Теория устойчивости разностных схем

1 Устойчивость решения задачи Коши по начальным данным и правой части

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово (то есть полное нормированное) пространство функций, заданных в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^m$, и пусть $u(t)$ — абстрактная функция аргумента $t \in [0, T]$ со значениями в пространстве $\mathfrak{B}$. Пусть A — линейный оператор, действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$, $D(A)$ — его область определения. Будем считать, что область определения оператора A является всюду плотным множеством в $\mathfrak{B}$, то есть замыкание $D(A)$ совпадает с $\mathfrak{B}$: $\overline{D(A)} = \mathfrak{B}$.

Рассмотрим абстрактную задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t \in (0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $f(t)$ — абстрактная функция со значениями в $\mathfrak{B}$, u_0 — элемент пространства $\mathfrak{B}$.

Определение 1.1 *Задача Коши (1.1) называется устойчивой по начальным данным и по правой части, если при всех $t \in [0, T]$ справедливо неравенство:*

$$\|u(t)\| \leqslant M_1 \|u_0\| + M_2 \int\limits_0^t \|f(t')\| dt',$$

где $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ — числа, не зависящие от t.

Определение 1.2 *Задача Коши (1.1) называется равномерно устойчивой по начальным данным, если для решения соответствующей однородной задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

справедливо неравенство:

$$\|u(t)\| \leqslant M_1 \|u(t')\|, \quad 0 \leqslant t' < t.$$

2 Операторно-разностные схемы

2.1 Понятие r-слойной операторно-разностной схемы

Рассмотрим разностную аппроксимацию задачи (1.1). Для этого введем в области G сетку и будем далее рассматривать на ней сеточные функции $y_h(t)$. Пусть $h = \{h_1, h_2, ..., h_m\}$ — параметр, характеризующий выбранную сетку, h_i — шаг по направлению x_i, $i = 1, 2, ..., m$. Введем сеточный аналог банахова пространства $\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}_h$ — линейная система сеточных функций, зависящих от параметра h, то есть для любых функций $y_h^{(1)}(t), y_h^{(2)}(t) \in \mathfrak{B}_h$ и любых чисел α_1, α_2 линейная комбинация $\alpha_1 y_h^{(1)}(t) + \alpha_2 y_h^{(2)}(t)$ также принадлежит $\mathfrak{B}_h$. Если ввести на $\mathfrak{B}_h$ норму, то получим сеточное линейное нормированное пространство.

Введем сетку по времени $\overline{\omega}_\tau \equiv \{t_j = j \cdot \tau;\ j = 0, 1, ..., J;\ \tau = T/J\}$ и будем использовать обозначение ω_τ для слоев по времени t_j, $j = 1, 2, ..., J$. Далее будем рассматривать абстрактные функции дискретного аргумента $t_j = j\tau \in \overline{\omega}_\tau$ со значениями в $\mathfrak{B}_h$: $y = y(t_j) = y_j \in \mathfrak{B}_h$.

Определение 2.1 *Семейство разностных уравнений $(r-1)$ -го порядка:*

$$B_0(t_j) y_{j+1} = \sum_{s=1}^{r-1} C_s(t_j) y_{j+1-s} + F_j, \quad j = r-2, r-1, r, r+1, ..., \tag{2.1}$$

зависящих от параметров h и τ, коэффициенты которых B_0, $C_1, ..., C_{r-1}$ представляют собой линейные операторы, действующие на $\mathfrak{B}_h$ и зависящие от h и τ, будем называть r-слойной операторно-разностной схемой или просто r-слойной схемой.

В r-слойной схеме значение y_{j+1} определяется через $(r-1)$ значение функции на предыдущих слоях: $y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, ..., y_{j-r+2}$. Если существует B_0^{-1}, то y_{j+1} может быть выражено через $y_0, y_1, ..., y_{r-2}$ и F. Всюду далее будем считать, что задача (2.1) разрешима, то есть оператор B_0 обратим.

В случае $r = 2$ схема (2.1) называется *двухслойной*. Она может быть записана в виде:

$$\begin{cases} B_0(t_j) y_{j+1} + B_1(t_j) y_j = \tau \varphi_j, \quad j = 0, 1, ...J-1, \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $B_1 = -C_1$, $\varphi_j = F_j/\tau$, $y^{(0)} \in \mathfrak{B}_h$ — заданная функция.

В случае $r = 3$ схема (2.1) называется *трехслойной*. Она может быть записана в виде:

$$\begin{cases} B_0(t_j)y_{j+1} + B_1(t_j)y_j + B_2(t_j)y_{j-1} = \tau\varphi_j, \ \ j = 1, 2, ...J-1, \\ y_0 = y^{(0)}, \ \ y_1 = y^{(1)}, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $B_p = -C_p$, $p = 1, 2$, $\varphi_j = F_j/\tau$, $y^{(0)}, y^{(1)} \in \mathfrak{B}_h$ — заданные функции.

2.2 Канонические формы двухслойной и трехслойной схем

Двухслойную схему (2.2) можно переписать в виде, более наглядно отражающем структуру исходного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} B(t_j)\dfrac{y_{j+1} - y_j}{\tau} + A(t_j)y_j = \varphi_j, \ \ j = 0, 1, ...J-1, \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $B = B_0$, $A = (B_0 + B_1)/\tau$. Используя обозначение y_t для односторонней разностной производной по времени, схему (2.4) можно записать более кратко:

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi, \ \ j = 0, 1, ..., J-1, \\ y_0 = y^{(0)}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Определение 2.2 *Задачи (2.4) и (2.5) называют канонической формой двухслойных схем.*

Если $B = E$, то соответствующая двухслойная схема:

$$y_{j+1} = y_j - \tau A y_j + \tau\varphi_j$$

называется явной, если же $B \neq E$, то схема называется неявной.

Наряду с (2.4) и (2.5) используется следующая запись двухслойной схемы:

$$By_{j+1} = Cy_j + \tau\varphi_j, \quad C = B - \tau A.$$

Если существует оператор B^{-1}, то схему (2.5) можно переписать в виде:

$$\hat{y} = Sy + \tau\tilde{\varphi}, \qquad S = E - \tau B^{-1}A, \ \ \tilde{\varphi} = B^{-1}\varphi. \tag{2.6}$$

Определение 2.3 *Оператор S называют оператором перехода со слоя на слой.*

Пример 2.1. *Постройте разностную схему с весами для уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{2.7}$$

на отрезке $x \in [0,1]$, аппроксимирующую уравнение со вторым порядком погрешности аппроксимации по координате x на гладком решении. Запишите полученную схему в каноническом виде.

Решение. Аппроксимируем уравнение (2.7) на равномерной сетке

$$\overline{\omega_h} = \{x_n = nh,\ \ n = 0,1,...,N,\ hN = 1\}, \quad \overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau,\ \ j = 0,1,...,J,\ \tau J = T\}.$$

Для этого заменим дифференциальный оператор L разностным оператором Λ:

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \ \rightarrow\ \Lambda u = (au_{\bar{x}})_{x,n} = \frac{1}{h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}-u_n}{h} - a_n\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right),$$

где $u_n = u(x_n,t)$, и введем сеточную функцию $\varphi_n = f(x_n,t) + O(h^2)$. Сеточную функцию $a_n = a(x_n)$, аппроксимирующую функцию $k(x)$, построим таким образом, чтобы разностное уравнение

$$y_t = \sigma\left(a\hat{y}_{\bar{x}}\right)_{x,n} + (1-\sigma)\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,n} + \varphi_n, \quad \sigma \in [0,1], \quad n = 1,2,...,N-1, \tag{2.8}$$

аппроксимировало дифференциальное уравнение (2.7) со вторым порядком погрешности аппроксимации по h на гладком решении. Для этого воспользуемся равенствами, справедливыми для любой достаточно гладкой функции $v(x)$:

$$\frac{v_{n+1}-v_n}{h} = v'(x_n) + \frac{h}{2}v''(x_n) + \frac{h^2}{6}v'''(x_n) + O(h^3), \tag{2.9}$$

$$\frac{v_n - v_{n-1}}{h} = v'(x_n) - \frac{h}{2}v''(x_n) + \frac{h^2}{6}v'''(x_n) + O(h^3). \tag{2.10}$$

Из (2.9)-(2.10) следует, что в случае достаточно гладкого решения $u(x,t)$ имеет место равенство:

$$(au_{\bar{x}})_x = \frac{a_{n+1}-a_n}{h}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_n} + \frac{a_{n+1}+a_n}{2}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_n} + \frac{a_{n+1}-a_n}{6}h\left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=x_n} + O(h^2). \tag{2.11}$$

Предположим, что $k(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда, сравнивая равенство (2.11) с равенством:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = k'(x)\frac{\partial u}{\partial x} + k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

заметим, что если выполняются соотношения:

$$\frac{a_{n+1}+a_n}{2} = k_n + O(h^2), \quad \frac{a_{n+1}-a_n}{h} = k'(x_n) + O(h^2), \tag{2.12}$$

то разностный оператор Λ аппроксимирует дифференциальный оператор L со вторым порядком погрешности по h. Из соотношений (2.12) получаем:

$$a_n = k_n - 0.5hk'(x_n) + O(h^2), \quad a_{n+1} = k_n + 0.5hk'(x_n) + O(h^2). \tag{2.13}$$

Добиться выполнения соотношений (2.13) можно, задавая a_n различными способами. Рассмотрим два наиболее часто используемых варианта.

1) В качестве a_n можно взять $k(x)$ в центральной точке отрезка $[x_{n-1}, x_n]$:

$$a_n = k_{n-\frac{1}{2}} = k(x_n - 0.5h).$$

При этом в случае достаточно гладкой функции $k(x)$ имеет место равенство:

$$a_n = k_n - 0.5hk'(x_n) + \frac{h^2}{8}k''(x_n + \theta h), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Такой способ аппроксимации хорош в линейных задачах, когда функция k не зависит от искомой функции u.

2) В качестве a_n можно взять полусумму значений $k(x)$ в соседних узлах:

$$a_n = 0.5(k_n + k_{n-1}).$$

При этом для достаточно гладкой функции $k(x)$ получаем:

$$a_n = k_n - 0.5hk'(x_n) + \frac{h^2}{4}k''(x_n + \theta h), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Данный способ аппроксимации также широко используется на практике, особенно в квазилинейных задачах, когда коэффициент k зависит от искомой функции u.

С учетом сказанного выше схема с весами для уравнения (2.7) может быть записана следующим образом:

$$y_t = \Lambda\left(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\right) + \varphi, \quad \sigma \in [0, 1], \tag{2.14}$$

где $\Lambda y = (a(x)y_{\bar{x}})_x$, $a(x) = k(x - 0.5h)$. Приведем схему (2.14) к каноническому виду:

$$y_t - \sigma\tau\Lambda y_t - \Lambda y = \varphi \;\Rightarrow\; A = -\Lambda,\; B = E + \sigma\tau A,$$

где E — единичный оператор.

Рассмотрим теперь каноническую форму трехслойной разностной схемы. Она имеет следующий вид:

$$B\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\tau} + R\left(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}\right) + Ay_j = \varphi_j, \tag{2.15}$$

где $B = B_0 - B_2$, $R = \dfrac{1}{2\tau}(B_0 + B_2)$, $A = \dfrac{1}{\tau}(B_0 + B_1 + B_2)$. Уравнение (2.15) можно записать более кратко, используя обозначения для первой центральной производной и второй производной по времени.

Определение 2.4 *Канонической формой трехслойной схемы называют схему вида:*

$$\begin{cases} By_{\mathring{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi(t), \;\; t \in \omega_\tau, \\ y_0 = y^{(0)}, \;\; y_1 = y^{(1)}, \end{cases} \tag{2.16}$$

где $y_{\mathring{t}} = \dfrac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\tau}$, $y_{\bar{t}t} = \dfrac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \dfrac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{\tau^2}$.

3 Устойчивость двухслойных схем по начальным условиям и правой части уравнения

3.1 Понятие устойчивости двухслойных схем

Определение 3.1 *Схема*

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi, \;\; j = 0, 1, ..., J-1, \\ y_0 = y^{(0)} \end{cases} \tag{3.1}$$

называется корректной, если при достаточно малых $\tau \leqslant \tau_0$ *и* $|h| \leqslant h_0$*:*
1) решение задачи (3.1) существует и единственно при любых начальных данных $y^{(0)} \in \mathfrak{B}_h$ *и правых частях* $\varphi(t_j) \in \mathfrak{B}_h$ *для всех* $t_j \in \overline{\omega}_\tau$*;*
2) существуют такие постоянные $M_1 > 0$ *и* $M_2 > 0$*, не зависящие от параметров* τ *и* h *и выбора* $y^{(0)}$ *и* φ*, что при любых начальных данных* $y^{(0)} \in \mathfrak{B}_h$ *и правых частях* $\varphi(t_j) \in \mathfrak{B}_h$ *для всех* $t_j \in \overline{\omega}_\tau$ *для решения задачи (3.1) справедлива оценка:*

$$\|y(t_j)\|_{(h1)} \leqslant M_1 \|y^{(0)}\|_{(h1)} + M_2 \max_{0 \leqslant t' \leqslant t_j} \|\varphi(t')\|_{(h2)}. \tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) выражает свойство равномерной по параметрам h *и* τ *непрерывной зависимости решения задачи Коши (3.1) от входных данных. Это свойство называется устойчивостью схемы (3.1) по начальным данным и правой части уравнения.*

Определение 3.2 *Разностная схема называется абсолютно устойчивой, если она устойчива при любых* τ *и* h*, а не только при достаточно малых.*

Если неравенство (3.2) выполняется при $M_2 = 0$, то говорят, что разностная схема устойчива по начальным данным, если (3.2) выполняется при $M_1 = 0$, то говорят, что разностная схема устойчива по правой части.

3.2 Достаточные условия устойчивости двухслойных схем в линейных нормированных пространствах

Как было сказано выше, если существует обратный оператор B^{-1}, то задачу (3.1) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} y_{j+1} = S_j y_j + \tau\tilde{\varphi}_j, \quad \tilde{\varphi}_j = B_j^{-1}\varphi_j, \;\; j = 0, 1, 2, ..., J-1, \\ y_0 = y^{(0)} \in \mathfrak{B}_h, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $S_j = E - \tau B_j^{-1} A_j$ — оператор перехода со слоя на слой, в общем случае зависящий от $t_j = j\tau$, h и τ. Пусть B^{-1} существует. Из уравнения (3.3) получаем:

$$y_{j+1} = S_j\left(S_{j-1}y_{j-1} + \tau\tilde{\varphi}_{j-1}\right) + \tau\tilde{\varphi}_j = S_j S_{j-1} y_{j-1} + \tau\left(S_j\tilde{\varphi}_{j-1} + \tilde{\varphi}_j\right) = ... =$$

$$= S_j S_{j-1} ... S_0 y_0 + \tau\left(\tilde{\varphi}_j + S_j\tilde{\varphi}_{j-1} + S_j S_{j-1}\tilde{\varphi}_{j-2} + ... + S_j S_{j-1} ... S_1\tilde{\varphi}_0\right).$$

Введем обозначения: $T_{j+1,j+1} = E$, $T_{j+1,p} = S_j S_{j-1} ... S_{p+1} S_p$, $p = 0, 1, ..., j$. Тогда уравнение (3.3) можно записать в виде:

$$y_{j+1} = T_{j+1,0}y_0 + \sum_{p=0}^{j} T_{j+1,p+1}\tilde{\varphi}_p\tau. \tag{3.4}$$

Определение 3.3 *Оператор $T_{j+1,p}$ называется оператором перехода со слоя p на слой $j+1$, а оператор $T_{j+1,0}$ называется разрешающим оператором.*

Теорема 3.4 *Для устойчивости схемы (3.3) достаточно, чтобы выполнялось условие $\|T_{j,p}\| \leqslant M_1$ при всех $0 \leqslant p \leqslant j \leqslant J$. При этом для решения задачи (3.3) верна априорная оценка:*

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1\left\{\|y_0\|_{(h1)} + \sum_{p=0}^{j}\|\varphi_p\|_{(h2)}\tau\right\}, \quad \|\varphi_p\|_{(h2)} = \|B_p^{-1}\varphi_p\|_{(h1)} \tag{3.5}$$

для всех $j = 0, 1, ..., J-1$.

Доказательство. Применим неравенство треугольника к уравнению (3.4):

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant \|T_{j+1,0}y_0\|_{(h1)} + \tau\left\|\sum_{p=0}^{j} T_{j+1,p+1}\tilde{\varphi}_p\right\| \leqslant \|T_{j+1,0}\| \cdot \|y_0\|_{(h1)} + \tau\sum_{p=0}^{j}\|T_{j+1,p+1}\| \cdot \|\tilde{\varphi}_p\|_{(h1)}.$$

Так как по условию $\|T_{j,p}\| \leqslant M_1$ при всех $0 \leqslant p \leqslant j \leqslant J$, то

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1\left\{\|y_0\|_{(h1)} + \sum_{p=0}^{j}\underbrace{\|B_p^{-1}\varphi_p\|_{(h1)}}_{\|\varphi_p\|_{(h2)}}\tau\right\}.$$

Так как
$$\sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|_{(h2)}\tau \leqslant (j+1)\tau \max_{p=0,1,...,j} \|\varphi_p\|_{(h2)} \leqslant T \max_{p=0,1,...,j} \|\varphi_p\|_{(h2)},$$
то из неравенства (3.5) следует устойчивость схемы по начальным данным и правой части в смысле определения 3.1.

Теорема 3.5 *Для устойчивости схемы (3.3) достаточно, чтобы для нормы ее оператора перехода со слоя на слой S_j выполнялась оценка:*
$$\|S_j\| \leqslant 1 + c_0\tau, \quad j = 0, 1, 2, ..., J-1, \tag{3.6}$$
где $c_0 \geqslant 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h. При этом для решения верна априорная оценка (3.5), где $M_1 = e^{c_0 T}$.

Доказательство. Оценим норму оператора $T_{j,p}$:
$$\|T_{j,p}\| = \|S_{j-1}S_{j-2}...S_{p+1}S_p\| \leqslant \|S_{j-1}\| \cdot \|S_{j-2}\| \cdot ... \cdot \|S_{p+1}\| \cdot \|S_p\| \leqslant (1+c_0\tau)^{j-p} \leqslant$$
$$\leqslant (1+c_0\tau)^{j} \leqslant (1+c_0\tau)^{J} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c_0\tau)^k}{k!}\right)^J = (e^{c_0\tau})^J = e^{c_0\tau J} = e^{c_0 T} = M_1.$$

Определение 3.6 *Схема (3.1) называется равномерно устойчивой по начальным данным, если*
$$\|y_j\|_{(h1)} \leqslant M_1 \|y_p\|_{(h1)}, \quad 0 \leqslant p < j \leqslant J, \tag{3.7}$$
где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от τ и h.

Теорема 3.7 *Если схема (3.3) равномерно устойчива по начальным данным, то она устойчива и по правой части.*

Доказательство. Если выполнено условие равномерной устойчивости схемы по начальным данным, то $\|T_{j,p}\| \leqslant M_1$. Тогда, в силу теоремы (3.4), схема устойчива и по правой части.

Рассмотрим двухслойную схему с постоянными операторами A и B. Если оператор B имеет ограниченный обратный, то она эквивалентна задаче
$$\begin{cases} y_{j+1} = Sy_j + \tau\tilde{\varphi}_j, \quad \tilde{\varphi}_j = B^{-1}\varphi_j, \quad j = 0, 1, ..., J-1, \\ y_0 = y^{(0)}, \end{cases} \tag{3.8}$$
где $S = E - \tau B^{-1} A$ — постоянный оператор.

Теорема 3.8 *Устойчивость по начальным данным схемы (3.8) с постоянными операторами необходима и достаточна для устойчивости по правой части уравнения. При этом верна априорная оценка:*

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \left\{ \|y_0\|_{(h1)} + \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|_{(h2)}\tau \right\} \tag{3.9}$$

для всех $j = 0, 1, ..., J-1$, *где* $\|\varphi_p\|_{(h2)} = \|B^{-1}\varphi_p\|_{(h1)}$, $M_1 > 0$ *— некоторое число.*

Доказательство.

1) *Достаточность.* Если схема с постоянным оператором S устойчива по начальным данным, то она и равномерно устойчива по начальным данным, так как

$$T_{j,p} = T_{j-p,0} = S^{j-p}. \tag{3.10}$$

Устойчивость по начальным данным означает ограниченность разрешающего оператора: $\|T_{j,0}\| \leqslant M_1$, где число M_1 не зависит на от j, ни от начальных данных. В силу равенства (3.10) получаем:

$$\|T_{j,p}\| = \|T_{j-p,0}\| \leqslant M_1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant p \leqslant j \leqslant J,$$

что в свою очередь означает ограниченность всех возможных операторов перехода $T_{j,p}$. Следовательно, пользуясь теоремой 3.4, получаем утверждение доказываемой теоремы.

2) *Необходимость.* Рассмотрим схему (3.8) при однородных начальных условиях. Решение при этом имеет вид

$$y_{j+1} = \tau \sum_{p=0}^{j} T_{j+1,p+1}\tilde{\varphi}_p.$$

Пусть схема (3.8) устойчива по правой части, то есть существует такое число $M_1 > 0$, что справедливо неравенство:

$$\|y_{j+1}\|_{(h1)} \leqslant M_1 \sum_{p=0}^{j} \|\tilde{\varphi}_p\|_{(h1)}\tau, \quad j = 0, 1, 2, ..., J-1.$$

Эта оценка справедлива для любой правой части $\tilde{\varphi}_j = B^{-1}\varphi_j$. Покажем, что разрешающий оператор $T_{j,0} = T_{j+1,1}$ ограничен. Для этого выберем правую часть вида $\tau\tilde{\varphi}_j = \delta_{j,0}f$, где $f \in \mathfrak{B}_h$ — произвольная функция. Тогда

$$y_{j+1} = T_{j+1,1}f = T_{j,0}f,$$

и следовательно,

$$\|T_{j,0}f\|_{(h1)} \leqslant M_1\|f\|_{(h1)}.$$

Рассмотрим все возможные f, принадлежащие единичной сфере в $\mathfrak{B}_h$: $\|f\|_{(h1)} = 1$. Тогда:

$$\|T_{j,0}\| = \sup_{\|f\|_{(h1)}=1} \|T_{j,0}f\|_{(h1)} \leqslant M_1,$$

что и требовалось доказать.

3.3 Классы устойчивости двухслойных схем

3.3.1 Исходное семейство схем

Будем рассматривать двухслойную схему

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi(t), \;\; t = j\tau, \;\; j = 0, 1, ..., J-1, \\ y(0) = y^{(0)}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Операторы A и B в общем случае зависят от параметров h и τ, а также от t.

Пусть H_h — конечномерное вещественное линейное пространство, в котором введено скалярное произведение (y, v), а норма определена следующим образом:

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad y \in H_h.$$

Будем пользоваться следующим определением устойчивости разностной схемы (3.11):

$$\|y(t+\tau)\|_{(h1)} \leqslant M_1 \|y^{(0)}\|_{(h1)} + M_2 \max_{0 \leqslant t' \leqslant t} \|\varphi(t')\|_{(h2)}. \tag{3.12}$$

В данном разделе будут сформулированы условия на операторы A и B, при которых схема (3.11) устойчива в различных пространствах H_h.

Определение 3.9 *Нормой оператора A называется число, определяемое следующим образом:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{(h1)}=1} \|Ax\|_{(h2)} \;\; \text{или} \;\; \|A\| = \sup_{x \in H_h} \frac{\|Ax\|_{(h2)}}{\|x\|_{(h1)}}.$$

Всюду далее будем считать, что A — положительно определенный оператор, то есть $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого $x \in H_h$, причем $(Ax, x) = 0$, только если $x = 0$.

Определение 3.10 *Число (Ax, x) называется энергией оператора A.*

Говорят, что $A \geqslant B$ (по энергии), если выполняется неравенство $((A-B)x, x) \geqslant 0$ для всех $x \in H_h$.

Если оператор A является самосопряженным, то есть $A = A^*$, то в H_h можно ввести так называемую *энергетическую* норму.

Определение 3.11 *Энергетической называется норма, порождаемая энергией оператора:*

$$\|y\|_A = \sqrt{(Ay, y)}. \tag{3.13}$$

Линейное пространство с нормой (3.13) будем обозначать H_A. Будем говорить, что схема (3.11) устойчива в энергетическом пространстве H_A, если выполнено неравенство (3.12), в котором $\|\cdot\|_{(h1)} = \|\cdot\|_A$.

Исследование устойчивости будем проводить в некотором *исходном семействе* разностных схем. Операторы A и B будем считать ограниченными линейными операторами, заданными на всем пространстве $H_h : \mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B) = H_h$. Кроме того, предположим, что задача (3.11) разрешима при любых входных данных $y^{(0)}$ и $\varphi(t)$, то есть что существует ограниченный оператор B^{-1} с областью определения $\mathfrak{D}(B^{-1}) = H_h$.

Далее для упрощения выкладок предположим, что:

1) операторы A и B не зависят от t;

2) оператор B положительно определенный;

3) оператор A самосопряженный и положительно определенный.

В качестве примера рассмотрим схему с весами для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y_t = \Lambda\left(\sigma\hat{y} + (1-\sigma)y\right) + \varphi, \ \ x \in \omega_h, \ t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega_h}, \\ y(0, t) = 0, \quad y(1, t) = 0, \ \ t \in \overline{\omega_\tau}, \end{cases}$$

где

$$\overline{\omega_h} = \left\{x_n = nh, \ \ n = 0, 1, ..., N, \ hN = 1\right\}, \quad \overline{\omega_\tau} = \left\{t_j = j\tau, \ \ j = 0, 1, ..., J, \ \tau J = T\right\},$$

$$\Lambda y = \left(a(x) y_{\bar{x}}\right)_x, \quad a(x) > 0.$$

Пусть H_h — линейное пространство, состоящее из всех ограниченных сеточных функций на $\overline{\omega_h}$, обращающихся в ноль при $x = 0$ и $x = 1$. Положим $A = -\Lambda$. Покажем, что оператор A самосопряженный и положительно определенный. Воспользуемся первой формулой Грина для произвольных $y, v \in H_h$:

$$(Ay, v) = -\left(\left(a(x)y_{\bar{x}}\right)_x, v\right) = (ay_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] = \sum_{n=1}^{N} a_n y_{\bar{x},n} v_{\bar{x},n} h = (av_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = -\left(y, \left(a(x)v_{\bar{x}}\right)_x\right) = (y, Av),$$

то есть оператор A самосопряженный. Из первой формулы Грина также следует, что для любой сеточной функции $y \in H_h$ справедливо неравенство:

$$(Ay, y) = (ay_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] = \sum_{n=1}^{N} a_n y_{\bar{x},n}^2 h \geqslant 0,$$

так как по условию $a(x) > 0$, причем $(Ay, y) = 0$ только если $y \equiv 0$. Следовательно, оператор A положительно определенный. Перепишем уравнение в рассматриваемой разностной схеме в виде:

$$(E - \sigma\tau\Lambda)y_t = \Lambda y + \varphi \quad \Leftrightarrow \quad By_t + Ay = \varphi,$$

где $B = E - \sigma\tau\Lambda = E + \sigma\tau A$. В данном случае оператор B также является положительно определенным и самосопряженным, так что схема принадлежит рассматриваемому классу.

3.3.2 Энергетические тождества

Первое энергетическое тождество

Умножим уравнение (3.11) скалярно на $2\tau y_t = 2(\hat{y} - y)$:

$$2\tau(By_t, y_t) + 2\tau(Ay, y_t) = 2\tau(\varphi, y_t).$$

Пользуясь равенством:

$$y = \frac{\hat{y} + y}{2} - \frac{\hat{y} - y}{2} = 0.5(\hat{y} + y) - 0.5\tau y_t,$$

получим:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + (A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau(\varphi, y_t).$$

Так как по предположению оператор A самосопряженный, то

$$(A(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = (A\hat{y}, \hat{y}) + (Ay, \hat{y}) - (A\hat{y}, y) - (Ay, y) = (A\hat{y}, \hat{y}) - (Ay, y),$$

так как $(Ay, \hat{y}) = (y, A\hat{y}) = (A\hat{y}, y)$. В результате приходим к первому энергетическому тождеству:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y) + 2\tau(\varphi, y_t). \tag{3.14}$$

Второе энергетическое тождество

Предположим, что оператор B также является самосопряженным, то есть $B = B^*$. Умножим (3.11) скалярно на $2\tau\hat{y}$:

$$2\tau(By_t, \hat{y}) + 2\tau(Ay, \hat{y}) = 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{3.15}$$

Используя формулы:

$$y = 0.5(\hat{y} + y) - 0.5\tau y_t, \quad \hat{y} = 0.5(\hat{y} + y) + 0.5\tau y_t,$$

получаем:

$$2\tau(By_t, \hat{y}) = (B(\hat{y} - y), \hat{y} + y) + \tau^2(By_t, y_t) = (B\hat{y}, \hat{y}) - (By, y) + \tau^2(By_t, y_t) =$$

$$= \|\hat{y}\|_B^2 - \|y\|_B^2 + \tau^2\|y_t\|_B^2;$$

$$2\tau(Ay, \hat{y}) = 0.5\tau(A(\hat{y} + y - \tau y_t), \hat{y} + y + \tau y_t) = 0.5\tau(A(\hat{y} + y), \hat{y} + y) - 0.5\tau^3(Ay_t, y_t) =$$

$$= 0.5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 - 0.5\tau^3\|y_t\|_A^2.$$

Подставляя полученные выражения в (3.15), приходим ко второму энергетическому тождеству:

$$\|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2\left(\|y_t\|_B^2 - 0.5\tau\|y_t\|_A^2\right) + 0.5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 = \|y\|_B^2 + 2\tau(\varphi, \hat{y}). \tag{3.16}$$

3.3.3 Устойчивость по начальным данным в H_A

Теорема 3.12 *Условие*

$$B \geqslant 0.5\tau A \tag{3.17}$$

является необходимым и достаточным для устойчивости схемы (3.11) из исходного семейства в пространстве H_A по начальным данным с постоянной $M_1 = 1$, то есть для выполнения оценки

$$\|y_j\|_A \leqslant \|y^{(0)}\|_A, \quad j = 1, 2, ..., J, \tag{3.18}$$

где y_j — решение задачи (3.11).

Доказательство.

1) *Достаточность.* Пусть выполнено условие (3.17). Тогда из первого энергетического тождества (3.14) при $\varphi = 0$:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) + (A\hat{y}, \hat{y}) = (Ay, y)$$

следует, что $(A\hat{y}, \hat{y}) \leqslant (Ay, y)$, или же $\|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2$, откуда получаем:

$$\|y_{j+1}\|_A \leqslant \|y_j\|_A \leqslant \ldots \leqslant \|y_0\|_A.$$

2) *Необходимость.* Пусть схема (3.11) устойчива по начальным данным и выполнено условие (3.18). Рассмотрим первое энергетическое тождество (3.14) при $\varphi = 0$ и $j = 0$:

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t(0), y_t(0)) + (Ay_1, y_1) = (Ay_0, y_0)$$

или же

$$2\tau((B - 0.5\tau A)y_t(0), y_t(0)) = (Ay_0, y_0) - (Ay_1, y_1) = \|y_0\|_A^2 - \|y_1\|_A^2.$$

Так как по условию $\|y_1\|_A \leqslant \|y_0\|_A$, то

$$((B - 0.5\tau A)y_t(0), y_t(0)) \geqslant 0. \tag{3.19}$$

Нам необходимо доказать, что неравенство $((B - 0.5\tau A)v, v) \geqslant 0$ справедливо для любого элемента $v \in H_h$. Так как по условию теоремы схема (3.11) принадлежит исходному семейству, то $A > 0$ и $B > 0$, а значит существуют ограниченные операторы A^{-1} и B^{-1}. Выберем произвольный элемент $v \in H_h$. Ему соответствует единственный элемент $y_0 = -A^{-1}Bv \in H_h$, такой что $Bv + Ay_0 = 0$, причем $v = -B^{-1}Ay_0 = y_t(0)$. Следовательно, из (3.19) получаем, что интересующее нас неравенство $((B - 0.5\tau A)v, v) \geqslant 0$ выполнено для любого элемента $v = y_t(0) \in H_h$, то есть имеет место неравенство (3.17).

Замечание 3.13 *Условие (3.17) называется критерием устойчивости Самарского.*

Замечание 3.14 *Условие (3.17) остается достаточным для устойчивости схемы (3.11) по начальным данным и в случае, когда $B = B(t) > 0$ является переменным несамосопряженным положительно определенным оператором.*

В качестве примера исследуем на устойчивость по начальным данным рассмотренную выше схему с весами для уравнения теплопроводности. Как было показано, для нее

$$A = -\left(a(x)y_{\bar{x}}\right)_x, \quad \text{где} \quad a(x) > 0,$$

$$B = E + \sigma\tau A,$$

причем операторы A и B являются самосопряженными, положительно определенными и не зависят от t.

Необходимое и достаточное условие устойчивости по начальным данным для рассматриваемой схемы имеет вид:

$$B - 0.5\tau A = E + (\sigma - 0.5)\tau A \geqslant 0.$$

Так как $A \leqslant \|A\|E$, то $E \geqslant \|A\|^{-1}A$, откуда получаем:

$$B - 0.5\tau A \geqslant \left(\|A\|^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau\right) A,$$

то есть условие (3.17) будет выполнено, если $\sigma \geqslant 0.5 - \dfrac{1}{\tau\|A\|}$.

Оценим норму оператора A. Так как он самосопряженный и положительно определенный, то

$$\|A\| = \sup_{\|y\|_{(h1)}=1} (Ay, y).$$

Поскольку $y_0 = y_N = 0$, то, применяя первую формулу Грина, получаем:

$$(Ay, y) = \sum_{n=1}^{N} a_n y_{\bar{x},n}^2 h \leqslant \max_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \cdot \sum_{n=1}^{N} y_{\bar{x},n}^2 h = -\max_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \cdot \left(y_{\bar{x}x}, y\right).$$

Разложим функцию y по системе $\left\{\mu^{(k)}(x_n)\right\}$ ортонормированных собственных функций разностной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке $[0, 1]$ с условиями Дирихле:

$$y_n = \sum_{k=1}^{N-1} C_k \mu_n^{(k)}.$$

Тогда

$$y_{\bar{x}x} = -\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k C_k \mu_n^{(k)},$$

и

$$(Ay, y) \leqslant \max_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k C_k^2 < \frac{4}{h^2} \max_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} C_k^2}_{=\|y\|_{(h1)}^2},$$

так как $\max\limits_{k} \lambda_k = \lambda_{N-1} < \dfrac{4}{h^2}$.

Итак, $\|A\| < \dfrac{4}{h^2} \max\limits_{x\in\overline{\omega}_h} a(x)$, и условие устойчивости схемы по начальным данным принимает вид:

$$\|A\|^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau > \frac{h^2}{4\max\limits_{x\in\overline{\omega}_h} a(x)} + (\sigma - 0.5)\tau \geqslant 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \sigma \geqslant 0.5 - \frac{h^2}{4\tau\max\limits_{x\in\overline{\omega}_h} a(x)}.$$

3.3.4 Случай несамосопряженного оператора A

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Lu = 0, \;\; t > 0, \\ u(0) = u^{(0)}, \end{cases} \tag{3.20}$$

где $u(t)$ — функция со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, L — оператор, действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$ и содержащий производные по пространственным переменным.

Пусть A — разностная аппроксимация оператора L в сеточном пространстве H_h, причем A является положительно определенным, но не самосопряженным оператором. Составим для задачи (3.20) операторно-разностную схему с весами:

$$\begin{cases} y_t + \sigma A\hat{y} + (1-\sigma)Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ y_0 = u^{(0)}, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} (E + \sigma\tau A)y_t + Ay = 0, \quad t \in \omega_\tau, \\ y_0 = u^{(0)}. \end{cases} \tag{3.21}$$

Схема (3.21) не принадлежит к исходному семейству схем, но поскольку $A > 0$, существует обратный оператор $A^{-1} > 0$. Применяя A^{-1} к уравнению (3.21), получим

$$\tilde{B}y_t + \tilde{A}y = 0,$$

где $\tilde{B} = A^{-1} + \sigma\tau E$, $\tilde{A} = E$. Теперь оператор $\tilde{A}$ является самосопряженным и положительно определенным, а оператор $\tilde{B}$ — положительно определенным при $\sigma \geqslant 0$. Условие устойчивости (3.17) в пространстве $H_{\tilde{A}} = H_E = H_h$ имеет вид:

$$\tilde{B} - 0.5\tau\tilde{A} = A^{-1} + (\sigma - 0.5)\tau E \geqslant 0.$$

Оно будет заведомо выполнено при $\sigma \geqslant 0.5$. Итак, условие $\sigma \geqslant 0.5$ является достаточным для выполнения оценки

$$\|y_j\| \leqslant \|u^{(0)}\|$$

для решения уравнения (3.21) с начальным условием $y_0 = u^{(0)}$ в случае $A > 0$, $A \neq A^*$.

3.3.5 Устойчивость по начальным данным в H_B

Теорема 3.15 *Пусть в схеме (3.11) операторы A и B не зависят от t, причем $A = A^* > 0$, $B = B^* > 0$. Тогда условие (3.17) достаточно для устойчивости схемы (3.11) по начальным данным в пространстве H_B, причем*

$$\|y_j\|_B \leqslant \|y^{(0)}\|_B.$$

Доказательство. Если $A = A^* > 0$ и $B = B^* > 0$, то можно ввести энергетические нормы $\|\cdot\|_A$ и $\|\cdot\|_B$. Пусть $B \geqslant 0.5\tau A$. Тогда

$$((B - 0.5\tau A)y_t, y_t) = \|y_t\|_B^2 - 0.5\tau\|y_t\|_A^2 \geqslant 0.$$

Воспользуемся вторым энергетическим тождеством (3.16) в случае $\varphi \equiv 0$:

$$\|\hat{y}\|_B^2 + \tau^2 \underbrace{\left(\|y_t\|_B^2 - 0.5\tau\|y_t\|_A^2\right)}_{\geqslant 0} + 0.5\tau\|\hat{y} + y\|_A^2 = \|y\|_B^2 \quad \Rightarrow \quad \|\hat{y}\|_B^2 \leqslant \|y\|_B^2,$$

то есть $\|y(t)\|_B \leqslant \|y(0)\|_B$.

Замечание 3.16 *Если A и B — перестановочные операторы, то условие (3.17) необходимо и достаточно для устойчивости схемы (3.11) по начальным данным в пространстве H_D:*

$$\|y_j\|_D \leqslant \|y^{(0)}\|_D,$$

где $D = D^* > 0$ — любой оператор, перестановочный с A и B, например, $D = E$, $D = A^2$ или $D = B^2$ при $B = B^*$, так что $\|y_j\| \leqslant \|y^{(0)}\|$, $\|Ay_j\| \leqslant \|Ay^{(0)}\|$, $\|By_j\| \leqslant \|By^{(0)}\|$ и т.д.

Замечание 3.17 *Теорема 3.15 остается справедливой и в случае переменного самосопряженного положительно определенного оператора $A = A(t)$.*

3.3.6 Устойчивость по правой части

Теорема 3.18 *Если выполнено условие $B \geqslant 0.5\tau A$, то схема с постоянными операторами*

$$\begin{cases} By_t + Ay = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \\ y(0) = y^{(0)}, \end{cases} \tag{3.22}$$

принадлежащая исходному семейству схем, устойчива по правой части, причем справедлива априорная оценка:

$$\|y_{j+1}\|_A \leqslant \|y_0\|_A + \sum_{p=0}^{j} \|B^{-1}\varphi_p\|_A \tau. \tag{3.23}$$

Если, кроме того, оператор B самосопряжен, то также справедлива оценка:

$$\|y_{j+1}\|_B \leqslant \|y_0\|_B + \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|_{B^{-1}} \tau. \tag{3.24}$$

Доказательство. Так как из условия $B \geqslant 0.5\tau A$ для схемы (3.22) с постоянными операторами, принадлежащей исходному семейству схем, следует ее устойчивость по начальным данным, причем в случае однородного уравнения имеет место неравенство

$$\|y_{j+1}\|_A \leqslant \|y_0\|_A, \tag{3.25}$$

то, выбирая в качестве нормы $\|\cdot\|_{(h1)}$ энергетическую норму $\|\cdot\|_A$ и пользуясь теоремой 3.8, получаем оценку:

$$\|y_{j+1}\|_A \leqslant M_1 \left\{ \|y_0\|_A + \sum_{p=0}^{j} \|B^{-1}\varphi_p\|_A \tau \right\}.$$

В данном случае $M_1 = 1$ в силу (3.25), то есть мы приходим к неравенству (3.23).

Если оператор B является самосопряженным, то в силу теоремы 3.15 в случае однородного уравнения имеет место неравенство

$$\|y_{j+1}\|_B \leqslant \|y^{(0)}\|_B.$$

Это означает, что в оценке, получаемой в тереме 3.8, в качестве нормы $\|\cdot\|_{(h1)}$ можно взять энергетическую норму $\|\cdot\|_B$. При этом получим

$$\|y_{j+1}\|_B \leqslant \|y_0\|_B + \sum_{p=0}^{j} \|B^{-1}\varphi_p\|_B \tau.$$

Если B — самосопряженный положительно определенный оператор и B^{-1} существует, то можно ввести норму:

$$\|\varphi\|_{B^{-1}} = \sqrt{(B^{-1}\varphi, \varphi)} = \sup_{x \neq 0} \frac{|(\varphi, x)|}{\|x\|_B}.$$

Очевидно, что

$$\|B^{-1}\varphi\|_B^2 = (B^{-1}\varphi, B^{-1}\varphi)_B = (BB^{-1}\varphi, B^{-1}\varphi) = (\varphi, B^{-1}\varphi) = \|\varphi\|_{B^{-1}}^2,$$

поэтом окончательно получаем

$$\|y_{j+1}\|_B \leqslant \|y_0\|_B + \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|_{B^{-1}} \tau.$$

Исследуем, при каких условиях на операторы задачи (3.22) имеет место устойчивость по правой части в исходной норме $\|\varphi\|_{(h2)} = \|\varphi\|$. Ответ дает следующая теорема:

Теорема 3.19 *Пусть выполнено условие:*

$$B \geqslant \varepsilon E + 0.5\tau A, \tag{3.26}$$

где ε — некоторое положительное число, а схема (3.22) принадлежит исходному семейству схем. Тогда для решения задачи (3.22) верна априорная оценка:

$$\|y_{j+1}\|_A^2 \leqslant \|y_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{p=0}^{j} \|\varphi_p\|^2 \tau. \tag{3.27}$$

Доказательство. Рассмотрим первое энергетическое тождество:

$$2\tau((B-0.5\tau A)y_t, y_t) + \|\hat{y}\|_A^2 = \|y\|_A^2 + 2\tau(\varphi, y_t).$$

По условию $B - 0.5\tau A \geqslant \varepsilon E$, откуда получаем:

$$2\tau((B-0.5\tau A)y_t, y_t) \geqslant 2\tau\varepsilon(y_t, y_t) = 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2.$$

Следовательно,

$$2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2 + 2\tau(\varphi, y_t) \leqslant \|y\|_A^2 + 2\tau|(\varphi, y_t)|.$$

Оценим последнее слагаемое в правой части этого неравенства, пользуясь неравенством Коши-Буняковского:

$$|(\varphi, y_t)| \leqslant \|\varphi\|\|y_t\|.$$

Так как

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \ \ \forall a, b,$$

то имеет место неравенство:

$$a \cdot b = \sqrt{2\varepsilon}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}b \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Пользуясь этим неравенством, получаем:

$$2\tau|(\varphi, y_t)| \leqslant 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2.$$

Таким образом, справедливо неравенство:

$$2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2 + 2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2 \ \ \Rightarrow \ \ \|\hat{y}\|_A^2 \leqslant \|y\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2.$$

Следовательно,

$$\|y_{j+1}\|_A^2 \leqslant \|y_j\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_j\|^2 \leqslant \|y_{j-1}\|_A^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_{j-1}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi_j\|^2 \leqslant ... \leqslant$$

$$\leqslant \|y_0\|_A^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{p=0}^{j}\|\varphi_p\|^2\tau.$$

Замечание 3.20 *Теорема 3.19 сохраняет силу и в случае переменного оператора* $B = B(t)$.

3.4 Устойчивость трехслойных схем

Рассмотрим задачу Коши для трехслойной схемы

$$\begin{cases} By_{\mathring{t}} + \tau^2 R y_{\bar{t}t} + Ay = \varphi(t), \quad t \in \omega_\tau, \\ y(0) = y^{(0)}, \quad y(\tau) = y^{(1)} \end{cases} \tag{3.28}$$

в сеточном пространстве H_h, где $y(t)$ и $\varphi(t)$ — функции переменной $t \in \overline{\omega}_\tau$ со значениями в H_h, $y^{(0)}$ и $y^{(1)}$ — элементы пространства H_h, A, B и R — линейные операторы, действующие из H_h в H_h.

Уравнение (3.28) можно переписать в виде

$$(B + 2\tau R)y_{j+1} = 2\tau(2R - A)y_j + (B - 2\tau R)y_{j-1} + 2\tau\varphi_j.$$

Следовательно, задача (3.28) разрешима, если существует оператор $(B + 2\tau R)^{-1}$. Всюду далее будем предполагать, что это условие выполнено.

Трехслойную схему (3.28) можно свести к двухслойной. Для этого воспользуемся равенствами

$$y = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\check{y}}{2} - \frac{\check{y}}{2} + \frac{\hat{y}}{4} - \frac{\hat{y}}{4} = \frac{y + \check{y}}{2} - \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{4} + \frac{\hat{y} - \check{y}}{4} = \frac{y + \check{y}}{2} - \frac{\tau^2}{4} y_{\bar{t}t} + \frac{\tau}{2} y_{\mathring{t}},$$

позволяющими записать уравнение (3.28) как

$$(B + 0.5\tau A)y_{\mathring{t}} + \tau^2 \left(R - 0.25A\right) y_{\bar{t}t} + 0.5A(y + \check{y}) = \varphi.$$

Заметим, что

$$y_{\mathring{t}} = 0.5(y + \check{y})_t, \qquad y_{\bar{t}t} = \tau^{-1}(y - \check{y})_t,$$

откуда получаем, что уравнение (3.28) эквивалентно уравнению

$$(B + 0.5\tau A)Y_t^{(1)} + \tau \left(R - 0.25A\right) Y_t^{(2)} + AY^{(1)} = \varphi,$$

где $Y^{(1)} = 0.5(y + \check{y})$, $Y^{(2)} = (y - \check{y})$.

Введем обозначения:

$$Y = \begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} (B + 0.5\tau A) & \tau\left(R - 0.25A\right) \\ \mathcal{B}_{21} & \mathcal{B}_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (3.28) будем эквивалентно матричному уравнению

$$\mathcal{B}Y_t + \mathcal{A}Y = F,$$

если выполняется равенство

$$\mathcal{B}_{21} y_{\mathring{t}} + \tau \mathcal{B}_{22} y_{\bar{t}t} + \mathcal{A}_{22}(y - \check{y}) = 0.$$

Последнее равенство будет выполнено, если $\mathcal{A}_{22} = C$, $\mathcal{B}_{21} = -\tau C$, $\mathcal{B}_{22} = 0.5\tau C$, где C — некоторый оператор, действующий из H_h в H_h.

Итак, трехслойная схема (3.28) эквивалентная следующей двухслойной схеме

$$\begin{cases} \mathcal{B} Y_t + \mathcal{A} Y = F(t), \ \ t \in \omega_\tau, \\ Y_1 = \left\{ 0.5(y^{(1)} + y^{(0)}) \quad (y^{(1)} - y^{(0)}) \right\}^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Сформулируем условия на операторы A, B, C и R, при которых схема (3.29) принадлежит исходному семейству двухслойных схем, то есть выполняются условия $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, $\mathcal{A} > 0$, $\mathcal{B} > 0$.

Если операторы A и C являются самосопряженными положительно определенными операторами, то оператор $\mathcal{A}$ также будет самосопряженным и положительно определенным в пространстве $H_h^2 = H_h \oplus H_h$. Поэтому далее будем считать, что эти условия для A и C выполнены.

Рассмотрим выражение $(\mathcal{B}Y, Y)$ для произвольного $Y \in H_h^2$:

$$(\mathcal{B}Y, Y) = \left((B + 0.5\tau A)Y^{(1)}, Y^{(1)}\right) + \tau \left((R - 0.25A)Y^{(2)}, Y^{(1)}\right) - \tau(CY^{(1)}, Y^{(2)}) + 0.5\tau(CY^{(2)}, Y^{(2)}).$$

Не ограничивая общности, положим $C = R - 0.25A$. Если оператор R является самосопряженным, то при таком выборе C получаем

$$(\mathcal{B}Y, Y) = \left((B + 0.5\tau A)Y^{(1)}, Y^{(1)}\right) + 0.5\tau((R - 0.25A)Y^{(2)}, Y^{(2)}).$$

Оператор $\mathcal{B}$ будет положительно определенным, если оператор B является положительно определенным и выполняется неравенство $R \geqslant 0.25A$. При этом для любого $Y \in H_h^2$

$$((\mathcal{B} - 0.5\tau\mathcal{A})Y, Y) = (BY^{(1)}, Y^{(1)}) \geqslant 0,$$

то есть выполняется условие Самарского устойчивости схемы (3.29) по начальным данным. Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 3.21 *Пусть $A = A^* > 0$ и $R = R^* > 0$. Тогда условия $B \geqslant 0$, $R \geqslant 0.25A$ для всех $t \in \omega_\tau$ являются достаточными для устойчивости схемы (3.28) по начальным данным, причем имеет место оценка*

$$\|Y_{j+1}\|_{\mathcal{A}} \leqslant \|Y_1\|_{\mathcal{A}},$$

или же в явном виде

$$\frac{1}{4}\|y_{j+1}+y_j\|_A^2+\|y_{j+1}-y_j\|_{R-0.25A}^2 \leqslant \frac{1}{4}\|y_1+y_0\|_A^2+\|y_j-y_0\|_{R-0.25A}^2.$$

Если схема (3.29) принадлежит исходному семейству двухслойных схем, то для схемы (3.28) можно сформулировать аналог теоремы 3.19 об устойчивости по правой части уравнения:

Теорема 3.22 *Если выполнены условия $A = A^* > 0$ и $R = R^* \geqslant 0.25A$, $B \geqslant \varepsilon E$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число, то схема (3.28) устойчива по правой части уравнения, причем имеет место оценка*

$$\|Y_{j+1}\|_{\mathcal{A}}^2 \leqslant \|Y_1\|_{\mathcal{A}}^2+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{p=1}^{j}\|\varphi_p\|^2\tau,$$

или же в явном виде

$$\frac{1}{4}\|y_{j+1}+y_j\|_A^2+\|y_{j+1}-y_j\|_{R-0.25A}^2 \leqslant \frac{1}{4}\|y_1+y_0\|_A^2+\|y_j-y_0\|_{R-0.25A}^2+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{p=1}^{j}\|\varphi_p\|^2\tau.$$

4 Контрольные вопросы

1) Дайте определение двухслойной и трехслойной операторно-разностных схем. Запишите их в каноническом виде.

2) Постройте разностную схему для уравнения теплопроводности на отрезке в случае, когда коэффициент теплопроводности зависит от координат. Запишите соответствующую двухслойную схему в каноническом виде.

3) Сформулируйте определение устойчивости для двухслойной схемы. Дайте определение оператора перехода со слоя на слой и разрешающего оператора. Сформулируйте условия на оператор перехода, достаточные для устойчивости двухслойной схемы по начальным данным и правой части.

4) Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости по начальным данным и правой части двухслойной схемы с постоянными операторами.

5) Дайте определение исходного семейства двухслойных схем. Постройте схему с весами для уравнения теплопроводности на отрезке. При каких условиях она принадлежит исходному семейству?

6) Получите первое и второе энергетические тождества для двухслойной схемы, записанной в каноническом виде.

7) Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости двухслойной схемы по начальным данным в пространстве H_A.

8) Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости двухслойной схемы по правой части уравнения в пространстве H_A.

9) Сведите трехслойную схему, записанную в каноническом виде, к двухслойной. Сформулируйте условия на операторы, достаточные для устойчивости трехслойной схемы по начальным и по правой части уравнения. Запишите соответствующие оценки для решения разностной схемы.

10) Составьте схему крест для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad x \in (0,\,1),\ t \in (0,\,T], \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

и исследуйте ее на устойчивость.