Глава 3. Математическое моделирование нелинейных объектов и процессов

1. Математические модели процессов нелинейной теплопроводности и горения

1. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности

Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}) \qquad (1)$$

Параболическое уравнение (1) с коэффициентом *K(u)*, удовлетворяющим условию *K*(0)=0, называется вырождающимся.

Автомодельными решениями уравнения (1) мы будем называть такие его частные решения специального вида, которые могут быть получены путем интегрирования некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, аргументы искомых функций которых представляют собой комбинацию независимых переменных *x* и *t*.

Найдем автомодельное решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям:

$$u(0,t)=u_1,\quad u(x,0)=u_2 \qquad (2)$$

Пусть

$$\xi=\frac{x}{2\sqrt{t}},\quad u(x,t)=\theta\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)=\theta(\xi). \qquad (3)$$

Тогда:

$$\begin{cases}(k(\theta)\ \theta')'=-2c\rho\xi\theta',\quad \xi>0, & (4)\\ \theta(0)=u_1,\quad \theta(\infty)=u_2. & (5)\end{cases}$$

Задача (4),(5) имеет единственное решение, которое в общем случае находится численно.

Рассмотрим автомодельное решение уравнения (1) типа бегущей волны:

$$\xi = x - Dt, \quad u(x,t) = \theta(x - Dt) = \theta(\xi). \qquad (6)$$

Из (1) и (6) получим: $(k(\theta)\theta')' = -Dc\rho\theta', \quad -\infty < \xi < \infty \qquad (7)$

Ищем непрерывное решение, обладающее непрерывным «тепловым потоком»:

$$k(\theta)\ \theta' \Rightarrow \quad W(x,t) = -k(u(x,t))\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (8)$$

Пусть бегущая волна начала движение по нулевому фону температуры:

$$\theta(\xi) \to 0,\ \xi \to \infty; \quad k(\theta)\theta' \to 0,\ \xi \to \infty. \qquad (9)$$

Тогда из формул (7) и (9) получим уравнение:

$$\frac{k(\theta)}{\theta}\frac{d\theta}{d\xi} = -Dc\rho \qquad (10)$$

Пусть $k(u) = k_0 u^{\sigma}, k_0 > 0, \sigma > 0$ (при $\sigma = \frac{5}{2}$ получаем коэффициент электронной теплопроводности в полностью ионизованной плазме). Тогда решение уравнения (10) имеет вид:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma D c \rho}{k_0} (-\xi) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi \le 0, \\ 0, & \xi > 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Из формул (6) и (11) получим:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} (1 - \dfrac{x}{Dt})^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \le x \le Dt, \\ 0, & x > Dt, \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$u_0 = \left(\frac{\sigma D^2 c \rho}{k_0} \right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Функция (12) – обобщенное решение квазилинейного вырождающегося параболического уравнения, обладающая следующими свойствами:

а) функция (12) финитна по *x* в любой конечный момент времени: существует постоянная *A*>0 такая, что *u(x,t)*=0 при $x \geq$ *A;*

***б*) функция (12) не имеет всюду непрерывных производных, входящих в уравнение (1): при $\sigma = 1$ они имеют разрыв первого рода, при $\sigma = 2$ - разрыв второго рода на прямой $x = Dt$.**

Замечание. Тепловой поток:

$$W(x,t) = \begin{cases} \dfrac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma D} t^{\frac{1}{\sigma}} (1 - \dfrac{x}{Dt})^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leq x \leq Dt, \\ 0, & x > Dt \end{cases} \qquad (13)$$

является непрерывной функцией: $W(Dt-0,t) = W(Dt+0,t) = 0;$

в) отличительной особенностью вырождающихся уравнений (1) является то, что они могут описывать процессы с конечной скоростью распространения возмущения.

Решения вида (3) и (6) – единственные типы нетривиальных автомодельных решений, которые допускает уравнение (1) при произвольных коэффициентах *k(u)*. Новые типы автомодельных решений появляются только при специальном виде функции *k(u)*.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k_0 u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x > 0,\ t > 0, & (14) \\ u(x,0) = 0, \quad x \ge 0, & (15) \\ u(0,t) = u_0 t^m, \quad t \ge 0, \quad m > 0. & (16) \end{cases}$$

Автомодельное решение: $\xi = \dfrac{x}{k_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{\sigma}{2}} t^{\frac{1+m\sigma}{2}}}, \quad u(x,t) = u_0 t^m \theta(\xi) \quad (17)$

Для функции $\theta(\xi)$ **получаем задачу:**

$$(\theta^\sigma \theta')' + \tfrac{1}{2}(1+m\sigma)\xi\theta' - m\theta = 0, \qquad \xi>0, \qquad (18)$$

$$\theta(0) = 1, \quad \theta(\infty)=0, \qquad (19)$$

непрерывность теплового потока $\theta^\sigma \theta'$ **.**

При $m=\sigma^{-1}$ решение (17) совпадает с бегущей волной (11). При $m\neq\sigma^{-1}$ задача (18),(19) решается численно.

Можно показать, что при любом *m*>0 существует такое $\xi_0(m,\sigma)>0$, что $\theta(\xi)=0$ при $\xi>\xi_0$ и $\theta(\xi)>0$ при $0\le\xi\le\xi_0.$ Решение (17) – тепловая волна, движущаяся по невозмущенному фону температур. Фронт волны $x_\Phi(t)$:

$$x_\Phi(t)=\xi_0 k_0^{\frac{1}{2}} u_0^{\frac{\sigma}{2}} t^{\frac{1+m\sigma}{2}} \qquad (20)$$

ускоряет своё движение и при $t\to\infty$ нагревает до бесконечно больших температур всю полупрямую $x\ge 0.$

Решение асимптотически устойчиво при $t\longrightarrow\infty$ относительно малых изменений начальных значений и малых отклонений $k(u)$ от степенной зависимости. При незначительных изменений условий (15),(16) основные закономерности процесса нагрева, которые даёт пространственно-временная структура автомодельного решения (17), сохраняются.

2. Режимы с обострением

Режимом с обострением называется такой закон изменения некоторой величины, который обеспечивает её неограниченное возрастание в течение конечного времени.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = k_0 (u^2 u_x)_x + q_0 u^\beta, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \le T, & (1) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \; k_0 > 0, \; q_0 > 0. & (2) \end{cases}$$

Конкуренция нелинейных процессов теплопередачи и тепловыделения: эффект локализации процесса горения (проявление процесса самоорганизации нелинейной диссипативной среды). Возникновение в среде целого набора различных структур, не взаимодействующих друг с другом.

Сверхинтенсивное горение: $\beta > 1.$

Введём преобразование переменных:

$$t \to \frac{t}{q_0}, \qquad x \to x\sqrt{\frac{k_0}{q_0}} \tag{3}$$

и приведём уравнение (1) к безразмерному виду:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^\beta \ . \tag{4}$$

Свойства решений уравнения (4) существенно различаются в случаях $\beta = 3, \beta < 3, \beta > 3.$

Частный случай уравнения (4): $u_t = (u^2 u_x)_x \ .$ (5)

Получим точное автомодельное решение уравнения (5) вида:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}\theta(\xi), \quad \xi = \frac{x^2}{\sqrt{t}} \tag{6}$$

Из формул (5),(6) получаем:

$$2\theta^2(\xi)\theta'(\xi) + \frac{1}{4}\theta(\xi) = \psi(\xi), \quad 2\xi\psi'(\xi) + \psi(\xi) = 0.$$

Решение Зельдовича – Компанейца – Баренблатта:

$$u_A(x,t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{1}{2}\left(\eta_0^2-\frac{x^2}{\sqrt{t}}\right)\right]_+^{\frac{1}{2}}, \qquad (7)$$

где

$$\eta_0=2\sqrt{\frac{E_0}{\pi}}, \quad [z]_+=\max\{0,z\}, \quad u_A(0,t)=\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}\frac{\eta_0}{\sqrt{2}},$$

$$u_A(x,t)\neq 0, \quad x\in\left(-\eta_0 t^{\frac{1}{4}},\eta_0 t^{\frac{1}{4}}\right), \quad t>0.$$

Решение (7) описывает тепловые волны. $u_A(x,t)$ **- это решение типа мгновенного точечного источника мощности *E_0*, действовавшего в точке *x*=0 в момент *t*=0.**

1) Пусть в среде имеется источник тепловой энергии, соответствующий $\beta=3$:

$$u_t=(u^2u_x)_x+u^3. \qquad (8)$$

Ищем автомодельное решение (8) в виде:

$$u = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}}\theta(x) \tag{9}$$

Из формул (8) и (9) следует уравнение для функции $\theta(x)$:

$$\theta(x)\theta''(x) + 2(\theta'(x))^2 + \theta^2(x) = \tfrac{1}{2} \tag{10}$$

Формулы (9) и (10) определяют локализованный режим:

$$u_A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{T_0 - t}} \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{L_S}\right), & |x| < \frac{L_S}{2}, \\ 0, & |x| \geq \frac{L_S}{2}, \end{cases} \tag{11}$$

где T_0 – время существования решения, $L_S = \pi\sqrt{3}$ - длина носителя решения в любой момент времени.

Решение локализовано в области $\omega_L = (-\frac{L_S}{2}, \frac{L_S}{2})$. При

$$t \to T_0,\ x \in \omega_L,\ u_A(x,t) \to \infty,\ u_A(0,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{(T_0 - t)}} \to \infty,\ t \to T_0.$$

Тепловая структура (11) называется локализованным S-режимом с обострением и представляет собой стоячую температурную волну.

2) Рассмотрим уравнение (4) с $\beta = 2$:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^2 \qquad (12)$$

Ищем решение в виде:

$$u_A(x,t) = \frac{1}{T_0 - t}\theta(\xi),\ \xi = x\sqrt{T_0 - t}, \qquad (13)$$

где T_0- время существования тепловой структуры.

Из формул (12) и (13) получаем уравнение:

$$(\theta^2\theta')' + \frac{\xi}{2}\theta' - \theta + \theta^2 = 0. \qquad (14)$$

Функция $\theta(\xi)$ **строго положительна на интервале** $(-\xi_0, \xi_0)$ **и равна нулю вне его. Функция** $\theta(\xi)$ **и** ξ_0 **определяются численно.**

Свойства решения:

а) режим с обострением: $u_A(0,t) = \frac{1}{T_0 - t}\theta(0) \to \infty, \qquad t \to T_0;$

б) в любой момент времени тепловая структура имеет конечный правый $x_+(t)$ **и левый** $x_-(t)$ **фронты:**

$$x_+(t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{T_0 - t}}, \qquad x_-(t) = -\frac{\xi_0}{\sqrt{T_0 - t}} \qquad (15)$$

в) фронты движутся с увеличивающейся скоростью и в момент обострения $t=T_0$ тепловая структура охватывает всю прямую, нагревая её всюду до бесконечной температуры.

Такой процесс горения, описываемый уравнением (12), называется HS –режимом.

3) Рассмотрим уравнение (4) при $\beta = 4$:

$$u_t = (u^2 u_x)_x + u^4 \qquad (16)$$

Мощность источника энерговыделения $Q(u) = u^4$ **при больших температурах выше, чем в S-режиме** $(\beta = 3)$ **и HS-режиме** $(\beta = 2)$.

Такой тепловой процесс, описывающий сильно локализованные структуры, называется LS-режимом.

Ищем решение уравнения (16) в виде:

$$u_A(x,t) = \frac{1}{\sqrt[3]{T_0 - t}}\,\theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{\sqrt[6]{T_0 - t}}, \qquad (17)$$

где $T_0 > 0$ –время обострения решения.

Из формул (16) и (17) следует уравнение:

$$(\theta^2\theta')' - \frac{1}{6}\xi\theta' - \frac{1}{3}\theta + \theta^4 = 0, \qquad \theta(\xi)>0, \ -\infty<\xi<\infty. \quad (18)$$

Асимптотика решения имеет вид:

$$\theta(\xi) \simeq C_A \frac{1}{|\xi|^2}, \qquad |\xi| \to \infty,$$

где C_A **- постоянная, определяемая численно.**

Локализация понимается в эффективном смысле: решение со временем растет во всех точках, но неограниченно растет только в точке *x*=0.

Температура ограничена сверху предельным распределением:

$$u_A(x,t) < u_A(x,T_0) = \frac{C_A}{|x|^2}. \quad (19)$$

Заключительные замечания.

Задание с помощью функции $u_0(x)$ распределенной в пространстве специальным образом начальной тепловой энергии приводит к горению среды, причем ввиду нелинейности уравнения (1) интенсивность горения, а также теплоперенос в различных участках прямой протекают различным образом. С течением времени в среде возникают меняющиеся в пространстве и времени распределения температуры, называемые тепловыми структурами.

Одним из главных результатов конкуренции нелинейных процессов теплопередачи и тепловыделения является эффект локализации процессов горения, который в данном случае выступает как проявление процесса самоорганизации нелинейной диссипативной среды. Он может приводить к возникновению в среде целого набора различных структур, не взаимодействующих друг с другом.

Если задача допускает неограниченное решение, то она называется глобально (по времени) неразрешимой.

Исследование пространственно-временной структуры неограниченных решений вблизи момента обострения связаны с широким использованием в практике физических экспериментов разнообразных эффектов, порождаемых сверхбыстрыми процессами, например, эффекта самофокусировки световых пучков в нелинейной среде, коллапса ленгмюровских волн в плазме и ряда других.