Лекция 3

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА И ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Интеграл Лебега, конечно, строится не для всех функций, а только для так называемых измеримых. В дальнейшем для удобства вместо тройки $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu^*)$ мы будем писать просто $(X, \mathcal{A}, \mu)$, понимая под $\mathcal{A}$ уже полученную σ-алгебру измеримых множеств, а под μ уже продолженную по Лебегу меру.

§ 1. Измеримые по Лебегу функции

Итак, пусть у нас имеется измеримое пространство с мерой $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $f(x) : X \to \mathbb{R}^1$ называется измеримой, если для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество*

$$\{x \in X : \, f(x) < c\}$$

принадлежит $\mathcal{A}$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Для измеримой функции f следующие множества измеримы:*

$$\{x : \, c_1 \leqslant f(x) < c_2\}, \quad \{x : \, f(x) \geqslant c_2\},$$
$$\{x : \, c_1 < f(x) \leqslant c_2\}, \quad \{x : \, f(x) \leqslant c_1\},$$
$$\{x : \, c_1 < f(x) < c_2\}, \quad \{x : \, c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2\}.$$

Доказательство.

Действительно, пусть $f(x)$ измерима, тогда

$$A_1 = \{x : \, f(x) < c_1\}, \; A_2 = \{x : \, f(x) < c_2\} \in \mathcal{A},$$
$$B_n = \{x : \, f(x) < c_1 + 1/n\} \in \mathcal{A}.$$

Тогда измеримость указанных множеств вытекает из следующих формул:

$$\mathcal{A} \ni A_2 \backslash A_1 = \{x : \, c_1 \leqslant f(x) < c_2\}, \quad \mathcal{A} \ni X \backslash A_2 = \{x : \, c_2 \leqslant f(x)\},$$
$$\mathcal{A} \ni \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = B = \{x : \, f(x) \leqslant c_1\},$$

$$\mathcal{A} \ni \{x:\ f(x) < c_2\} \setminus \{x:\ f(x) \leqslant c_1\} = \{x:\ c_1 < f(x) < c_2\},$$
$$\{x:\ c_1 \leqslant f(x) \leqslant c_2\} = (X \backslash A_1) \cap B \in \mathcal{A}.$$

При этом мы пользуемся замкнутостью σ-алгебры относительно операции счётного пересечения (см. задачу 3 лекции-семинара 3).

Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Борелевские множества и непрерывные функции. Рассмотрим все открытые множества в пространстве $\mathbb{R}^N$, т. е. такие множества B, которые вместе с каждой точкой $x_0 \in B$ содержат некоторый шар

$$O(x_0, r) := \left\{x \in \mathbb{R}^N:\ |x - x_0| < r\right\}, \quad r > 0.$$

Рассмотрим алгебру $B(\mathbb{R}^N)$, порождённую всеми открытыми множествами из $\mathbb{R}^N$, т. е. рассмотрим всевозможные конечные их пересечения, дополнения до всего пространства $\mathbb{R}^N$ и конечные объединения, а затем добавим результаты этих операций к семейству, которое и обозначаем через $B(\mathbb{R}^N)$. Однако нам нужно из алгебры $B(\mathbb{R}^N)$ построить такое расширение, которое было бы замкнуто относительно операций счётного объединения и пересечения. Такое расширение и есть так называемая борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Дадим определение борелевской σ-алгебры в $\mathbb{R}^N$.

Определение 2. *Минимальная σ-алгебра, порождённая всеми открытыми множествами из $\mathbb{R}^N$, называется борелевской σ-алгеброй и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 2. *Необходимым и достаточным условием измеримости функции $f(x)$ является следующее*:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \textit{для всех} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1). \tag{1.1}$$

Доказательство.

Достаточность. Поскольку все множества вида $(-\infty, c)$ содержатся в борелевской σ-алгебре, измеримость функции непосредственно следует из (1.1).

Необходимость. Пусть $f(x)$ измерима. Введём следующее обозначение:

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1):\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{E}$ — σ-алгебра.

Действительно, (смотри задачу 4 параграфа 7 лекции-семинара 6 (с. 80 части 2 тома I))

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{E}, \quad B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1),$$
$$f^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \backslash B\right) = X \backslash f^{-1}(B) \in \mathcal{E}.$$

Наконец, в силу результатов леммы 1 множество $\mathcal{E}$ содержит все открытые множества. Следовательно, $\mathcal{E}$ — σ-алгебра, а поскольку $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ — это минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества, то

$$\mathcal{E} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^1).$$

Лемма доказана.

Утверждение. *Всякая непрерывная функция измерима.*

□ Согласно определению измеримости, требуется доказать, что для всякого $c \in \mathbb{R}^1$ множество

$$A_c \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}((-\infty, c))$$

измеримо по Лебегу. Но в силу непрерывности функции $f(x)$ множество A_c открыто как прообраз открытого множества (см. теорему 1 лекции 4). А всякое открытое множество на прямой измеримо по Лебегу (доказано в конце § 9 семинара-лекции 2). ⊠

Нетрудно доказать простейшие свойства измеримых функций, а именно, что измеримые функции образуют линейное пространство. Кроме того, композиция $\varphi \circ f$ непрерывной функции $\varphi(y)$, которая, как мы доказали, тоже измерима, и измеримой функции $f(x)$ является тоже измеримой. Произведение измеримых функций измеримо. Частное $f(x)/g(x)$ двух измеримых функций измеримо при естественном условии, что $g(x) \neq 0$.

§ 2. Интеграл Лебега

Для дальнейшего нам необходимо ввести так называемые простые функции. Пусть

$$\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A},$$

а $\chi_{A_i}(x)$ — это характеристическая функция множества A_i, т. е.

$$\chi_{A_i}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A_i; \\ 0 & \text{при} \quad x \notin A_i. \end{cases}$$

Дадим определение.

Определение 3. *Функция*

$$h(x) := \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}^1,$$

называется простой.

Очевидно, что простые функции измеримы, поскольку измеримы множества в определении простой функции. Заметим теперь, что всякую функцию

$$f(x) : X \to \mathbb{R}^1$$

можно представить в следующем виде:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \tag{2.1}$$

где

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}. \tag{2.2}$$

Очевидно, что измеримость функции $f(x)$ эквивалентна измеримости каждой из функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Теперь мы в состоянии дать определение интеграла Лебега.

Сначала определим интеграл Лебега от простой функции следующим образом:

$$\int\limits_X h(x)\, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i). \tag{2.3}$$

Теперь предположим, что измеримая функция $f(x)$ является неотрицательной. Тогда определим интеграл Лебега от этой функции следующим образом:

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) \overset{\text{def}}{=}$$

$$= \sup_h \left\{ \int\limits_X h(x)\, d\mu \mid h(x) \geqslant 0 \text{ и } f(x) \geqslant h(x)\ \mu\text{-п. вс.} \right\}. \tag{2.4}$$

Здесь мы ввели новое понятие «μ-п. вс.», которое означает, что множество, на котором не выполняется некоторое свойство имеет нулевую меру. Теперь осталось распространить интеграл Лебега на случай произвольных измеримых функций. Делается это следующим образом:

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu := \int\limits_X f_+(x)\, d\mu - \int\limits_X f_-(x)\, d\mu.$$

Несложно доказать, что *множество интегрируемых по Лебегу функций образует линейное пространство* $\mathcal{L}(X, \mu)$. Нулём этого линейного пространства является функция, тождественно равная нулю на множестве X. Это приводит к некоторым неудобствам, о которых (и способе их решения!) сказано ниже.

Заметим, что в отличие от интеграла Римана для интегрируемости по Лебегу функции $f(x)$ справедливо следующее необходимое и достаточное условие:

Теорема 1. *Если $f(x)$ — измеримая функция, то $f(x) \in \in \mathcal{L}(X, \mu)$ тогда и только тогда, когда $|f(x)| \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Причём* *имеет место следующее неравенство*:

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

Доказательство.

Ясно, что если функция $f(x)$ измерима, то для всех $c \in \mathbb{R}^1$ измеримо множество $\{x \in X: \ -c < f(x) < c\} = \{x \in X: \ |f(x)| < c\}$. Следовательно, функция $|f(x)|$ тоже измерима. Наконец, функция $f(x)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируемы функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$. Кроме того, имеет место оценка

$$\left|\int\limits_X f(x)\,d\mu\right| = \left|\int\limits_X f_+(x)\,d\mu - \int\limits_X f_-(x)\,d\mu\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\int\limits_X f_+(x)\,d\mu + \int\limits_X f_-(x)\,d\mu\right| = \int\limits_X |f(x)|\,d\mu.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и определения (2.4) следует, что если функция f измерима, $|f(x)| \leqslant g(x)$ μ-п. в. и g интегрируема по Лебегу, то f тоже интегрируема. В самом деле, для $|f|$ точная верхняя грань в (2.4) конечна (она не превосходит таковой для g), а тогда в силу теоремы 1 функция f также интегрируема. Это соображение понадобится нам в теореме 6, да и важно само по себе.

Отметим, что интегрируемые по Лебегу функции называются также суммируемыми.

§ 3. Сходимости почти всюду и по мере

До сих пор в курсе вещественного анализа у нас имелось два вида сходимостей функциональных последовательностей $\{f_n(x)\}$: поточечная и равномерная. В связи с введением измеримого пространства с мерой, т. е. тройки $(X, \mathcal{A}, \mu)$, можно ввести ещё два типа сходимостей: сходимость по мере μ и сходимость μ-почти всюду.

Определение 4. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся по мере μ к функции $f(x)$, если для всякого $c > 0$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geqslant c\}\right) = 0.$$

Определение 5. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся μ-почти всюду к функции $f(x)$,* *если множество точек из X, на которых последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится к функции $f(x)$ имеет нулевую μ-меру.*

Возникает естественный вопрос о том, как связаны эти четыре типа сходимостей функциональных последовательностей. Имеет место следующая цепочка связей этих понятий:

$$\boxed{\textbf{равномерная сходимость}} \Rightarrow \boxed{\textbf{поточечная сходимость}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\textbf{сходимость п. вс.}} \Rightarrow \boxed{\textbf{сходимость по мере}}.$$

Оказывается, что есть в некотором смысле и обратная связь этих понятий. Так, оказывается, что у всякой сходящейся по мере функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ существует подпоследовательность $\{f_{n_m}(x)\}$, сходящаяся почти всюду.

Кроме того, справедлива известная теорема Д. Ф. Егорова.

Теорема Егорова. *Для каждой почти всюду сходящейся функциональной последовательности измеримых функций $\{f_n(x)\}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое подмножество $X_\varepsilon \in \mathcal{A}$ множества X, что*
$$\mu(X \setminus X_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$$
и $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на X_ε.

Доказательство.

Доказательство проведём в несколько шагов.

Шаг 1. По определению сходимости почти всюду найдётся такое измеримое множество $\overline{X} \subset X$, что
$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{поточечно на} \quad \overline{X}, \quad \mu(\overline{X}) = \mu(X).$$
Заметим, что $f(x)$ измерима на $\overline{X}$. Действительно, при любом $c \in \mathbb{R}^1$ имеем (проверить самостоятельно!)
$$\bigl\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\bigr\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>l} \left\{x \in \overline{X} : \ f_n(x) < c - \frac{1}{k}\right\},$$
откуда с учётом замкнутости $\mathcal{A}$ относительно счётных объединений и пересечений
$$\bigl\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\bigr\} \in \mathcal{A}.$$
С другой стороны, поскольку $\mu(X\backslash\overline{X}) = 0$, то $X\backslash\overline{X} \in \mathcal{A}$, поэтому
$$\mu\left(\{x \in X : \ f(x) < c\}\right) = \mu\left(\bigl\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\bigr\}\right).$$
Следовательно,
$$\bigl\{x \in X : \ f(x) < c\bigr\} = \bigl\{x \in \overline{X} : \ f(x) < c\bigr\} \cup \bigl\{x \in X\backslash\overline{X} : \ f(x) < c\bigr\} \in \mathcal{A}.$$

Шаг 2. Поскольку $f_i(x)$ и $f(x)$ измеримы на X, то
$$A_{im} \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{x \in \overline{X} : \ |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\} \in \mathcal{A} \Rightarrow B_{nm} := \bigcap_{i\geqslant n} A_{im} \in \mathcal{A}.$$

Шаг 3. При каждом $m \in \mathbb{N}$ справедливо очевидное вложение и представление

$$B_{nm} \subset B_{n+1,m}, \quad X = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{nm}\right) \bigcup \left(X \backslash \overline{X}\right). \tag{3.1}$$

Действительно, либо $x \in X \backslash \overline{X}$, либо $x \in \overline{X}$. И при любом фиксированном $m \geqslant 1$ найдётся такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $i \geqslant n_0$

$$|f(x) - f_i(x)| < \frac{1}{m}, \quad i \geqslant n_0 \Rightarrow x \in B_{n_0 m} \Rightarrow \overline{X} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{nm}. \tag{3.2}$$

Шаг 4. Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ в силу (3.2) с учётом (3.1) найдётся такое $n = n(m) \in \mathbb{N}$, что

$$\mu\left(\overline{X} \backslash B_{n(m)m}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{3.3}$$

При этом, конечно,

$$X_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{+\infty} B_{n(m)m} \in \mathcal{A}.$$

Справедлива следующая цепочка:

$$\mu(X \backslash X_\varepsilon) \leqslant \mu(X \backslash \overline{X}) + \mu(\overline{X} \backslash X_\varepsilon) = \mu(\overline{X} \backslash X_\varepsilon) = \\ = \mu\left(\overline{X} \backslash \bigcap_{m=1}^{+\infty} B_{n(m)m}\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{+\infty} \overline{X} \backslash B_{n(m)m}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Причём сходимость на множестве X_ε равномерная:

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на} \quad X_\varepsilon,$$

т. к. по самому построению (3.3) множества X_ε имеем:

$$|f_i(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{m}$$

при всех $x \in X_\varepsilon$, $i \geqslant n(m)$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Отметим, однако, что можно привести пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся по мере, но не сходящейся почти всюду.

§ 4. Свойства интеграла Лебега

Докажем сначала σ-аддитивность интеграла Лебега.

Теорема 2. *Если $A = \bigcup_n A_n$ — конечное или счётное объединение непересекающихся измеримых множеств и функция $f(x)$ интегрируема по множеству A, то верно равенство*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu,$$

причём из существования интеграла в левой части следует существование всех интегралов в правой части и сходимость ряда.

Доказательство.

Докажем теорему в несколько шагов.

Шаг 1. Сначала докажем аддитивность интеграла Лебега. Пусть

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A}.$$

Сначала предположим, что $f(x) \geqslant 0$ почти всюду на A. Заметим, что любую простую функцию $h(x)$ на A можно представить в виде

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x), & \text{если} \quad x \in A_1; \\ h_2(x), & \text{если} \quad x \in A_2, \end{cases}$$

где $h_1(x)$ и $h_2(x)$ — простые функции на A_1 и A_2 соответственно. Поэтому согласно определению интеграла Лебега от неотрицательной функции $f(x)$ получим равенство

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \int\limits_{A_1} f(x)\,d\mu + \int\limits_{A_2} f(x)\,d\mu.$$

Обобщение на произвольную (не знакопостоянную) функцию очевидно.

Шаг 2. Докажем теперь счётную аддитивность интеграла Лебега. Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{A}, \quad A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing, \quad n_1 \neq n_2.$$

Тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = B_N \cup C_N, \quad B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n, \quad C_N = A \backslash B_N.$$

Докажем, что если $f(x)$ измерима и интегрируема на множестве A, то

$$I_N = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu \to \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu = I = \int\limits_A f(x)\,d\mu$$

при $N \to +\infty$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|I_N - I| = \left| \int\limits_{C_N} f(x)\,d\mu \right| \leqslant \int\limits_{C_N} |f(x)|\,d\mu. \tag{4.1}$$

Докажем, что последний интеграл стремится к нулю при $N \to +\infty$.

С этой целью заметим, что в силу интегрируемости функции $f(x)$ на A для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая неотрицательная простая функция $h_\varepsilon(x)$, что

$$\int\limits_A [|f(x)| - h_\varepsilon(x)]\;d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad h_\varepsilon \leqslant M(\varepsilon).$$

Кроме того, при этом найдётся такое достаточно большое $N \in \mathbb{N}$, что

$$M(\varepsilon)\mu(C_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int\limits_{C_N} h_\varepsilon\,d\mu \leqslant M(\varepsilon)\mu(C_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{C_N} |f(x)|\,d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теперь докажем теорему о достаточном условии интегрируемости интеграла Лебега.

Теорема 3. *Если* $A = \bigcup_n A_n$ *— конечное или счётное объединение непересекающихся измеримых множеств, функция* $f(x)$ *интегрируема по каждому из множеств* A_n *и ряд*

$$\sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu \tag{4.2}$$

сходится, то f *интегрируема на* A *и верно равенство*

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \sum_n \int\limits_{A_n} f(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться неравенством (4.1).

Теорема доказана.

Справедлива важная теорема (*неравенство Чебышёва*).

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \geqslant 0$ *— суммируемая на* A *функция,* $c > 0$ *— произвольное положительное число. Тогда*

$$\mu\{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\} \leqslant \frac{1}{c}\int\limits_A \varphi(x)\,d\mu.$$

Доказательство.

Для доказательства обозначим $A' = \{x \in A \mid \varphi(x) \geqslant c\}$. Прежде всего следует заметить, что множество A' измеримо в силу измеримости функции φ, которая, напоминаем, является необходимым условием интегрируемости. Теперь в силу только что установленных свойств аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_A \varphi(x)\,d\mu = \int\limits_{A'} \varphi(x)\,d\mu + \int\limits_{A\setminus A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant \int\limits_{A'} \varphi(x)\,d\mu \geqslant c\mu(A').$$

Осталось лишь разделить полученное неравенство на положительное число c.

Теорема доказана.

Следующее свойство используется при доказательстве теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и носит название теоремы о абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве A, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всякого измеримого множества $e \subset A$ с $\mu(e) < \delta$ имеет место оценка*

$$\left|\int\limits_e f(x)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Легко видеть, что для ограниченной функции утверждение теоремы тривиально. Действительно, в случае $|f(x)| \leqslant c_1$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_e f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_e |f(x)|\,d\mu \leqslant c_1\mu(e) \leqslant c_1\delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

В общем же случае положим

$$A_n = \{x \in A \mid n \leqslant |f(x)| < n+1\}, \quad B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A \setminus B_N,$$

причём ясно, что $A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing$ при $n_1 \neq n_2$.

В силу теоремы о σ-аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_A |f(x)|\,d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu$$

и, в частности, ряд в правой части сходится. Тогда можно выбрать такое число N, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \int\limits_{A_n} |f(x)|\,d\mu = \int\limits_{C_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3}$$

Выберем ещё

$$\delta \in \left(0; \frac{\varepsilon}{2(N+1)}\right).$$

Тогда при $\mu(e) < \delta$, $e \subset A$ имеем

$$\left|\int\limits_{e} f(x)\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_{e} |f(x)|\,d\mu = \int\limits_{e\cap B_N} |f(x)|\,d\mu + \int\limits_{e\cap C_N} |f(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

где первое слагаемое мы оценили в силу

$$\mu(e\cap B_N) \leqslant \mu(e) < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}, \quad |f(x)|_{B_N} < N+1,$$

а второе — в силу условия (4.3).

Теорема доказана.

Замечание 2. На σ-алгебре $\mathcal{A}$ семейства подмножеств множества X можно ввести помимо внешней меры Лебега μ ещё много других мер, порождённых почти всюду неотрицательными измеримыми и интегрируемыми функциями $f(x)$ по следующей формуле:

$$\varphi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{A} f(x)\,d\mu, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{4.4}$$

С учётом теоремы 3 функция множеств $\varphi(A)$ является счётно-аддитивной мерой на семействе $\mathcal{A}$. При этом в силу теоремы 5 эта мера является *абсолютно непрерывной* относительно меры Лебега μ, т. е. для любого множества A с $\mu(A) = 0$ мера $\varphi(A) = 0$. Известен важный результат — *теорема Радона–Никодима* о том, что, наоборот, для любой абсолютно непрерывной меры φ относительно меры μ найдётся такая измеримая интегрируемая функция $f(x)$, что имеет место (4.4).

§ 5. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

В этом параграфе мы докажем сначала важный результат, называемый теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, а затем мы докажем ещё два утверждения: лемму Фату и теорему Беппо Леви. Напомним, что мы рассматриваем случай $\mu(A) < +\infty$.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие свойства*:

1. *последовательность измеримых функций f_n сходится почти всюду на множестве A к функции f*;

2. *для всех n всюду на множестве A имеет место неравенство* $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$;
3. *функция $\varphi(x)$ интегрируема по множеству A.*

Тогда

1. *функции f и f_n при всех n интегрируемы на A,*
2. *имеет место предельное равенство*

$$\int\limits_A f_n(x)\,d\mu \to \int\limits_A f(x)\,d\mu. \tag{5.1}$$

Доказательство.

Прежде всего понятно, что предельная функция $f(x)$ измерима. Это было доказано на шаге 1 доказательства теоремы Егорова. Кроме того, из оценки

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in A$$

предельным переходом получим, что

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \quad \text{для всех} \quad x \in A.$$

Из этих неравенств и следует интегрируемость функций $f_n(x)$ и $f(x)$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $B \subset A$ с $\mu(B) < \delta$ выполняется

$$\int\limits_B \varphi(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.2}$$

Но в силу теоремы Егорова это множество B можно выбрать таким образом, чтобы [1])

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{равномерно на} \quad A_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} A \setminus B, \quad A \backslash A_\varepsilon = B. \tag{5.3}$$

Тогда мы можем выбрать такое $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ и при любом $x \in A_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A_\varepsilon)}. \tag{5.4}$$

Но при этом сразу получаем, что при всех $n > N$

$$\left|\int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_A f_n(x)\,d\mu\right| \leqslant$$

[1]) Если нужно мы можем в качестве B взять его подмножество. Все неравенства сверху останутся справедливыми.

$$\leqslant \left| \int\limits_{A_\varepsilon} (f(x) - f_n(x))\, d\mu \right| + \left| \int\limits_B f(x)\, d\mu \right| + \left| \int\limits_B f_n(x)\, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{A_\varepsilon} (f(x) - f_n(x))\, d\mu \right| + \int\limits_B \varphi(x)\, d\mu +$$

$$+ \int\limits_B \varphi(x)\, d\mu \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \quad (5.5)$$

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема Беппо Леви:

Теорема 7. *Пусть всюду на A выполнены неравенства*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots, \quad (5.6)$$

причём функции $f_n(x)$ измеримы и интегрируемы на A и

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \leqslant K. \quad (5.7)$$

Тогда

1. *почти всюду на A существует конечный предел*

$$f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{n \to +\infty} f_n(x), \quad (5.8)$$

2. *функция f измерима и интегрируема на A и*

$$\int\limits_A f_n(x)\, d\mu \to \int\limits_A f(x)\, d\mu. \quad (5.9)$$

Доказательство.

Ограничимся случаем, когда $f_1(x) \geqslant 0$, потому что общий случай можно свести к нему введением функций

$$\widetilde{f}_n(x) = f_n(x) - f_1(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x \in A \mid f_n \to +\infty\}.$$

Нужно доказать, что *множество Ω имеет нулевую меру Лебега μ.*

$\square$ Обозначим через $f(x)$ поточечный предел последовательности, где он существует:

$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in A.$$

Введём следующие обозначения:

$$\Omega_n^{(r)} = \{x \in A : \ f_n(x) > r\}\,, \quad \Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \Omega_n^{(r)} = \{x \in A| \ f(x) > r\}\,,$$
$$\Omega = \bigcap_{r \geqslant 0} \Omega^{(r)} = \{x \in A| \ f(x) = +\infty\}\,. \tag{5.10}$$

Стало быть,

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)}, \quad \text{где} \quad \Omega_n^{(r)} = \{x \in A \mid f_n(x) > r\}. \tag{5.11}$$

Из неравенства Чебышёва в силу (5.10) следует, что при всех n, r

$$\mu(\Omega_n^r) \leqslant \frac{K}{r},$$

откуда с учётом

$$\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots$$

имеем

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \leqslant \frac{K}{r}.$$

Но при любом r верно включение $\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)}$, поэтому $\mu(\Omega) \leqslant \frac{K}{r}$, откуда следует, что $\mu(\Omega) = 0$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. ☒

Для доказательства предельного соотношения введём прежде всего обозначение

$$A_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in A \mid m - 1 \leqslant f(x) < m\}, \quad m \in \mathbb{N} \tag{5.12}$$

и положим $\varphi(x) = m$ на A_m. Заметим, что на множестве A_m имеет место неравенство

$$\varphi(x) = m \leqslant f(x) + 1.$$

Докажем, что $\varphi(x)$ интегрируема на A. После этого останется лишь воспользоваться теоремой Лебега.

Положим

$$B_l = \bigcup_{m=1}^{l} A_m, \quad A_{m_1} \cap A_{m_2} = \varnothing, \quad m_1 \neq m_2.$$

Поскольку на множествах B_l функции f_n и f ограничены и $\varphi(x) \leqslant f(x)+1$, то в силу теоремы Лебега имеем [1])

$$\int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_{B_l} f(x)\,d\mu + \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{B_l} f_n(x)\,d\mu + \mu(A) \leqslant K + \mu(A).$$

Но при всех l верно

$$\int\limits_{B_l} \varphi(x)\,d\mu = \sum_{m=1}^{l} m\mu(A_m).$$

Равномерная ограниченность этих сумм означает (абсолютную) сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m\mu(A_m) = \int\limits_{A} \varphi(x)\,d\mu. \tag{5.13}$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы Лебега.

Теорема доказана.

Докажем теперь важное утверждение, известное как лемма Фату.

Лемма 3. *Если последовательность интегрируемых и измеримых на множестве A неотрицательных функций f_n сходится почти всюду на A к функции f и при любом $n \in \mathbb{N}$*

$$\int\limits_{A} f_n(x)\,d\mu \leqslant K, \tag{5.14}$$

то f интегрируема на A и

$$\int\limits_{A} f(x)\,d\mu \leqslant K. \tag{5.15}$$

Доказательство.

Доказательство проведём по следующей схеме:

1. Введём новые функции

$$\varphi_n = \inf_{k\geqslant n} f_k(x),$$

которые обладают свойством

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots.$$

2. Полученные функции измеримы (докажите сами), поскольку

$$\{x\in A \mid \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k\geqslant n} \{x \in A \mid f_k(x) < c\} \in \mathcal{A}.$$

[1]) Мы рассматриваем случай $\mu(A) < +\infty$.

3. Далее, $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, поэтому φ_n интегрируемы и

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\,d\mu \leqslant \int\limits_A f_n(x)\,d\mu \leqslant K. \tag{5.16}$$

4. С другой стороны,

$$\varphi_n(x) \to f(x)$$

почти всюду (а именно, в тех же точках, где $f_n(x) \to f(x)$).

5. По теореме Беппо Леви, применённой к последовательности $\{\varphi_n\}$, имеем интегрируемость и измеримость функции f и предельное соотношение

$$\int\limits_A \varphi_n(x)\,d\mu \to \int\limits_A f(x)\,d\mu. \tag{5.17}$$

Наконец, из (5.16) и (5.17) получаем неравенство, которое утверждается в условии теоремы.

Лемма доказана.

§ 6. Случай множества X с неограниченной мерой μ

Мы ограничимся случаем так называемой σ-конечной меры μ. Именно, будем говорить, что на пространстве X введена σ-конечная мера μ, если существует такая последовательность $\{X_n\} \subset X$, что

$$\mu(X_n) < +\infty, \quad X_n \subset X_{n+1}, \quad X = \bigcup_n X_n.$$

Любая такая последовательность называется *исчерпывающей*.

ПРИМЕР 2. Приведём простой пример меры, не являющейся σ-конечной: возьмем меру на прямой и положим меру каждой точки равной единице. Действительно, предположим, что такая исчерпывающая последовательность $\{X_n\}$ существует, тогда с необходимостью каждое множество не может состоять из конечного числа различных точек, а в этом случае

$$\mu(X_n) = \sum_{l=1}^{+\infty} \mu(x_l) = \sum_{l=1}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

Определение 6. *Измеримая функция f, определенная на множестве X σ-конечной меры μ, называется суммируемой на X, если она суммируема на каждом его измеримом подмножестве конечной меры и если для любой исчерпывающей последовательности $\{X_n\}$ предел*

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{X_n} f(x)\,d\mu$$

существует и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f *по множеству* X *и по-прежнему обозначается символом* $\int_A f(x)\,d\mu$.

Для интегралов по множествам бесконечной меры сохраняют справедливость все предыдущие результаты, кроме утверждения об интегрируемости ограниченной измеримой функции.

§ 7. Класс интегрируемых по Лебегу функций

Теперь наша задача рассмотреть важный класс интегрируемых по Лебегу функций. Из определения интеграла Лебега ясно, что множество интегрируемых по Лебегу функций образуют линейное пространство, которое мы будем обозначать символом $\mathcal{L}(X)$.

Дадим определение так называемого *метрического пространства*, изучение которых мы детально начнём в следующей лекции.

Определение 7. *Множество* Y *называется метрическим пространством, если на нём задана вещественная функция* $d : Y \otimes Y \to \mathbb{R}^1_+$ *такая, что выполнены следующие свойства*:

(i) $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* $x, y \in Y$;

(iii) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* $x, y, z \in Y$.

Теперь введём на множестве $\mathcal{L}(X)$ — всех интегрируемых на множестве X функций относительно измеримого пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — вещественную функцию

$$d(f, g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\, d\mu. \tag{7.1}$$

Ясно, что на множестве $\mathcal{L}(X)$ эта функция удовлетворяет условиям (ii) и (iii) определения 7. Однако не выполняется требование (i). Действительно, пусть интегрируемые по Лебегу функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются только на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X, тогда, очевидно, $d(f, g) = 0$, но $f(x) \neq g(x)$ на X.

Что с этим нам делать? Задача заключается в построении так называемого *класса функций, интегрируемых по Лебегу*.

Будем вместо функций $f(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ рассматривать классы функций $\{f(x)\}$ такие, что две функции $f_1(x), f_2(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ принадлежат одному классу $\{f(x)\}$, если они отличаются от заданной функции $f(x)$ на множестве нулевой меры Лебега μ на множестве X. Тогда на полученном пространстве, которое мы будем обозначать через $L(X)$, можно ввести метрику

$$d^\circ(\{f\}, \{g\}) = d(f, g) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\, d\mu, \tag{7.2}$$

где $f(x) \in \{f(x)\}$, $g(x) \in \{g(x)\}$, т. е. в данной формуле мы в левой части рассматриваем метрику на пространстве $L(X, \mu)$ классов эквивалентных функций, а в правой части мы берем некоторые представители из этих классов. В этом случае все условия (i)–(iii) будут выполнены.

Это построение является частным случаем операции введения на множестве $\mathfrak{A}$ отношения эквивалентности φ между элементами $x, y \in \in \mathfrak{A}$, что обозначается как

$$x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y,$$

таким образом, чтобы это *отношение эквивалентности* удовлетворяло следующим трём свойствам:

1. $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} x$;
2. $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y \Leftrightarrow y \overset{\mathcal{L}}{\sim} x$;
3. $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y$ и $y \overset{\mathcal{L}}{\sim} z \Rightarrow x \overset{\mathcal{L}}{\sim} z$.

При этом для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{A}$ возможен ровно один из двух случаев: либо $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y$, либо x и y не связаны отношением φ.

После того, как множестве $\mathfrak{A}$ введено отношение эквивалентности φ, можно провести операцию сопоставления по паре $(\mathfrak{A}, \varphi)$ множества $\mathfrak{A}\backslash\{\varphi\}$ *классов эквивалентности*, определенное следующим образом:

$$x_1, x_2 (\in \mathfrak{A}) \in \{x\} \in \mathfrak{A}\backslash\{\varphi\}, \quad \text{если} \quad x_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} x_2.$$

Эта операция называется разбиением множества $\mathfrak{A}$ по фактору φ на классы эквивалентности φ.

ПРИМЕР 3. В случае множества $\mathfrak{A} = \mathcal{L}(X, \mu)$ отношение эквивалентности φ между функциями $f(x), g(x) \in \mathcal{L}(X, \mu)$ характеризуется следующим условием:

$$f(x) = g(x) \quad \text{почти всюду по мере } \mu.$$

Можно проверить, что отношение эквивалентности φ разбивает множество $\mathfrak{A}$ на непересекающиеся классы. Действительно, если $x \in \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$ и между ними есть отношение эквивалентности φ, то они попадают в один класс. Если же они неэквивалентны, то они попадают в разные классы.

Корректность определения метрики.

Естественно, нам нужно доказать, что значение величины в левой части не зависит от выбора представителей в правой части. Доказывается это следующим образом.

Пусть $f(x), f_1(x) \in \{f(x)\}$ и $g(x), g_1(x) \in \{g(x)\}$. Тогда имеют место следующие неравенства, в силу того, что выполнены свойства (ii) и (iii) определения 7 для функции (7.1):

$$d(f, g) \leqslant d(f, f_1) + d(f_1, g_1) + d(g_1, g) = d(f_1, g_1), \tag{7.3}$$

$$d(f_1, g_1) \leqslant d(f_1, f) + d(f, g) + d(g, g_1) = d(f, g), \tag{7.4}$$

поскольку в силу определения (7.1) функции $d(\cdot, \cdot)$ и того, что

$$f_1(x) = f_2(x) = f(x), \quad g_1(x) = g_2(x) = g(x) \quad \text{почти всюду в} \quad x \in X,$$

имеют место равенства

$$d(f,f_1) = d(f_1,f) = 0, \quad d(g,g_1) = d(g_1,g) = 0.$$

Следовательно, из неравенств (7.3) и (7.4) вытекает, что

$$d(f,g) = d(f_1,g_1).$$

Стало быть, функция d°, определенная формулой (7.2), определена корректно.

Но теперь у нас для этой функции $d^\circ(\cdot,\cdot)$ помимо условий (ii) и (iii) выполнено и свойство (i). Таким образом, пространство классов интегрируемых функций $L(X)$ является метрическим пространством относительно метрики (7.2). Кроме того, в силу линейности пространства $\mathcal{L}(X)$ линейным является и пространство классов функций $L(X)$, в котором нулевым элементом $\vartheta(x)$ является класс функций $\{\vartheta(x)\}$, почти всюду равных нулю.

Таким образом, пространство классов функций $\{f\} \in L(X)$ является *линейным метрическим пространством.*

§ 8. Пространства Лебега $L^p(X,\mu)$ при $p \geqslant 1$

Дадим определение нормированного пространства.

Определение 8. *Линейное пространство $\mathcal{E}$ называется нормированным, если на $\mathcal{E}$ задана такая функция $\|\cdot\| : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1_+$, что выполнены свойства*

(i) $\|f\| = 0$ *тогда и только тогда, когда $f = \vartheta$ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{E}$;*
(ii) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ *для всех $\alpha \in \mathbb{C}$ и всех $f \in \mathcal{E}$;*
(iii) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ *для всех $f,g \in \mathcal{E}$.*

Нетрудно проверить, что линейное нормированное пространство является метрическим относительно метрики $d(x,y) = \|x-y\|$. Проверьте самостоятельно!

Заметим, что если мы определим на линейном пространстве $L(X)$ норму следующим образом:

$$\|\{f\}\| := \int\limits_X |f(x)|\,d\mu, \quad f(x) \in \{f\} \in L(X,\mu), \tag{8.1}$$

то получим линейное нормированное пространство $L(X,\mu)$.

Теперь рассмотрим некоторые классы функций, важных в приложениях. Дадим определение.

Определение 9. *Измеримые функции $f(x)$, у которых*

$$|f(x)|^p \in \mathcal{L}(X,\mu) \quad \text{при} \quad p \in [1,+\infty), \tag{8.2}$$

будем обозначать как пространство $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

Уже стандартным образом разбивая функции $f(x)$ из пространства $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ на классы функций $\{f\}$, мы получим класс $L^p(X,\mu)$ при $p \in \in (0,+\infty)$.

Заметим, что класс функций $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным нормированным пространством. Докажем это. Действительно, пусть $f(x), g(x) \in L^p(X,\mu)$ и $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, тогда имеет место элементарное неравенство

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leqslant c(p)\left(|\alpha|^p|f(x)|^p + |\beta|^p|g(x)|^p\right) \in L(X,\mu),$$

поскольку пространство $L(X,\mu)$ является линейным. Стало быть, пространство $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным. Теперь определим на линейном пространстве $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ следующую числовую функцию:

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} : L^p(X,\mu) \to \mathbb{R}^1_+ \tag{8.3}$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет свойствам (i) и (ii) определения нормы.

Докажем, что для функции (8.3) выполнено неравенство треугольника (iii) определения нормы, т. е. докажем так называемое *неравенство Минковского*:

$$\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, d\mu\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in [1+\infty). \tag{8.4}$$

С этой целью заметим, что при $p = 1$ это неравенство есть следствие неравенства

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{для всех} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Теперь нам нужно рассмотреть случай $p \in (1,+\infty)$. Но для этого нам предварительно нужно доказать так называемое *неравенство Гёльдера*.

Теорема 8. *Пусть* $f(x) \in L^p(X,\mu)$ *и* $g(x) \in L^q(X,\mu)$ *при* $p,q \in (1,+ +\infty)$, *причём*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

тогда $f(x)g(x) \in L^1(X)$ *и имеет место неравенство*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{8.5}$$

Доказательство.

Для неотрицательных чисел $a, b \in \mathbb{R}^1_+$ имеет место хорошо известное неравенство:

$$a \cdot b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{8.6}$$

$\square$ Докажем, что для всех $x \geqslant 1$ и $\alpha \in (0,1)$ имеет место следующее неравенство:

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leqslant 0. \tag{8.7}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ в окрестности точки $x = 1$. По формуле Лагранжа имеем

$$x^\alpha - 1^\alpha = \alpha z^{\alpha-1}(x-1), \quad z \in (1, x).$$

Отсюда сразу же получаем следующее неравенство:

$$x^\alpha - 1^\alpha \leqslant \alpha(x-1) \quad \text{при} \quad x \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \alpha \in (0,1).$$

Пусть $a > 0$, $b > 0$ и для определенности $a \geqslant b$. Тогда в неравенстве (8.7) положим

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{p} \quad \text{при} \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тогда получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\frac{a}{b} \leqslant 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}.$$

Умножим обе части этого неравенства на b и получим неравенство

$$a^{1/p}b^{1-1/p} - \frac{a}{p} \leqslant \frac{b}{q} \Rightarrow a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Rightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \boxtimes$$

Поскольку $f \in L^p(X,\mu)$ и $g \in L^q(X,\mu)$, то $f(x)$ и $g(x)$ измеримы, а значит, измеримо и их произведение.

$\square$ Без ограничения общности будем считать, что $f(x), g(x) \geqslant 0$.

Докажем, что множество

$$C = \{x \in X \mid f(x)g(x) < c\} \tag{8.8}$$

измеримо.

Для удобства обозначений введём функции

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{c}}, \quad G(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{c}}. \tag{8.9}$$

Тогда

$$C = \{x \in X \mid F(x)G(x) < 1\}. \tag{8.10}$$

Пусть $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность пронумерованных (в некотором порядке) всех рациональных чисел. Пусть

$$A_n = \{x \in X \mid F(x) < e^{-r_n}\} \equiv \{x \in X \mid f(x) < \sqrt{c}\, e^{-r_n}\},$$
$$B_n = \{x \in X \mid G(x) < e^{r_n}\} \equiv \{x \in X \mid g(x) < \sqrt{c}\, e^{r_n}\}. \quad (8.11)$$

Докажем, что
$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap B_n. \quad (8.12)$$

Тогда из измеримости множеств A_n и B_n будет следовать измеримость множества C, а отсюда, в силу произвольности числа $c > 0$ — и измеримость функции $f(x)g(x)$.

Вложение «справа налево» очевидно. Докажем обратное вложение. Итак, пусть $x \in X$ фиксировано и $F(x)G(x) < 1$. Пусть $q_k \to \ln G(x) + + 0$. Тогда $-q_k \to -\ln G(x) > \ln F(x)$ (последнее неравенство следует из того факта, что $\ln F(x) + \ln G(x) < 0$). Поэтому для всех q_k, достаточно близких к $\ln G(x)$, имеем $-q_k > \ln F(x)$. Зафиксируем номер k_0 из тех k, для которых выполнено последнее неравенство. Теперь выберем такое n, что $r_n = q_{k_0}$. Тогда
$$x \in A_n \cap B_n. \quad \boxtimes \quad (8.13)$$

Кроме того, их произведение определено почти всюду в X. Теперь возьмем
$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$
и подставим их в неравенство (8.6), откуда получим неравенство
$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Интегрируя обе части по мере μ на множестве X, получим неравенство
$$\int\limits_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\, d\mu \leqslant 1.$$

Откуда сразу же вытекает неравенство Гёльдера.

Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть $f, g \in L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$, тогда имеет место неравенство*
$$\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\, \mu(dx)\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, \mu(dx)\right)^{1/p}. \quad (8.14)$$

Доказательство.

Прежде всего отметим, что в силу неравенства

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^{p-1}\left[|f(x)|^p + |g(x)|^p\right]$$

сумма функций $f(x)+g(x)$ принадлежит $L^p(X)$.

Перейдем к доказательству неравенства. Случай $p=1$ очевиден. Рассмотрим теперь случай, когда $p \in (1,+\infty)$. Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|f(x)| + |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|g(x)|\,.$$

Воспользуемся теперь неравенством Гёльдера для обоих слагаемых в правой части этого неравенства, в котором для первого слагаемого сначала положим

$$f_1(x) = |f(x)+g(x)|^{p-1}\,, \quad f_2(x) = |f(x)|\,, \quad r_1 = \frac{p}{p-1}, \quad r_2 = p,$$

а затем положим

$$f_1(x) = |f(x)+g(x)|^{p-1}\,, \quad f_2(x) = |g(x)|\,, \quad r_1 = \frac{p}{p-1}, \quad r_2 = p.$$

В результате применения неравенства Гёльдера получим следующее неравенство:

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{p-1}\,|f(x)|\;d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}\;d\mu\right)^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\;d\mu\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\;d\mu\right)^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\;d\mu\right)^{1/p}, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Аналогичное неравенство получается и для второго слагаемого. Таким образом, получили

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\;d\mu \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\;d\mu\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left[\left(\int\limits_X |f(x)|^p\;d\mu\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\;d\mu\right)^{1/p}\right].$$

Откуда получаем требуемое неравенство.

Следовательно, числовая функция (8.3) является нормой. Значит, линейное пространство $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является линейным нормированным относительно указанной нормы.

К настоящему моменту мы разобрали случай, когда $p \in [1,+\infty)$. Теперь нам нужно рассмотреть случай, когда $p = +\infty$. Сначала введём класс функций $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$. Дадим определение.

Определение 10. *Классом $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ мы назовем класс измеримых функций, которые почти всюду являются ограниченными.*

Введём норму на этом пространстве.

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{c : \mu\{x :\ |f(x)| \geqslant c\} = 0\}. \qquad (8.15)$$

Подробное изучение этого пространства мы продолжим во второй части, где и докажем, что введенная функция действительно является нормой.

Таким образом, функция (8.15) является нормой на линейном пространстве $L^\infty(X)$.

Необходимость введения пространства $L^\infty(X)$ вызвана, например, следующим утверждением, которое мы приведём без доказательства.

Теорема 10. *Неравенство Гёльдера остается справедливым для функции $f(x) \in L^1(X,\mu)$ и функции $g(x) \in L^\infty(X,\mu)$ и имеет вид*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$