

Простейшие способы исследования разностных схем на устойчивость

Напомним, что разностная схема

$$\begin{cases} L_h y_h = \varphi_h(x), & x \in \omega_h, \\ l_h y_h = \chi_h(x), & x \in \gamma_h, \end{cases}$$

аппроксимирующая краевую или начально-краевую задачу

$$\begin{cases} Lu = f(x), & x \in G, \\ lu = \mu(x), & x \in \Gamma, \quad \bar{G} = G + \Gamma \end{cases}$$

на сетке $\bar{\omega}_h$, называется устойчивой по правой части уравнения и дополнительным условиям, если при достаточно малых шагах сетки ($|h| \leq h_0$) найдутся числа M_1, M_2 , не зависящие ни от шагов сетки, ни от входных данных $\varphi_h(x), \chi_h(x)$, такие что имеет место неравенство

$$\|y_h\|_{h1} \leq M_1 \|\varphi\|_{h2} + M_2 \|\chi_h\|_{h3}.$$

Устойчивость разностной схемы является одной из ее ключевых характеристик, так как для линейных схем из аппроксимации и устойчивости следует их сходимость.

Существуют различные методы исследования разностных схем на устойчивость. Простейшие из них — это использование принципа максимума и спектрального критерия устойчивости.

1 Принцип максимума

Принцип максимума является одним из методов получения оценок для решения разностных схем и исследования устойчивости линейных разностных схем. Он применим для ограниченного класса задач, таких как разностные схемы для уравнений эллиптического и параболического типа, а также для уравнений переноса. Принцип максимума позволяет

установить устойчивость схемы по начальным данным, по граничным условиям Дирихле, а также по правой части уравнения. Он дает лишь достаточные условия устойчивости, то есть их невыполнение еще не означает, что схема неустойчива. Все следующие из принципа максимума оценки получаются в норме C , которая сильнее нормы в L_2 .

1.1 Каноническая форма разностных уравнений

Пусть в некоторой ограниченной области n -мерного евклидова пространства задана сетка $\bar{\omega}_h$, и пусть на внутренних узлах этой сетки рассматривается линейное разностное уравнение

$$\sum_{Q \in \mathcal{I}(P)} A_h(P, Q)y(Q) = F(P), \quad P \in \omega_h \quad (1.1)$$

относительно неизвестной сеточной функции $y(P)$, где коэффициенты уравнения $A_h(P, Q)$ и правая часть $F(P)$ — заданные сеточные функции.

Для дальнейшего анализа уравнение (1.1) удобно переписать в так называемой *канонической форме*:

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in \mathcal{I}'(P)} B(P, Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \omega_h, \quad (1.2)$$

выделяя слагаемое в центральном узле P шаблона $\mathcal{I}(P)$. Для стационарных задач, как правило, центральным считается тот узел шаблона, в котором коэффициент A_h максимален по модулю. Для нестационарных задач узел P выбирается на новом слое по времени. В уравнении (1.2) $\mathcal{I}'(P)$ — окрестность узла P , представляющая собой множество узлов шаблона $\mathcal{I}(P)$, не содержащее узла P : $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}'(P) + P$.

Далее будем рассматривать случай, когда для коэффициентов уравнения (1.2) выполнены следующие условия:

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) \geq 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{I}'(P)} B(P, Q) \geq 0 \quad (1.3)$$

для любого внутреннего узла $P \in \omega_h$ и любой точки Q окрестности $\mathcal{I}'(P)$ узла P .

Пример 1.1. Рассмотрите схему с весами для следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & x \in (0, 1), t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=1} = \mu_2(t), \end{cases}$$

и запишите ее в канонической форме. Когда ее коэффициенты удовлетворяют условиям (1.3)?

РЕШЕНИЕ. Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = i \cdot h, i = 0, 1, \dots, i_0, h = 1/i_0; t_j = j \cdot \tau, j = 0, 1, \dots\}$$

и аппроксимируем уравнение следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda (\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j) + \varphi_i^j, & i = 1, 2, \dots, i_0 - 1, j = 0, 1, \dots \\ y_i^0 = u_0(x_i), & i = 0, 1, \dots, i_0, \\ y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_{i_0}^j = \mu_2(t_j), & j = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

где

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = y_{\bar{x}x} \quad \varphi_i^j = \sigma f(x_i, t_{j+1}) + (1 - \sigma)f(x_i, t_j).$$

Разностное уравнение можно переписать в виде:

$$\left(1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} = \frac{\sigma\tau}{h^2} (y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}) + \frac{(1 - \sigma)\tau}{h^2} (y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \left(1 - \frac{2(1 - \sigma)\tau}{h^2}\right) y_i^j + \tau\varphi_i^j.$$

В качестве центрального узла шаблона выберем $P = P(x_i, t_{j+1})$. Тогда

$$\mathcal{I}'(P) : Q_1(x_i, t_j), \quad Q_2(x_{i-1}, t_{j+1}), \quad Q_3(x_{i+1}, t_{j+1}), \quad Q_4(x_{i-1}, t_j), \quad Q_5(x_{i+1}, t_j),$$

и коэффициенты канонической формы разностного уравнения будут иметь вид:

$$A(P) = 1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}, \quad B(P, Q_1) = 1 - \frac{2(1 - \sigma)\tau}{h^2},$$

$$B(P, Q_2) = B(P, Q_3) = \frac{\sigma\tau}{h^2}, \quad B(P, Q_4) = B(P, Q_5) = \frac{(1 - \sigma)\tau}{h^2}.$$

Условия $A(P) > 0$, $B(P, Q_m) \geq 0$, $m = 1, \dots, 5$ будут выполнены, если $\sigma \in [0, 1]$, и

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1 - \sigma)}.$$

При этом также выполнено условие

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{I}'(P)} B(P, Q) = 0,$$

то есть схема принадлежит рассматриваемому классу.

Пример 1.2. Постройте разностную схему для задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x), & x = \{x_1, x_2\}, \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \\ u(x) = \mu(x), & x_\alpha = 0 \text{ или } x_\alpha = l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \quad (1.4)$$

для уравнения Пуассона в прямоугольнике и приведите ее к каноническому виду. Выполняются ли для нее условия (1.3)?

РЕШЕНИЕ. Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_h = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha; \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha; \quad h_\alpha N_\alpha = l_\alpha; \quad \alpha = 1, 2\}.$$

Заменяя в уравнении оператор Лапласа разностным оператором $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$, получим разностную схему:

$$\begin{cases} \Lambda y = -f(x), & x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.5)$$

где точки

$$(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \in \omega_h, \quad i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2$$

представляют собой внутренние узлы сетки $\bar{\omega}_h$, а множество γ_h граничных узлов сетки имеет вид:

$$\gamma_h = (0, x_2^{(i_2)}) \cup (x_1^{(i_1)}, 0) \cup (l_1, x_2^{(i_2)}) \cup (x_1^{(i_1)}, l_2), \quad i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$

Явный вид разностных уравнений на внутренних узлах сетки следующий:

$$\begin{aligned} & 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) y(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) - \frac{1}{h_1^2} \left[y(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}) + y(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}) \right] - \\ & - \frac{1}{h_2^2} \left[y(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}) + y(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)}) \right] = f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}). \end{aligned}$$

В качестве центрального узла шаблона выбираем тот, которому соответствует максимальный коэффициент. В данном случае $P = P(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$. При этом коэффициенты канонической формы разностного уравнения имеют вид:

$$A(P) = 2 \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) > 0, \quad B(P, Q) = \frac{1}{h_\alpha^2} > 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

В данном случае

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{I}'(P)} B(P, Q) = 0,$$

то есть условия (1.3) выполнены, и схема принадлежит рассматриваемому классу.

Замечание 1.1 Если в задаче (1.4) уравнение однородное, то есть $f(x) \equiv 0$, а шаги сетки $\bar{\omega}_h$ в схеме (1.5) по обоим направлениям выбраны одинаковыми, то есть $h_1 = h_2 = h$, то для решения разностного уравнения Лапласа имеет место разностный аналог формулы среднего значения для гармонических функций:

$$y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right) = \frac{1}{4} \left\{ y\left(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}\right) + y\left(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}\right) + y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}\right) + y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)}\right) \right\}.$$

1.2 Принцип максимума для разностных схем на связной сетке

Для того чтобы перейти к формулировке принципа максимума для уравнения (1.2), потребуем выполнения некоторых дополнительных условий на сетку $\bar{\omega}_h$. Далее будем считать, что она является *связной* относительно шаблона $\mathbb{H}(P)$ разностного оператора в рассматриваемом уравнении.

Определение 1.2 Разностная сетка $\bar{\omega}_h$ называется *связной* (относительно шаблона $\mathbb{H}(P)$), если для любых двух точек $\bar{P}, \bar{\bar{P}} \in \omega_h$ существует такая последовательность окрестностей $\{\mathbb{H}'(P_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, t$, что можно совершить переход от \bar{P} к $\bar{\bar{P}}$, используя лишь узлы этих окрестностей, то есть найдутся такие узлы P_1, P_2, \dots, P_m сетки ω_h , что $P_1 \in \mathbb{H}'(\bar{P})$, $P_2 \in \mathbb{H}'(P_1)$, \dots , $P_m \in \mathbb{H}'(P_{m-1})$, $\bar{\bar{P}} \in \mathbb{H}'(P_m)$.

Заметим, что из этого определения следует, что точка $\bar{\bar{P}}$ может быть граничной. Связность сетки означает, что каждая точка границы принадлежит окрестности $\mathbb{H}'(P)$ по крайней мере одного внутреннего узла P .

Для разностного оператора уравнения (1.2) введем обозначение:

$$Ly(P) = A(P)y(P) - \sum_{Q \in \mathbb{H}'(P)} B(P, Q)y(Q). \quad (1.6)$$

Тогда уравнение (1.2) можно записать в виде:

$$Ly(P) = F(P). \quad (1.7)$$

Заметим, что

$$Ly(P) = D(P)y(P) + \sum_{Q \in \mathbb{H}'(P)} B(P, Q)(y(P) - y(Q)), \quad (1.8)$$

где $D(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathbb{H}'(P)} B(P, Q)$.

Теорема 1.3 Пусть разностный оператор L , имеющий вид (1.6) и заданный на связной сетке $\bar{\omega}_h$, таков, что для его коэффициентов выполнены условия:

$$A(P) > 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) \geq 0, \quad \forall P \in \omega_h, \quad \forall Q \in \mathcal{I}'(P). \quad (1.9)$$

Тогда, если сеточная функция $y(P) \not\equiv \text{const}$ удовлетворяет неравенству $Ly(P) \leq 0$ (соответственно, $Ly(P) \geq 0$) для всех внутренних узлов сетки ω_h , то $y(P)$ не может принимать наибольшего положительного (соответственно, наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах $P \in \omega_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Ly(P) \leq 0, \forall P \in \omega_h$. Предположим, что $\exists \bar{P} \in \omega_h$:

$$y(\bar{P}) = \max_{\bar{\omega}_h} y(P) = M_0 > 0.$$

Так как $y(\bar{P}) \geq y(Q), \forall Q \in \mathcal{I}'(\bar{P})$, то

$$Ly(\bar{P}) = \underbrace{D(\bar{P})}_{\geq 0} \underbrace{y(\bar{P})}_{> 0} + \sum_{Q \in \mathcal{I}'(\bar{P})} \underbrace{B(\bar{P}, Q)}_{> 0} \underbrace{(y(\bar{P}) - y(Q))}_{\geq 0} \geq 0.$$

Поскольку по предположению $Ly(P) \leq 0$ во всех внутренних узлах, то $Ly(\bar{P}) = 0$, откуда следует, что $D(\bar{P}) = 0$ и $y(\bar{P}) = y(Q)$ для всех $Q \in \mathcal{I}'(\bar{P})$. Если оператор L таков, что $D(P) > 0$ для всех $P \in \omega_h$, то противоречие, доказывающее теорему, уже получено.

Если коэффициент $D(\bar{P})$ может обращаться в ноль, то для любого узла $P_1 \in \mathcal{I}'(\bar{P})$ выполняется равенство $y(P_1) = y(\bar{P}) = M_0$. Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $y(P_1) = y(Q) = M_0$ для всех $Q \in \mathcal{I}'(P_1)$. Возьмем узел $P_2 \in \mathcal{I}'(P_1)$ и получим, что $y(P_2) = y(Q) = M_0$ для всех $Q \in \mathcal{I}'(P_2)$ и т.д.

Выберем произвольную точку $\bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}_h$. Так как по условию сетка $\bar{\omega}_h$ является связной, то за конечное число шагов можно осуществить переход от точки \bar{P} к точке $\bar{\bar{P}}$: $P_1 \in \mathcal{I}'(\bar{P}), P_2 \in \mathcal{I}'(P_1), \dots, P_m \in \mathcal{I}'(P_{m-1}), \bar{\bar{P}} \in \mathcal{I}'(P_m)$. Следовательно, $y(\bar{\bar{P}}) = y(\bar{P}) = M_0$ для любого узла $\bar{\bar{P}} \in \bar{\omega}_h$. Это означает, что $y(P) = M_0 = \text{const}$ на всей сетке $\bar{\omega}_h$, что противоречит условию теоремы $y(P) \not\equiv \text{const}$. Следовательно, узел \bar{P} , в котором $y(P)$ достигает максимального положительного значения, может быть только граничным.

Второе утверждение теоремы (для случая $Ly(P) \geq 0$) получается из первого, если заменить $y(P)$ на $-y(P)$.

Следствие 1.4 Пусть для разностного оператора L вида (1.6), заданного на связной сетке $\bar{\omega}_h$, выполнены условия (1.9), а для сеточной функции $y(P)$ справедливы неравенства $y(P) \geq 0$ в граничных узлах $P \in \gamma_h$ сетки и $Ly(P) \geq 0$ во внутренних узлах $P \in \omega_h$. Тогда $y(P) \geq 0$ для всех узлов сетки $P \in \bar{\omega}_h$. Если же $y(P) \leq 0$ в граничных узлах $P \in \gamma_h$

и $Ly(P) \leq 0$ во внутренних узлах $P \in \omega_h$, то $y(P) \leq 0$ при $P \in \bar{\omega}_h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Ly(P) \geq 0$ во внутренних узлах $P \in \omega_h$ и $y(P) \geq 0$ в граничных узлах $P \in \gamma_h$. Если существует внутренний узел $P_0 \in \omega_h$, такой что $y(P_0) < 0$, то $y(P)$ должна принимать наименьшее отрицательное значение на ω_h , что невозможно в силу принципа максимума. Аналогично получаем утверждение в случае $Ly(P) \leq 0$ на ω_h и $y(P) \leq 0$ на γ_h .

Следствие 1.5 Пусть для разностного оператора L вида (1.6), заданного на связной сетке $\bar{\omega}_h$, выполнены условия (1.9). Тогда однородная задача

$$\begin{cases} Ly(P) = 0, & P \in \omega_h, \\ y(P) = 0, & P \in \gamma_h \end{cases} \quad (1.10)$$

имеет только тривиальное решение $y(P) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1.4 для решения задачи (1.10) во внутренних узлах P сетки ω_h одновременно справедливы неравенства $y(P) \leq 0$ и $y(P) \geq 0$, что возможно лишь при $y(P) \equiv 0, \forall P \in \bar{\omega}_h$.

Следствие 1.6 Пусть для разностного оператора L вида (1.6), заданного на связной сетке $\bar{\omega}_h$, выполнены условия (1.9). Тогда задача

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), & P \in \omega_h, \\ y(P) = \mu(P), & P \in \gamma_h \end{cases} \quad (1.11)$$

имеет и притом единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) *Единственность.* Предположим, что существуют два различных решения $y_1(P) \neq y_2(P)$ задачи (1.11). Тогда сеточная функция $v(P) = y_1(P) - y_2(P)$ будет решением однородной задачи

$$\begin{cases} Lv(P) = 0, & P \in \omega_h, \\ v(P) = 0, & P \in \gamma_h. \end{cases}$$

В силу следствия 1.5 получаем, что $v(P) \equiv 0, \forall P \in \bar{\omega}_h$. Это противоречит предположению $y_1(P) \neq y_2(P)$. Следовательно, задача (1.11) может иметь только одно решение.

2) *Существование.* Так как задача (1.11) — это СЛАУ, то из того, что соответствующая однородная задача (1.10) имеет только тривиальное решение, следует, что определитель матрицы этой СЛАУ отличен от нуля. Это в свою очередь означает, что решение задачи (1.11) существует.

1.3 Теорема сравнения. Мажоранта

На основании принципа максимума можно доказать ряд теорем, позволяющих получать оценки нормы решения разностной схемы через нормы правых частей уравнения, начальных условий и граничных условий Дирихле, то есть доказывать устойчивость схемы по соответствующим входным данным. При этом все оценки получаются в норме C .

Теорема 1.7 Пусть $y(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), & P \in \omega_h, \\ y(P) = \mu(P), & P \in \gamma_h \end{cases} \quad (1.12)$$

на связной сетке $\bar{\omega}_h$ с множеством граничных узлов γ_h , где L — разностный оператор вида (1.6), для которого выполнены условия (1.9), а $Y(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} LY(P) = \bar{F}(P), & P \in \omega_h, \\ Y(P) = \bar{\mu}(P), & P \in \gamma_h, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $\bar{F}(P) \geq 0, \forall P \in \omega_h$ и $\bar{\mu}(P) \geq 0, \forall P \in \gamma_h$. Тогда из условий

$$|F(P)| \leq \bar{F}(P), \quad \forall P \in \omega_h, \quad |\mu(P)| \leq \bar{\mu}(P), \quad \forall P \in \gamma_h$$

следует неравенство

$$|y(P)| \leq Y(P), \quad \forall P \in \bar{\omega}_h.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий $\bar{F}(P) \geq 0$ для всех внутренних узлов $P \in \omega_h$ и $\bar{\mu}(P) \geq 0$ для всех граничных узлов $P \in \gamma_h$, с учетом того что для оператора L выполнены все требования принципа максимума, следует, что $Y(P) \geq 0$ в любом узле сетки $P \in \bar{\omega}_h$.

Положим $u(P) = y(P) + Y(P)$ и $v(P) = Y(P) - y(P)$. Тогда:

$$\begin{cases} Lu(P) = F(P) + \bar{F}(P) \geq 0, & P \in \omega_h, \\ u(P) = \mu(P) + \bar{\mu}(P) \geq 0, & P \in \gamma_h, \end{cases} \quad \begin{cases} Lv(P) = \bar{F}(P) - F(P) \geq 0, & P \in \omega_h, \\ v(P) = \bar{\mu}(P) - \mu(P) \geq 0, & P \in \gamma_h. \end{cases}$$

В силу следствия 1.4 принципа максимума получаем, что $u(P) \geq 0$ и $v(P) \geq 0$ для всех $P \in \bar{\omega}_h$. Таким образом, справедливы неравенства:

$$-Y(P) \leq y(P) \leq Y(P) \Rightarrow |y(P)| \leq Y(P), \quad \forall P \in \bar{\omega}_h.$$

Определение 1.8 Функция $Y(P)$, являющаяся решением задачи (1.13), называется мажорантой для решения задачи (1.12).

Проведем редукцию задачи (1.12). Представим ее решение в виде двух слагаемых: $y(P) = y_1(P) + y_2(P)$, где $y_1(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} Ly_1(P) = 0, & P \in \omega_h, \\ y_1(P) = \mu(P), & P \in \gamma_h \end{cases} \quad (1.14)$$

с однородным уравнением и неоднородными граничными условиями, а $y_2(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} Ly_2(P) = F(P), & P \in \omega_h, \\ y_2(P) = 0, & P \in \gamma_h \end{cases} \quad (1.15)$$

с неоднородным уравнением и однородными граничными условиями.

Лемма 1.9 Для решения задачи (1.14) справедлива оценка:

$$\|y_1\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}, \quad (1.16)$$

где $\|y_1\|_{\bar{C}} = \max_{P \in \bar{\omega}_h} |y_1(P)|$ и $\|\mu\|_{C_\gamma} = \max_{P \in \gamma_h} |\mu(P)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим мажоранту $Y_1(P)$ для решения задачи (1.14) как решение задачи:

$$\begin{cases} LY_1(P) = 0, & P \in \omega_h, \\ Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, & P \in \gamma_h. \end{cases}$$

Рассмотрим два возможных случая: или $Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$ всюду на сетке $\bar{\omega}_h$, или $Y_1(P) \neq \text{const}$.

Если $Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, \forall P \in \bar{\omega}_h$, то в силу теоремы 1.7 справедливо неравенство:

$$|y_1(P)| \leq Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, \quad \forall P \in \bar{\omega}_h,$$

из которого в силу определения нормы $\|y_1\|_{\bar{C}}$ получаем:

$$\|y_1\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Если $Y_1(P) \neq \text{const}$, то в силу следствия 1.4 принципа максимума $Y_1(P) \geq 0, \forall P \in \bar{\omega}_h$. Следовательно, существует узел $\bar{P} \in \bar{\omega}_h$, такой что $Y_1(\bar{P}) = \max_{P \in \bar{\omega}_h} Y_1(P)$, причем в силу принципа максимума $\bar{P} \in \gamma_h$. Но тогда

$$\|Y_1\|_{\bar{C}} = \max_{P \in \bar{\omega}_h} Y_1(P) = Y_1(\bar{P}) = \max_{P \in \gamma_h} Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Далее в силу теоремы 1.7 получаем, что

$$|y_1(P)| \leq Y_1(P), \quad \forall P \in \bar{\omega}_h \Rightarrow \max_{P \in \bar{\omega}_h} |y_1(P)| \leq Y_1(\bar{P}) = \|\mu\|_{C_\gamma} \Rightarrow \|y_1\|_{\bar{C}} \leq \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Теорема 1.10 Если $D(P) > 0$ для всех внутренних узлов ω_h , то для решения $y_2(P)$ задачи (1.15) верна оценка

$$\|y_2\|_{\bar{C}} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C, \quad (1.17)$$

где $\|F/D\|_C = \max_{P \in \omega_h} |F(P)/D(P)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим мажоранту $Y_2(P)$ решения задачи (1.15) как решение задачи:

$$\begin{cases} LY_2(P) = |F(P)|, & P \in \omega_h, \\ Y_2(P) = 0, & P \in \gamma_h. \end{cases}$$

Поскольку $LY_2(P) = |F(P)| \geq 0$ для всех внутренних узлов сетки и $Y_2(P) = 0$ во всех граничных узлах сетки, то из следствия 1.4 принципа максимума получаем, что $Y_2(P) \geq 0, \forall P \in \bar{\omega}_h$. Следовательно, существует такой внутренний узел $\bar{P} \in \omega_h$, что $Y_2(\bar{P}) = \max_{P \in \bar{\omega}_h} Y_2(P)$. Поскольку $Y_2(P)$ неотрицательна всюду на $\bar{\omega}_h$, то $Y_2(\bar{P}) = \|Y_2\|_{\bar{C}}$.

Воспользуемся явным видом оператора L и рассмотрим уравнение $LY_2(P) = |F(P)|$ в узле \bar{P} . Из уравнения

$$\underbrace{D(\bar{P})}_{>0} \underbrace{Y_2(\bar{P})}_{\geq 0} + \sum_{Q \in \mathcal{N}'(\bar{P})} \underbrace{B(\bar{P}, Q)}_{>0} \underbrace{(Y_2(\bar{P}) - Y_2(Q))}_{\geq 0} = |F(\bar{P})|$$

следует, что

$$D(\bar{P})Y_2(\bar{P}) \leq |F(\bar{P})| \Rightarrow Y_2(\bar{P}) \leq \frac{|F(\bar{P})|}{D(\bar{P})} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

Так как $Y_2(P)$ — мажоранта для $y_2(P)$, то имеет место неравенство:

$$\|y_2\|_{\bar{C}} \leq \|Y_2\|_{\bar{C}} \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C.$$

Пример 1.3. Составьте явную разностную схему для следующей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t \in (0, T], \\ u(0, t) = \mu_1(t), & u(l, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Исследуйте ее на устойчивость с помощью принципа максимума.

РЕШЕНИЕ. Введем в расчетной области равномерную сетку $\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$, где

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, i_0, i_0h = l\}, \quad \overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0, j_0\tau = T\}.$$

Явная схема на этой сетке имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = a^2 \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, & i = 1, 2, \dots, i_0 - 1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ y_i^0 = \varphi(x_i), & i = 0, 1, \dots, i_0, \\ y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_{i_0}^j = \mu_1(t_j), & j = 0, 1, \dots, j_0. \end{cases}$$

Очевидно, что для шаблона явной схемы уравнения теплопроводности заданная сетка является связной. Выберем в качестве центрального узла шаблона узел $P = (x_i, t_{j+1})$ и перепишем уравнение в каноническом виде:

$$y_i^{j+1} = \frac{a^2\tau}{h^2} y_{i+1}^j + \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{a^2\tau}{h^2} y_{i-1}^j,$$

или, что то же самое, в виде

$$Ay_i^{j+1} = B_1 y_{i+1}^j + B_2 y_i^j + B_3 y_{i-1}^j,$$

где $A = 1$, $B_1 = B_3 = \frac{a^2\tau}{h^2}$, $B_2 = 1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}$. Заметим, что в данном случае

$$D = A - B_1 - B_2 - B_3 = 0.$$

Оператор L вида

$$Ly(P) = Ay(P) - \sum_{m=1}^3 B_m y(Q_m),$$

где $Q_1 = (x_{i+1}, t_j)$, $Q_2 = (x_i, t_j)$, $Q_3 = (x_{i-1}, t_j)$, принадлежит классу, для которого применим принцип максимума, если выполнено условие $B_2 \geq 0$, которое можно переписать в виде

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

Узлы $(x_i, 0)$ при $i = 0, 1, \dots, i_0$, а также $(0, t_j)$ и (l, t_j) при $j = 0, 1, \dots, j_0$ составляют множество $\gamma_{h\tau}$ граничных узлов сетки. Значения искомой функции в этих узлах задано — это начальные условия и граничные условия Дирихле. Следовательно, полученная разностная схема может быть записана в виде

$$\begin{cases} Ly(P) = 0, & P \in \omega_{h\tau}, \\ y(P) = \psi(P), & P \in \gamma_{h\tau}, \end{cases} \quad (1.18)$$

где $\psi(P) = \varphi(x_i)$ или $\psi(P) = \mu_\alpha(t_j)$, $\alpha = 1, 2$, в зависимости от того, в каком граничном узле $P \in \gamma_{h\tau}$ рассматривается эта функция. Для системы (1.18) выполнены все условия леммы 1.9, поэтому справедлива оценка

$$\|y\|_{\bar{C}} \leq \max\{\|\mu_1\|_{C_\gamma}, \|\mu_2\|_{C_\gamma}, \|\varphi\|_{C_\gamma}\}, \quad (1.19)$$

где $\|\mu_\alpha\|_{C_\gamma} = \max_{j=0,1,\dots,j_0} |\mu_\alpha(t_j)|$, $\|\varphi\|_{C_\gamma} = \max_{i=0,1,\dots,i_0} |\varphi(x_i)|$. Неравенство (1.19) означает устойчивость схемы по начальным и граничным условиям при выполнении условия $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

Заметим, что доказать устойчивость рассматриваемой схемы по правой части с помощью теоремы 1.10 не удастся, так как в данном случае $D = 0$.

1.4 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.4. *Покажите, что неявная схема для задачи*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, l), t \in (0, T], \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

на равномерной сетке устойчива по начальным и граничным условиям при любых соотношениях шагов τ и h .

Задача 1.5. *Покажите, что разностная схема*

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{\tau} + c \cdot \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} = 0, & i = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots \\ y_0^j = \mu(t_j), & j = 0, 1, \dots \\ y_i^0 = \varphi(x_i), & i = 0, 1, \dots \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, +\infty), t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$ — константа, устойчива по начальным и граничным условиям при любых соотношениях шагов τ и h .

Задача 1.6. *Покажите, что разностная схема*

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{\tau} + c \cdot \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h} = 0, & i = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots \\ y_0^j = \mu(t_j), & j = 0, 1, \dots \\ y_i^0 = \varphi(x_i), & i = 0, 1, \dots \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, +\infty), t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$ — константа, устойчива по начальным и граничным условиям, если выполнено условие Куранта $c\tau \leq h$.

Задача 1.7. Получите достаточное условие устойчивости по начальным и граничным условиям схемы

$$\begin{cases} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} + c \cdot \frac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} = 0, & i = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots \\ y_0^j = \mu(t_j), & j = 0, 1, \dots \\ y_i^0 = \varphi(x_i), & i = 0, 1, \dots \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (0, +\infty), t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$.

2 Спектральный анализ разностных схем

2.1 Исследование схем на устойчивость по начальным данным методом гармоник

Одним из достаточно простых и эффективных способов исследования линейных разностных схем с постоянными коэффициентами на устойчивость по начальным данным является метод гармоник. Его можно использовать как для двухслойных схем вида

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (2.1)$$

так и для трехслойных схем вида

$$B \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + R(\hat{y} - 2y + \check{y}) + Ay = \varphi, \quad (2.2)$$

где A , B и R — линейные разностные операторы с постоянными коэффициентами, действующие на сеточную функцию y как на функцию пространственной переменной x , обозначения \check{y} , y и \hat{y} используются для значений сеточной функции y_h на $(j-1)$ -м, j -м и $(j+1)$ -м слоях по времени соответственно.

Для теоретического обоснования метода гармоник прежде всего рассмотрим частный случай — разностные схемы для задач Коши на прямой $x \in (-\infty, +\infty)$. Пусть схемы (2.1) и (2.2) заданы на равномерной сетке:

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

Исследуя устойчивость по начальным данным, фиксируем правую часть φ в уравнениях (2.1) и (2.2). Пусть $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ — решения соответствующих разностных уравнений при двух разных начальных условиях. Тогда их разность $\delta y = y^{(1)} - y^{(2)}$ будет удовлетворять однородному уравнению

$$B \frac{\delta \hat{y} - \delta y}{\tau} + A \delta y = 0 \quad (2.3)$$

в случае двухслойной схемы, и уравнению

$$B \frac{\delta \hat{y} - \delta \check{y}}{2\tau} + R(\delta \hat{y} - 2\delta y + \delta \check{y}) + A \delta y = 0 \quad (2.4)$$

в случае трехслойной схемы.

Разложим сеточную функцию $\delta y(x_n, t_j) = \delta y_n^j$ в ряд по пространственным гармоникам e^{iqx_n} :

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Так как уравнения (2.3) и (2.4) линейны, их можно рассматривать для каждой гармоники $\delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{iqx_n}$ по отдельности.

Рассмотрим подробно случай двухслойной схемы (2.3). При каждом фиксированном q получаем:

$$(C_q(t_{j+1}) - C_q(t_j)) B e^{iqx_n} + \tau C_q(t_j) A e^{iqx_n} = 0. \quad (2.5)$$

Так как выражения $B e^{iqx_n}$ и $A e^{iqx_n}$ представляют собой конечные линейные комбинации выражений $e^{iqx_n} = e^{i\alpha_q n}$, $e^{iqx_{n-1}} = e^{i\alpha_q(n-1)}$, $e^{iqx_{n+1}} = e^{i\alpha_q(n+1)}$ и т.д., где $\alpha_q = qh$, то, сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, из равенства (2.5) получаем, что

$$C_q(t_{j+1}) = \lambda_q \cdot C_q(t_j),$$

где λ_q — число, которое не зависит ни от n , ни от j . Число λ_q называют множителем роста для q -й гармоники. Его можно найти из уравнения:

$$(\lambda_q - 1) B e^{iqx_n} + \tau A e^{iqx_n} = 0.$$

Таким образом, для двухслойной схемы получаем:

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{iqx_n}, \quad \delta y_n^{j+2} = \sum_q \lambda_q^2 C_q(t_j) e^{iqx_n},$$

и так далее.

Аналогичный результат имеет место и в случае трехслойной схемы. Рассматривая уравнение (2.4) для каждой гармоники в отдельности и учитывая, что $\delta y_{n,q}^{j-1}$, $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ связаны соотношениями

$$\delta y_{n,q}^{j-1} = C_q(t_{j-1})e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^j = \lambda_q \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q C_q(t_{j-1})e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q^2 \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q^2 C_q(t_{j-1})e^{iqx_n},$$

для множителей роста приходим к следующему квадратному уравнению:

$$(\lambda_q^2 - 1)B e^{iqx_n} + 2\tau(\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1)R e^{iqx_n} + 2\tau\lambda_q A e^{iqx_n} = 0.$$

Теорема 2.1 *Для равномерной устойчивости схем (2.1) и (2.2) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы для любых q выполнялось условие:*

$$|\lambda_q| \leq 1 + c\tau, \tag{2.6}$$

где константа $c \geq 0$ не зависит ни от параметра q , ни от шагов сетки τ и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Пусть хотя бы для одной гармоники с номером q_0 условие (2.6) не выполняется. Это означает, что для любого сколь угодно большого c имеет место неравенство:

$$|\lambda_{q_0}| \geq 1 + c\tau.$$

Если на произвольном слое t_j в этой гармонике имеется возмущение $\delta y_{n,q_0}^j$, то к моменту времени $T = t_j + J \cdot \tau$ его амплитуда будет порядка

$$|\lambda_{q_0}|^J = |\lambda_{q_0}|^{(T-t_j)/\tau} \geq (1 + c\tau)^{(T-t_j)/\tau} \approx (e^{c\tau})^{(T-t_j)/\tau} = e^{c(T-t_j)},$$

где c может быть сколь угодно велико. Это и означает неустойчивость по начальным данным.

Достаточность. Разложим возмущение на некотором слое t_j в ряд по гармоникам:

$$\delta y(t_j) = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

При $t = t_{j+J}$ возмущение будет иметь вид:

$$\delta y(t_{j+J}) = \sum_q C_q(t_{j+J}) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q^J C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Гармоники e^{iqx_n} с различными q ортогональны между собой на отрезке длиной 2π . Оценим погрешность решения на слое $j + J$ по норме L_2 на отрезке длиной 2π :

$$\|\delta y(t_{j+J})\|_{L_2}^2 = \sum_q |\lambda_q|^{2J} |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|_{L_2}^2 \leq (1+c\tau)^{2J} \underbrace{\sum_q |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|_{L_2}^2}_{\|\delta y(t_j)\|_{L_2}^2} \leq e^{2c(t-t_j)} \|\delta y(t_j)\|_{L_2}^2.$$

Последнее неравенство означает равномерную устойчивость по начальным данным.

Замечание 2.2 В случае, когда множители роста λ_q не зависят явным образом от шага τ , условие (2.6) принимает вид

$$|\lambda_q| \leq 1. \quad (2.7)$$

Теорема 2.1 справедлива только для задач Коши на прямой $-\infty < x < \infty$, то есть при отсутствии граничных условий. Для задач в конечных областях условия (2.6) и (2.7) являются необходимыми, но не достаточными условиями устойчивости по начальным данным. Тем не менее, как правило, условия на шаги сетки, при которых выполняются условия (2.6) или (2.7), совпадают с достаточными условиями устойчивости, получаемыми более строгими методами.

Для задачи на отрезке с краевыми условиями можно получить аналог теоремы 2.1, если вместо гармоник e^{iqx_n} использовать собственные функции разностного оператора задачи, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям.

2.2 Примеры использования метода гармоник

Пример 2.1. Исследуйте с помощью метода гармоник на устойчивость по начальным данным явную схему на равномерной сетке для задачи Коши для уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \\ u(x, y, 0) = \mu(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Введем сетку с шагом h_x по переменной x , h_y по переменной y и τ по времени:

$$x_n = h_x n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad y_m = h_y m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = \tau j, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

В случае двух пространственных переменных явная схема для уравнения теплопроводности имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{v_{n,m}^{j+1} - v_{n,m}^j}{\tau} - \frac{v_{n+1,m}^j - 2v_{n,m}^j + v_{n-1,m}^j}{h_x^2} - \\ - \frac{v_{n,m+1}^j - 2v_{n,m}^j + v_{n,m-1}^j}{h_y^2} = 0, & n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ v_{n,m}^0 = \mu(x_n, y_m), & n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Погрешность $\delta v_{n,m}^j$, обусловленная погрешностью начальных данных, будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\delta v_{n,m}^{j+1} - \delta v_{n,m}^j}{\tau} - \frac{\delta v_{n+1,m}^j - 2\delta v_{n,m}^j + \delta v_{n-1,m}^j}{h_x^2} - \frac{\delta v_{n,m+1}^j - 2\delta v_{n,m}^j + \delta v_{n,m-1}^j}{h_y^2} = 0. \quad (2.8)$$

Разложим погрешность $\delta v_{n,m}^j$ в ряд по гармоникам $e^{i(qx_n + py_m)}$:

$$\delta v_{n,m}^j = \sum_q \sum_p C_{q,p}^j e^{i(qx_n + py_m)}.$$

Тогда на слое $j + 1$ она будет иметь вид:

$$\delta v_{n,m}^{j+1} = \sum_q \sum_p C_{q,p}^{j+1} e^{i(qx_n + py_m)} = \sum_q \sum_p \lambda_{q,p} C_{q,p}^j e^{i(qx_n + py_m)},$$

где $\lambda_{q,p}$ — множители роста. Их можно найти, рассматривая уравнение (2.8) для каждой отдельной гармоники и сокращая на $C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}$, где $\alpha_q = qh_x$ и $\beta_p = ph_y$. В результате для $\lambda_{q,p}$ получим уравнение:

$$\frac{\lambda_{q,p} - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h_x^2} - \frac{e^{i\beta_p} - 2 + e^{-i\beta_p}}{h_y^2} = 0,$$

откуда находим

$$\lambda_{q,p}(\alpha_q, \beta_p) = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\beta_p}{2},$$

где $r_x = \frac{\tau}{h_x^2}$ и $r_y = \frac{\tau}{h_y^2}$. Пусть $r = \max\{r_x, r_y\}$. Тогда при изменении параметров α_q и β_p значения $\lambda_{q,p}(\alpha_q, \beta_p)$ изменяются в пределах

$$1 - 8r \leq \lambda_{q,p} \leq 1.$$

Условие (2.7) устойчивости схемы выполняется, если

$$1 - 8r \geq -1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \tau \leq \frac{\min\{h_x^2, h_y^2\}}{4}.$$

Рассмотрим несколько примеров двухслойных разностных схем для уравнения колебаний на прямой. Задача Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}^1, t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \varphi(x), & \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

для уравнения колебаний на прямой эквивалентна следующей задаче для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ v(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in (0, T]; \quad (2.9)$$

где $\tilde{\psi}(x)$ — первообразная функции $\psi(x)$. Введем векторы-столбцы:

$$\mathbf{w}(x, t) = (u(x, t), v(x, t))^T, \quad \Phi(x) = (\varphi(x), \tilde{\psi}(x))^T,$$

и рассмотрим задачу (2.9) в векторной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in (0, T]; \\ \mathbf{w}(x, 0) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.2. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным следующую разностную схему для задачи (2.10):*

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{w}_n^{j+1} - \mathbf{w}_n^j}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\mathbf{w}_{n+1}^j - \mathbf{w}_n^j}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ \mathbf{w}_n^0 = \Phi_n, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.11)$$

на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad j_0\tau = T.$$

РЕШЕНИЕ. Погрешность $\delta \mathbf{w}_n^j$ решения на произвольном слое j можно разложить в ряд по гармоникам e^{iqx_n} :

$$\delta \mathbf{w}_n^j = \sum_q \delta \mathbf{w}_{n,q}^j = \sum_q \mathbf{C}_q^j e^{iqx_n},$$

где $\mathbf{C}_q^j = (C_{q,1}^j \ C_{q,2}^j)^T$. Тогда на слое $j + 1$ погрешность будет иметь вид

$$\delta \mathbf{w}_n^{j+1} = \sum_q \delta \mathbf{w}_{n,q}^{j+1} = \sum_q \lambda_q \mathbf{C}_q^j e^{iqx_n},$$

где λ_q — множители роста. В силу линейности задачи каждая гармоника удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta \mathbf{w}_n^{j+1} - \delta \mathbf{w}_n^j}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\delta \mathbf{w}_{n+1}^j - \delta \mathbf{w}_n^j}{h} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения

$$\delta \mathbf{w}_{n,q}^j = \mathbf{C}_q^j e^{i\alpha_q n}, \quad \delta \mathbf{w}_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \mathbf{C}_q^j e^{i\alpha_q n}, \quad \alpha_q = qh$$

и сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, получаем систему:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} \mathbf{C}_q^j - \mathbf{A} \frac{e^{i\alpha_q} - 1}{h} \mathbf{C}_q^j = 0 \Rightarrow ((\lambda_q - 1)\mathbf{E} - r(e^{i\alpha_q} - 1)\mathbf{A}) \mathbf{C}_q^j = 0,$$

где \mathbf{E} — единичная матрица, $r = \frac{\tau}{h}$. Данная система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$|(\lambda_q - 1)\mathbf{E} - r(e^{i\alpha_q} - 1)\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda_q - 1 & -r(e^{i\alpha_q} - 1) \\ -r(e^{i\alpha_q} - 1) & \lambda_q - 1 \end{vmatrix} = (\lambda_q - 1)^2 - r^2(e^{i\alpha_q} - 1)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_{1,q}(\alpha_q) = 1 - r + re^{i\alpha_q}, \quad \lambda_{2,q}(\alpha_q) = 1 + r - re^{i\alpha_q}.$$

Корни $\lambda_{1,q}(\alpha_q)$ и $\lambda_{2,q}(\alpha_q)$ при изменении вещественного параметра α_q пробегает окружности радиуса r с центрами в точках $1 - r$ и $1 + r$ (рис. 1). Таким образом, условие устойчивости (2.7) не выполнено ни при каком r . Построенная схема является абсолютно неустойчивой.

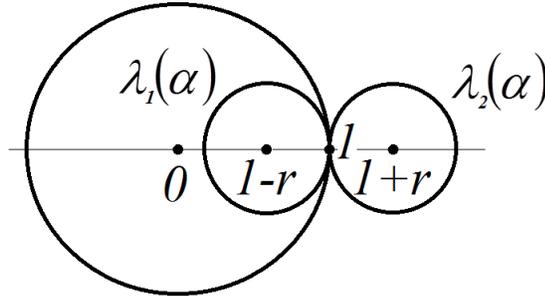


Рис. 1: Спектр схемы (2.11)

Пример 2.3. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным следующую разностную схему для задачи (2.10):*

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{w}_n^{j+1} - \mathbf{w}_n^j}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\mathbf{w}_{n+1}^j - \mathbf{w}_{n-1}^j}{2h} - \\ \quad - \frac{\tau}{2h^2} (\mathbf{w}_{n+1}^j - 2\mathbf{w}_n^j + \mathbf{w}_{n-1}^j) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ \mathbf{w}_n^0 = \Phi_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad j_0\tau = T.$$

РЕШЕНИЕ. Схема (2.12) аппроксимирует задачу (2.10) со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h . В самом деле, если $\mathbf{w}(x, t)$ — достаточно гладкая функция непрерывно меняющихся аргументов x и t , то

$$\mathbf{w}_t(x, t) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Если $\mathbf{w}(x, t)$ — решение задачи (2.10), то

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x \partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) = \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \mathbf{A}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2},$$

причем

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

Следовательно, разностное уравнение

$$\mathbf{w}_t - \frac{\tau}{2} \mathbf{w}_{\bar{x}x} - \mathbf{A} \mathbf{w}_x = 0$$

будет аппроксимировать дифференциальное уравнение (2.10) со вторым порядком погрешности аппроксимации по времени, а также и по координате за счет симметрии пространственных разностных производных.

Характеристическое уравнение для схемы (2.12) имеет вид:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} \mathbf{C}_q^j - \mathbf{A} \frac{e^{i\alpha_q} - e^{-i\alpha_q}}{2h} \mathbf{C}_q^j - \frac{\tau}{2h^2} (e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}) \mathbf{C}_q^j = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\left(\lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \right) \mathbf{E} - ir \sin \alpha_q \mathbf{A} \right] \mathbf{C}_q^j = 0, \quad r = \frac{\tau}{h} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} & -ir \sin \alpha_q \\ -ir \sin \alpha_q & \lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \right)^2 = -r^2 \sin^2 \alpha_q.$$

Из характеристического уравнения находим спектр рассматриваемой схемы:

$$\lambda_{+,q}(\alpha_q) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + ir \sin \alpha_q, \quad \lambda_{-,q}(\alpha_q) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - ir \sin \alpha_q.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\lambda_{\pm,q}|^2 &= \left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha_q = 1 - 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + 4r^4 \sin^4 \frac{\alpha_q}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \cos^2 \frac{\alpha_q}{2} = \\ &= 1 + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \left(-1 + r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \cos^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) = 1 + 4r^2 \sin^4 \frac{\alpha_q}{2} (r^2 - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, условие

$$|\lambda| \leq 1$$

выполнено, если $r \leq 1$, и не выполнено, если $r > 1$. Следовательно, схема (2.12) является условно устойчивой, и условие ее устойчивости имеет вид $\tau \leq h$.

3 Метод разделения переменных

Как было сказано выше, при исследовании разностной схемы для задачи в ограниченной области с определенными граничными условиями можно использовать аналог метода гармоник, раскладывая решение по собственным функциям соответствующего разностного оператора.

В качестве примера рассмотрим задачу для двухслойной схемы в ограниченной области с однородными граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} By_t + Ay = 0, & t \in \omega_\tau, \quad x \in \omega_h, \\ y = 0, & t \in \omega_\tau, \quad x \in \gamma_h, \\ y|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (3.1)$$

где A и B — самосопряженные положительно определенные линейные разностные операторы, действующие на y как на функцию только пространственной переменной x .

Пусть решение задачи (3.1) при каждом $t \in \omega_\tau$ принадлежит некоторому сеточному пространству H_h размерности N со скалярным произведением (u, v) . Рассмотрим задачу на собственные функции $\xi^{(k)}$ и собственные значения μ_k :

$$\begin{cases} A\xi^{(k)} = \mu_k B\xi^{(k)}, & x \in \omega_h, \\ \xi^{(k)} = 0, & x \in \gamma_h, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \dots, N$. Тогда в силу самосопряженности операторов A и B имеют место следующие равенства:

$$\mu_k(B\xi^{(k)}, \xi^{(m)}) = (A\xi^{(k)}, \xi^{(m)}) = (\xi^{(k)}, A\xi^{(m)}) = \mu_m(\xi^{(k)}, B\xi^{(m)}) = \mu_m(B\xi^{(k)}, \xi^{(m)}),$$

из которых получаем

$$(\mu_k - \mu_m)(B\xi^{(k)}, \xi^{(m)}) = 0,$$

то есть $(B\xi^{(k)}, \xi^{(m)}) = 0$ при $k \neq m$. Нормируем собственные функции так, чтобы выполнялись равенства

$$(B\xi^{(k)}, \xi^{(m)}) = \delta_{k,m}. \quad (3.2)$$

Так как оператор A по условию является положительно определенным, то $\mu_k > 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$. В самом деле, в силу условий ортогональности (3.2) получаем:

$$\mu_k = (A\xi^{(k)}, \xi^{(k)}) > 0.$$

Решение задачи (3.1) будем искать в виде:

$$y^j = \sum_{k=1}^N C_k(t_j) \xi^{(k)}.$$

Так как

$$Ay = \sum_{k=1}^N C_k(t_j) A\xi^{(k)} = \sum_{k=1}^N C_k(t_j) \mu_k B\xi^{(k)},$$

то, подставляя решение в виде разложения по собственным функциям в уравнение (3.1), получаем:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{C_k(t_{j+1}) - C_k(t_j)}{\tau} + \mu_k C_k(t_j) \right\} B\xi^{(k)} = 0.$$

Пользуясь условиями ортогональности (3.2), получаем:

$$\frac{C_k(t_{j+1}) - C_k(t_j)}{\tau} + \mu_k C_k(t_j) = 0 \Rightarrow C_k(t_{j+1}) = (1 - \tau\mu_k)C_k(t_j), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где $\lambda_k = 1 - \tau\mu_k$ — аналоги множителей роста в методе гармоник. Следовательно,

$$y^{j+1} = \sum_{k=1}^N C_k(t_{j+1}) \xi^{(k)} = \sum_{k=1}^N (1 - \tau\mu_k) C_k(t_j) \xi^{(k)}.$$

Введем энергетическую норму функции y на слое j :

$$\|y^j\|_A^2 = (Ay^j, y^j)$$

и оценим ее на слое $(j+1)$:

$$\begin{aligned} \|y^{j+1}\|_A^2 &= (Ay^{j+1}, y^{j+1}) = \left(\sum_{k=1}^N C_k(t_{j+1}) \mu_k B\xi^{(k)}, \sum_{m=1}^N C_m(t_{j+1}) \xi^{(m)} \right) = \sum_{k=1}^N \mu_k C_k^2(t_{j+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^N \mu_k (1 - \tau\mu_k)^2 C_k^2(t_j) \leq \max_{1 \leq k \leq N} (1 - \tau\mu_k)^2 \underbrace{\sum_{k=1}^N \mu_k C_k^2(t_j)}_{\|y^j\|_A^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|y^{j+1}\|_A \leq \max_{1 \leq k \leq N} |1 - \tau\mu_k| \cdot \|y^j\|_A \Rightarrow \|y^{j+1}\|_A \leq \|y^j\|_A \leq \dots \leq \|y^0\|_A = \|\varphi\|_A,$$

если $|1 - \tau\mu_k| \leq 1$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$. Последнее условие будет выполнено, если при всех k справедлива оценка

$$0 < \mu_k \leq \frac{2}{\tau}. \quad (3.3)$$

Пример 3.1. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным неявную схему для уравнения теплопроводности на отрезке $[0, 1]$ с однородными граничными условиями Дирихле:*

$$\begin{cases} y_t = a^2 \hat{y}_{\bar{x}x}, & x_n \in \omega_h, \quad t_j \in \omega_\tau, \\ y_n^0 = \varphi(x_n), \\ y_0^j = y_N^j = 0, & j = 1, 2, \dots, J, \end{cases}$$

где

$$\bar{\omega}_h = \{x_n = nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad x_N = 1\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad t_J = 1\}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем задачу в виде (3.1) и найдем операторы A и B . Так как

$$\hat{y}_{\bar{x}x} = (\hat{y} - y + y)_{\bar{x}x} = \tau y_{t, \bar{x}x} + y_{\bar{x}x},$$

то разностное уравнение можно переписать следующим образом:

$$(E - \tau a^2 \Lambda) y_t - a^2 \Lambda y = 0,$$

где E — единичный оператор, $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$. Вводя обозначения $A = -a^2 \Lambda$, $B = (E + \tau A)$, приходим к разностному уравнению

$$B y_t + A y = 0$$

на внутренних узлах сетки.

С учетом граничных условий будем искать решение разностной задачи, при каждом $t_j \in \bar{\omega}_\tau$ принадлежащее пространству H , состоящему из сеточных функций f_n , таких что $f_0 = f_N = 0$ и

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N-1} f_n^2 h} < \infty.$$

В качестве скалярного произведения в пространстве H будем использовать

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{N-1} f_n g_n h, \quad \forall f, g \in H.$$

Операторы A и $B = (E + \tau A)$ в пространстве H являются самосопряженными и положительно определенными. В самом деле, из разностной формулы Грина

$$(f, g_{\bar{x}x}) = f_N g_{\bar{x},N} - f_0 g_{\bar{x},1} - (f_{\bar{x}}, g_{\bar{x}}]$$

следует, что для любых функций $f, g \in H$

$$(f, Ag) = -a^2(f, g_{\bar{x}x}) = a^2(f_{\bar{x}}, g_{\bar{x}}] = -a^2(f_{\bar{x}x}, g) = (Af, g) \Rightarrow A^* = A,$$

$$(f, Af) = a^2(f_{\bar{x}}, f_{\bar{x}}] > 0.$$

Рассмотрим задачу на собственные функции и собственные значения:

$$\begin{cases} A\xi = \mu B\xi, & x_n \in \omega_h, \\ \xi_0 = \xi_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2(1 - \tau\mu)\xi_{\bar{x}x} + \mu\xi = 0, & x_n \in \omega_h, \\ \xi_0 = \xi_N = 0. \end{cases}$$

Пользуясь известными выражениями для собственных значений разностной задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с условиями Дирихле, получаем:

$$\frac{\mu_k}{a^2(1 - \tau\mu_k)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2} \Rightarrow \mu_k = \frac{\frac{4a^2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2}}{1 + \tau \frac{4a^2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2}}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Следовательно, условие

$$0 < \mu_k \leq \frac{2}{\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1$$

выполнено при любом сочетании шагов τ и h , то есть схема безусловно устойчива по начальным данным.

4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение канонической формы разностного уравнения.
2. Дайте определение связанной сетки.
3. Сформулируйте и докажите принцип максимума для разностного оператора L на связанной сетке.
4. Сформулируйте следствия принципа максимума.
5. Дайте определение мажоранты решения разностной задачи

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), & P \in \omega_h, \\ y(P) = \mu(P), & P \in \gamma_h. \end{cases} \quad (4.1)$$

6. Проведите редукцию задачи (4.1) к двум вспомогательным задачам и получите оценки для их решений с помощью мажорант.

7*. Исследуйте на устойчивость методом разделения переменных явную схему, аппроксимирующую начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \end{cases}$$

с погрешностью аппроксимации $O(\tau + h^2)$ на равномерной сетке.