уравнение (6), записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

одномерного уравнения неразрывности или закона сохранения. Интегрируя по x , получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0, \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx,$$

предполагая, что $u \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Площадь I под кривой $u=u(x, t)$ оказывается инвариантной во времени, то есть является интегралом движения.

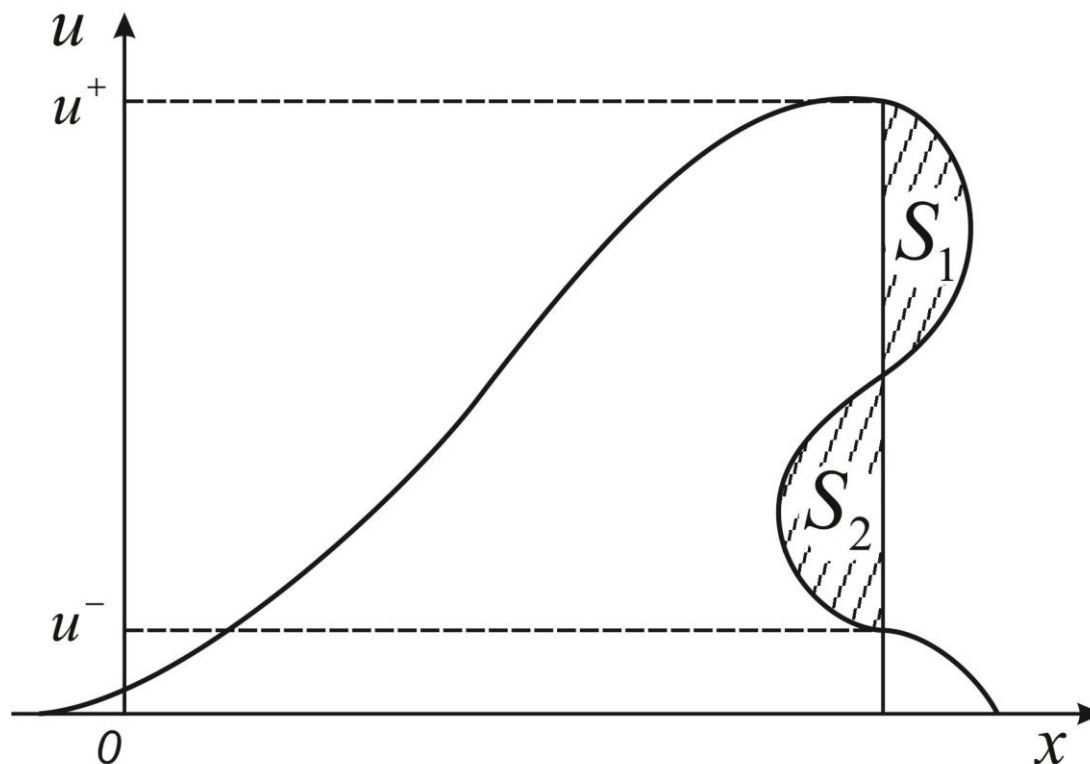
Основная идея при проведении разрыва состоит в том, чтобы при построении разрыва сохранить этот интеграл движения для разрывного решения.

Разрыв $x = s(t)$ нужно провести так, чтобы интеграл $I(u)$, отвечающий разрывному решению, был равен интегралу $I(u_0)$ для начальной функции.

Разрыв $x = s(t)$ проводится таким образом, чтобы площади S_1 и S_2 заштрихованных на рисунке областей совпадали.

В результате из непрерывного неоднозначного решения получается разрывное, но уже однозначное решение, являющееся обобщенным решением уравнения (6).

Условие на разрыве (17) выполняется при этом автоматически.



Разрыв $x=s(t)$ нужно построить так, чтобы $I(u)$, отвечающий разрывному решению, был равен $I(u_0)$ для начальной функции u_0 .

3. Уравнение Кортевега – де Фриза и законы сохранения

Функция $\eta(x, t)$, описывающая процесс распространения длинных волн на поверхности воды, приближенно удовлетворяет уравнению

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2h_0} \eta \right) \eta_x + \frac{h_0^2}{6} c_0 \eta_{xxx} = 0, \quad (18a)$$

где h_0 - глубина жидкости, $c_0 = \sqrt{gh_0}$ - скорость длинных волн на мелкой воде.

Уравнение (18a) называется уравнением Кортевега - де

Фриза.

Из (18a) с помощью линейной замены переменных получим:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (18б)$$

(18б) – канонический вид уравнения Кортевега - де Фриза.

Уравнение (18б) обладает бесконечным числом интегралов движения (законов сохранения):

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx,$$

и т.д. Это означает, что данное уравнение обладает **глубокой внутренней симметрией**, которая выделяет его среди других нелинейных уравнений и позволяет построить чрезвычайно изящный метод построения точного решения, основанный на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

4. Схема метода обратной задачи

1) Прямая и обратная задачи рассеяния

Определение. Функция $f(x, t)$ называется **быстроубывающей**, если

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |f(x, t)| dx < \infty. \quad (19)$$

С уравнением Кортевега–де Фриза тесно связано **стационарное уравнение Шредингера (20):**

$$\psi_{xx} + (\lambda - u(x, t))\psi = 0 \quad (20)$$

с потенциалом $u(x, t)$, зависящим от t как от параметра.

Рассмотрим для уравнения (20) две задачи:

а) Нахождение квантовомеханических уровней энергии связанных состояний.

Найти такие значения λ , при которых уравнение (20) имеет нетривиальные решения $\psi(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$. Здесь $\psi(x, t)$ — **-нормированные на единицу волновые функции.**

Эта задача имеет решение только при $\lambda < 0$.

При $x \rightarrow \infty$ решения имеют асимптотику:

$$\psi_m(x, t) \sim C_m(t) e^{-\alpha_m x},$$

где $\psi_m(x, t)$ - собственная функция, нормированная на 1, $\lambda_m = -\alpha_m^2$ — собственное значение,

$$C_m(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_m(x, t) e^{\alpha_m x} \quad (21)$$

б) Задача рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале $u(x,t)$.

Найти при $\lambda \geq 0$ ограниченные решения уравнения (20) с заданным характером асимптотического поведения при $x \rightarrow \pm\infty$ (временная зависимость $e^{-i\omega t}$ волна движется справа налево):

$$\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

где $k^2 = \lambda$, а подлежащие определению функции $a(k,t)$ и $b(k,t)$ - коэффициенты прохождения и отражения, причем

$$|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1.$$

Совокупность решений задач а) и б) $\{\alpha_m, C_m\}$, $\{a(k,t), b(k,t)\}$

называются данными рассеяния.

Прямая задача рассеяния: определение для заданного потенциала данных рассеяния.

Обратная задача рассеяния: определение по заданным данным рассеяния соответствующего потенциала.

Данных рассеяния достаточно для однозначного определения потенциала.

Схема решения обратной задачи рассеяния.

а) По данным рассеяния строится функция $B(x;t)$ – **ядро уравнения Гельфанда – Левитана:**

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(t) e^{-\varkappa_m x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t) e^{ikx} dk \quad (22)$$

б) Ищется решение линейного интегрального уравнения Гельфанда – Левитана:

$$K(x, y; t) + B(x + y; t) + \int_x^\infty B(y + z; t) K(x, z; t) dz = 0 \quad (23)$$

в) Решив уравнение (23) и найдя $K(x, y; t)$, по формуле (24)

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x; t) \quad (24)$$

определяем функцию $u(x, t)$, которая и является искомым потенциалом, то есть решением обратной задачи рассеяния.

2) Решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t - buu_x + u_{xxx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (25)$$

Решение $u(x, t)$ задачи Коши (25) назовём **быстроубывающим**, если функция $u(x, t)$ и все её производные по x до третьего порядка являются быстроубывающими функциями.

Теорема 1

Если потенциал $u(x, t)$ в (20) является **быстроубывающим решением** уравнения Кортевега – де Фриза, то собственные значения $\lambda_m = -\alpha_m^2$ **не зависят от времени t .**

Теорема 2

Если потенциал $u(x,t)$ в (20) является **быстроубывающим** решением уравнения Кортевега – де Фриза, то данные рассеяния $C_m(t), b(k,t)$ и $a(k,t)$ зависят от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} C_m(t) &= C_m(0) \exp(4 \varkappa_m^3 t), \quad \varkappa_m^2 = -\lambda_m, \\ b(k,t) &= b(k,0) \exp(i 8 k^3 t), \quad k^2 = \lambda > 0, \\ a(k,t) &= a(k,0) \end{aligned} \quad (26)$$

Зная данные рассеяния для $u(x) \equiv u(x,0)$, можно по формулам (26) найти данные рассеяния для $u(x,t)$ и затем, построив и решив уравнение Гельфанда – Левитана, определить функцию $u(x,t)$.

Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши:

а) Рассматриваем стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $u_0(x)$:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u_0(x))\psi = 0 \quad (27)$$

и определяем данные рассеяния $\{\varkappa_m, C_m(0)\}$ и $\{a(k,0), b(k,0)\}$.

б) По формулам (26) определяем $C_m(t)$ и $b(k,t)$ и строим ядро уравнения Гельфанда - Левитана (23):

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^n C_m^2(0) \exp(8\varkappa_m^3 t - \varkappa_m x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0) \exp(i8k^3 t + ikx) dk \quad (28)$$

в) Решив уравнение Гельфанда – Левитана (23) с ядром (28), по формуле (24) определяем решение $u(x,t)$ задачи Коши (25) для уравнения Кортевега – де Фриза.

5. Солитонные решения

Рассмотрим решение задачи Коши (25) при

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \quad (29)$$

Данные рассеяния для уравнения (20) с потенциалом (29)

$$\psi_{xx} + \left(\lambda + \frac{2}{ch^2 x} \right) \psi = 0 \quad (30)$$

имеют вид: $b(k,0)=0$, существует только одно собственное значение $\lambda_1 = -1 = -\alpha_1^2$, $C_1(0) = \sqrt{2}$.

Ядро уравнения Гельфанда – Левитана имеет вид

$$B(x;t) = 2e^{8t - x} \quad (31)$$

Рассмотрим **уравнение Гельфанда – Левитана с ядром (31):**

$$K(x, y; t) + 2e^{8t - x - y} + 2e^{2t - y} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-z} dz = 0 \quad (32)$$

и будем искать его решение в виде

Получим
$$K(x, y; t) = L(x; t) e^{-y}. \quad (33)$$

$$L(x; t) = -\frac{2e^x}{1 + e^{2x - 8t}} \quad (34)$$

Следовательно,

$$K(x, y; t) = -\frac{2e^{x - y}}{1 + e^{2x - 8t}} \quad (35)$$

и по формуле (24) получим решение задачи Коши (25) с начальной функцией (29):

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} \left\{ -\frac{2}{1 + e^{2x - 8t}} \right\} = -\frac{2}{ch^2(x - 4t)}. \quad (36)$$

Решение (36) является частным случаем более общего решения уравнения Кортевега – де Фриза

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1}{ch^2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha (x - x_0) - \frac{\alpha^3}{2} t \right\}}, \quad (37)$$

соответствующее значение параметров $\alpha = 2$, $x_0 = 0$.

Решения уравнения Кортевега – де Фриза вида (37) получили название **СОЛИТОНОВ**. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Пусть имеется два решения $u_j(x, t, \alpha_j, x_{0j})$, $j = 1, 2$, вида (37), находящиеся на большом расстоянии друг от друга (то есть разность $x_{02} - x_{01}$ велика) и пусть $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда эти решения **практически не взаимодействуют** и распространяются независимо друг от друга. Однако со временем солитон u_1 , имеющий большую скорость α_1 распространения, догонит солитон u_2 и **произойдет их нелинейное взаимодействие**.

Замечательным оказывается то, что после этого взаимодействия солитоны u_1 и u_2 **разойдутся («пройдя через друг друга»)**, не изменив своей формы, причем теперь **солитон u_1 будет двигаться впереди солитона u_2** . Единственным результатом взаимодействия будет то, что **солитоны приобретают «скачки фаз»**: величины x_{0j} получают приращение Δx_{0j} , причем $\Delta x_1 > 0$, а $\Delta x_2 < 0$.

Тем самым солитон u_1 «прыгает» вперед (вправо) на Δx_{01} , а солитон u_2 получает «отдачу» назад (влево) на величину Δx_{02} .

Эти частицеподобные свойства, проявляющиеся во взаимодействии, обусловили название солитонов и тот огромный интерес, который проявляется к их изучению.

Можно дать следующее определение солитонов, как решений нелинейных уравнений:

Определение. Будем называть солитонами такие решения нелинейных уравнений, которые имеют вид бегущих уединенных волн, взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращения в фазах.